Ilości $\varphi(h)$ i $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(a_\varkappa + h)$ są liczbami całkowitemi; $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(a_\varkappa + h)$ posiada czynnik p; $C\varphi(h)$ nie ma go. Jeżeli p rośnie, moduły funkcyj φ i ψ maleją nieograniczenie. Wzór (7) jest niemożliwy, a więc π jest liczbą przestępną.

Erlangen, w maju 1893.

O ODWZOROWANIU CIĄGŁEM LINII NA KAWAŁKU POWIERZCHNI. *)

PODAŁ

D. HILBERT.

Niedawno pokazał Peano [2]) za pomocą rozważania arytmetycznego, jak punkty linii można odwzorować w sposób ciągły w punktach kawałka powierzchni. Funkcye potrzebne do takiego odwzorowania dają się przedstawić w sposób widoczny, jeżeli użyjemy następującego geometrycznego uzmysłowienia. Linią, mającą być odwzorowaną, — niechaj nią będzie prosta o długości 1 — podzielmy najprzód na 4 równe części 1, 2, 3, 4, a kawałek powierzchni, któremu nadajemy postać kwadratu o boku równym 1, podzielmy za pomocą dwóch prostych wzajem prostopadłych na 4 równe kwadraty (Fig. 1). Podzielmy dalej każdy z odcinków 1, 2, 3, 4 znowu na 4 równe części, tak że otrzymