icm©

dziemy w ten sam sposób dalej — Fig. 3 uzmysławia krok następny — to widzieć łatwo, w jaki sposób każdemu danemu punktowi prostej można przyporządkować jeden oznaczony punkt kwadratu. Potrzeba tylko oznaczyć te z odcinków prostej, na których punkt dany przypada. Kwadraty, oznaczone temi samemi liczbami, leżą koniecznie jedne w drugich i zamykają w granicy oznaczony punkt powierzchni. Niechaj to będzie punkt przyporządkowany danemu punktowi. *Tak znalezione odwzorowanie jest jednoznacznem i ciągłem i odwrotnie każdemu punktowi kwadratu odpowiadają jeden, dwa lub cztery punkty linii.* Godnem uwagi jest przytem, że przez odpowiednią zmianę linij dzielących w kwadracie można znaleść *odwzorowanie jednoznaczne i ciągłe, którego odwrotność wszędzie co najwyżej jest trójznaczną.*

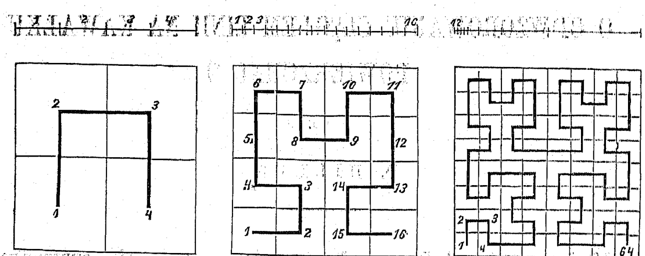

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Znalezione wyżej funkcye odwzorowujące są zarazem prostemi przykładami funkcyj wszędzie ciągłych i nigdzie nie różniczkowalnych.

Mechaniczne znaczenie podanego odwzorowania jest takie: *Punkt może poruszać się ruchem ciągłym w ten sposób, że w czasie skończonym znajdzie się we wszystkich punktach kawałka powierzchni.* Można też — również przez zmianę odpowiednią linij dzielących w kwadracie — sprawić jednocześnie, że w *nieskończenie wielu zgęszczonych — wszędzie punktach kwadratu istnieje oznaczony kierunek ruchu tak naprzód jako też i wstecz.*

Co się tyczy przedstawienia analitycznego funkcyj odwzorowujących, to z ciągłości ich wynika wprost na podstawie twierdzenia ogólnego, dowiedzionego przez K. Weierstrassa [1]), że funkcye te dają się rozwinąć na szeregi nieskończone, postępujące według funkcyj całkowitych wymiernych i w całym przedziale zbieżne bezwzględnie i jednostajnie.

[1]) Porów. „Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin", 9 czerwca 1885.

O RÓWNANIU RUCHU DRGAJĄCEGO CIAŁ LOTNYCH JEDNORODNYCH.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

Znane są dobrze sposoby całkowania równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

w którem u oznacza zgęszczenie lub rozrzedzenie gazu, za pomocą całek oznaczonych. Stosując podobne całki między granicami $+\infty$ i $-\infty$, rozwiązano wiele trudnych i pięknych zadań z fizyki matematycznej. Mniemam jednak, że, mając całkę ogólną pod postacią skończonej sumy funkcyj dowolnych trzech argumentów, można będzie rozwiązywać zagadnienia trudniejsze, drogą znacznie prostszą, aniżeli przez stosowanie całek oznaczonych. Wskutek tego, postawiłem sobie za cel zadania odnalezienie drogi, za pomocą której daje się utworzyć całka ogólna pod postacią skończoną. W tym celu, nasamprzód używam metody własnej dla otrzymania całki *zupełnej* z czternastoma stałemi dowolnemi. Następnie przechodzę od tego wzoru do całki ogólniejszej z funkcyami dowolnemi pojedyńczych argumentów. Nakoniec dając kształt ogólny funkcyi dowolnej trzech argumentów liniowych, przy pomocy metody współczynników nieoznaczonych, nader prosto otrzymuję całkę *ogólną.* Tym sposobem cała trudność zagadnienia staje się zależną od rozwiązania pewnego układu równań algebraicznych.

Niech całka powyższego równania będzie jednocześnie całką równania o różniczkach zupełnych:

$$du = y_1\,dx + y_2\,dy + y_3\,dz + y_4\,dt, \tag{2}$$

którego współczynniki czynią zadość znanym warunkom

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} + \frac{\partial y_i}{\partial u}\, y_k = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \frac{\partial y_k}{\partial u}\, y_i\,. \tag{3}$$

$(i, k = 1, 2, 3, 4)$ $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = t)$.

Oprócz tego, wiemy, że

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz + \frac{\partial u}{\partial t}\, dt\,. \tag{4}$$

Odejmując równania (4) i (2), wskutek niezależności zmiennych x, y, z, t, otrzymamy

$$y_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{5}$$

Następnie, jeżeli zróżniczkujemy równanie (5) według x_i, natenczas będziemy mieli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial u}\, y_i\,. \tag{6}$$

Przy pomocy ostatniego związku napiszemy równanie (1) w kształcie

$$\frac{\partial y_4}{\partial t} + \frac{\partial y_4}{\partial u}\, y_4 = m\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\, y_1 + \frac{\partial y_2}{\partial y} + \frac{\partial y_2}{\partial u}\, y_2 + \frac{\partial y_3}{\partial z} + \frac{\partial y_3}{\partial u}\, y_3\right) \tag{7}$$

Łatwo dowieść, że układowi równań (7) i (3) można uczynić zadość za pomocą następujących funkcyj y_i:

$$y_1 = a_1 u + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 t + a_6 xy + a_7 xz + a_8 xt + a_9 yz + a_{10} yt + a_{11} zt + a_{12} x^2 + a_{13} y^2 + a_{14} z^2 + a_{15} t^2 + a_{16}\,,$$

gdzie a są pewne stałe.

Podobnie, dla y_2 zamiast a napiszemy w powyższem głoskę b, dla y_3 na miejsce a podstawimy c i nakoniec, dla y_4 głoskę a zastąpimy przez h. Podstawiając te wartości y_i w układ równań (7) (3) i porównawszy współczynniki przy wyrazach podobnych, z łatwością otrzymamy:

$$h_1^2 = m\,(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \tag{8}$$

$$\frac{a_1}{a_i} = \frac{b_1}{b_i} = \frac{c_1}{c_i} = \frac{h_1}{h_i} = \frac{1}{\beta_{i-5}}\,, \qquad (i = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)\,,$$

β oznacza stały wykładnik napisanych stosunków.

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= \frac{2\beta_7 b_1 + b_1 a_2 - a_1 \beta_1}{a_1}\,, & b_3 &= \frac{b_1 \beta_1 + b_1 a_3 - 2a_1 \beta_8}{a_1}\,, \\ b_4 &= \frac{b_1 \beta_2 + b_1 a_4 - a_1 \beta_4}{a_1}\,, & b_5 &= \frac{b_1 \beta_3 + b_1 a_5 - a_1 \beta_5}{a_1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$b_{16} = \frac{2\beta_7 b_1 + b_1 a_2 - a_1 \beta_1}{a_1^2} + \frac{b_1 a_{16} - a_3}{a_1}\,,$$

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= \frac{2c_1 \beta_7 + c_1 a_2 - a_1 \beta_2}{a_1}\,, & c_3 &= \frac{c_1 \beta_1 + c_1 a_3 - a_1 \beta_4}{a_1}\,, \\ c_4 &= \frac{c_1 \beta_2 + c_1 a_4 - 2\beta_9 a_1}{a_1}\,, & c_5 &= \frac{c_1 \beta_3 + c_1 a_5 - a_1 \beta_6}{a_1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$c_{16} = \frac{2\beta_7 c_1 + c_1 a_2 - a_1 \beta_2}{a_1^2} + \frac{c_1 a_{16} - a_4}{a_1}\,,$$

$$\left.\begin{aligned} h_2 &= \frac{2h_1 \beta_7 + h_1 a_2 - a_1 \beta_3}{a_1}\,, & h_3 &= \frac{h_1 \beta_1 + h_1 a_3 - a_1 \beta_5}{a_1}\,, \\ h_4 &= \frac{h_1 \beta_2 + h_1 a_4 - a_1 \beta_6}{a_1}\,, & h_5 &= \frac{h_1 \beta_3 + h_1 a_5 - 2a_1 \beta_{10}}{a_1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$h_{16} = \frac{2h_1 \beta_7 + h_1 a_2 - a_1 \beta_3}{a_1^2} + \frac{h_1 a_{16} - a_5}{a_1}\,, \qquad \beta_{10} = m\,(\beta_7 + \beta_8 + \beta_9)\,.$$

Tym sposobem, kształt funkcyj y_i będzie następujący:

$$y_1 = a_1 u + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 t + a_1 (\beta_1 xy + \beta_2 xz + \beta_3 xt + \beta_4 yz + \beta_5 yt + \beta_6 zt + \beta_7 x^2 + \beta_8 y^2 + \beta_9 z^2) + a_1 m\,(\beta_7 + \beta_8 + \beta_9)\, t^2 + a_{16}\,.$$

Podobnie, dla y_2 głoskę a zastąpimy przez b, dla y_3 zamiast a napiszemy w powyższem c i dla y_4 zamiast a — głoskę h; oprócz tego, pamiętać należy, że wartości na b_2, b_3, b_4, b_5 i b_{16} są (9), wartości na c_2, c_3, c_4, c_5 i c_{16} są (10) i nakoniec wartości h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_{16} są (8) i (11).

Czynnik całkujący równania (2) będzie

$$\mu = e^{-a_1 x - b_1 y - c_1 z - h_1 t}$$

i wskutek tego będziemy mieli do przecałkowania równania dokładne

$$\mu\,(du - y_1\, dx - y_2\, dy - y_3\, dz - y_4\, dt) =$$

icm©

Napisawszy całkę ostatniego równania, nietrudno wywnioskować, że możliwie najprostszy kształt całki zupełnej danego równania (1) jest:

$$u = l_0 + l_1 x + l_2 y + l_3 z + l_4 t + l_5 xy + l_6 xz + l_7 xt + l_8 yz + l_9 yt$$
$$+ l_{10} zt + l_{11} x^2 + l_{12} y^2 + l_{13} z^2 + m(l_{11} + l_{12} + l_{13}) t^2 ,$$

gdzie $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{13}$ oznaczają stałe dowolne.

Według znanej metody przemieniania stałych dowolnych będziemy mieli do rozwiązania następujący układ równań różniczkowych

$$\left.\begin{aligned}
& dl_0 + x\,dl_1 + y\,dl_2 + z\,dl_3 + t\,dl_4 + xy\,dl_5 + xz\,dl_6 + xt\,dl_7 + yz\,dl_8 + yt\,dl_9 \\
& \quad + zt\,dl_{10} + x^2\,dl_{11} + y^2\,dl_{12} + z^2\,dl_{13} + mt^2(dl_{11} + dl_{12} + dl_{13}) = 0 , \\
& dl_1 + y\,dl_5 + z\,dl_6 + t\,dl_7 + 2x\,dl_{11} = 0 , \\
& dl_2 + x\,dl_5 + z\,dl_8 + t\,dl_9 + 2y\,dl_{12} = 0 , \\
& dl_3 + x\,dl_6 + y\,dl_8 + t\,dl_{10} + 2z\,dl_{13} = 0 , \\
& dl_4 + x\,dl_7 + y\,dl_9 + z\,dl_{10} + 2\,mt(dl_{11} + dl_{12} + dl_{13}) = 0 .
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Układ powyższy określa pięć wielkości l. Pomiędzy pozostałemi ilościami l można tworzyć związki jakiekolwiek, z tym jednak warunkiem, ażeby w końcu wszystkie ilości l określały się jako funkcye zmiennych x, y, z, t. Nadmienionym warunkom można uczynić zadość tak: dajmy

$$dl_5 = dl_6 = dl_8 = 2\,dl_{11} ,$$
$$dl_7 = dl_9 = dl_{10} = 2\sqrt{3m}\,dl_{11} ,$$
$$dl_{11} = dl_{12} = dl_{13} ;$$

wtedy, z układu równań (12) otrzymamy

$$dl_1 = dl_2 = dl_3 = -2(x + y + z + \sqrt{3m}\,t)\,dl_{11} ,$$
$$dl_4 = -2\sqrt{3m}(x + y + z + \sqrt{3m}\,t)\,dl_{11} ,$$
$$dl_0 = (x + y + z + \sqrt{3m}\,t)^2\,dl_{11} .$$

Przyjmując

$$l_{11} = f(x + y + z + \sqrt{3m}\,t) ,$$

nietrudno zauważyć, że wskutek napisanych równań całka zupełna równania danego przybiera kształt

$$u = \varphi(x + y + z + \sqrt{3m}\,t) .$$

Rozumując podobnie, dochodzimy do następującego wzoru

$$u = \varphi_1(x+y+z+\sqrt{3m}\,t) + \varphi_2(x-y+z+\sqrt{3m}\,t) + \varphi_3(x+y-z+\sqrt{3m}\,t)$$
$$+ \varphi_4(x+y+z-\sqrt{3m}\,t) + \varphi_5(-x-y+z+\sqrt{3m}\,t) + \varphi_6(-x+y-z+\sqrt{3m}\,t)$$
$$+ \varphi_7(-x+y+z-\sqrt{3m}\,t) ,$$

gdzie φ_i oznaczają funkcye dowolne i niezależne.

Podobnym sposobem można także otrzymać wzór ogólniejszy:

$$u = \psi_1(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t\sqrt{m}) + \psi_2(\alpha x-\beta y+\gamma z+\delta t\sqrt{m})$$
$$+ \psi_3(\alpha x+\beta y-\gamma z+\delta t\sqrt{m}) + \psi_4(\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta t\sqrt{m})$$
$$+ \psi_5(-\alpha x-\beta y+\gamma z+\delta t\sqrt{m}) + \psi_6(-\alpha x+\beta y-\gamma z+\delta t\sqrt{m})$$
$$+ \psi_7(-\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta t\sqrt{m}) ,$$

w którym ψ_i oznaczają funkcye dowolne niezależne,

$$\delta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} ;$$

α, β, γ są jakiekolwiek stałe.

Poznawszy argumenty funkcyj dowolnych pojedyńczych, możemy teraz spróbować, czy równaniu danemu nie uczyni zadość funkcya dowolna trzech argumentów

$$u = F(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t\sqrt{m},\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z$$
$$+ \beta_4 t\sqrt{m},\ \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 t\sqrt{m}) . \quad (13)$$

Oznaczmy dla krótkości

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t\sqrt{m} = \xi ,$$
$$\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 t\sqrt{m} = \eta ,$$
$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 t\sqrt{m} = \zeta ,$$

natenczas wzór (13) będzie miał kształt

$$u = F(\xi, \eta, \zeta) . \quad (14)$$

Różniczkując równanie (14) cząstkowo dwa razy względem x, otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\alpha_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\beta_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}\gamma_1^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\alpha_1\beta_1 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \zeta}\alpha_1\gamma_1 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \zeta}\beta_1\gamma_1 .$$

icm©

Podobnie, dla $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ zamienimy w powyższem skaźniki 1 na 2, dla $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ zastąpimy skaźniki 1 przez 3 i nareszcie dla $\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ zamienimy skaźniki 1 na 4.

Dalej, przez porównanie współczynników przy wyrazach podobnych wypada łatwo następujący układ równań

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= \alpha_4^2 , \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= \beta_4^2 , \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= \gamma_4^2 , \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 &= \alpha_4 \beta_4 , \\ \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 &= \alpha_4 \gamma_4 , \\ \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 &= \beta_4 \gamma_4 . \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Układ ten rozwiązać można rozmaitemi sposobami i stosownie do tego otrzymamy różne kształty całki ogólnej równania danego. Tak naprzykład, kładąc

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \gamma_1 = 1 ,$$
$$\gamma_3 = 3 ,$$

pozostałe ilości $\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4$ wyznaczymy łatwo z układu (15) i otrzymamy po kilka odpowiednich wartości dla $\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4$. Tym sposobem, widzimy, że całka ogólna równania danego będzie miała kształt

$$u = \sum_i F_i (\xi, \eta, \zeta) ,$$

gdzie suma według i rozciągać się będzie na tyle wartości, ile można będzie utworzyć niezależnych względem siebie argumentów ξ, η, ζ przy kombinowaniu liczb $\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4$.

Płock, dnia 26 września 1893 roku.

O ROZWINIĘCIACH ZBIEŻNYCH WEWNĄTRZ KRZYWYCH CASSINI'EGO.

NAPISAŁ

J. PUZYNA.

Uwagi wstępne.

Równanie

$$r^2 = (x^2+y^2+d^2)^2 - 4\, d^2 x^2 , \tag{1}$$

odniesione do układu prostokątnego, lub równanie

$$\varrho \cdot \varrho' = r \tag{2}$$

w układzie dwubiegunowym określa, jak wiadomo, krzywą Cassini'ego, która,

gdy $r > d^2$ jest jednym owalem $(r > d^2)$; *a)*

„ $r = d^2$ „ lemniskatą (d); $\beta)$

„ $r < d^2$ „ parą owalów $(r < d^2)$. $\gamma)$

Gdy $r = 0$, $d^2 > 0$, mamy parę punktów $(x = +d, \ y = 0)$, $(x = -d, \ y = 0)$; przy $r > 0$ i $d = 0$ koło, które w razie $r = 0$ zamienia się na punkt.

Zauważmy przy danem d lemniskatę (d), określoną równaniem (1) i owal $(r' > d'^2)$ o tych samych osiach; załóżmy

$$r' > d'^2 > d^2 \tag{3}$$

i zapytajmy, jak względem siebie leżą te dwie krzywe?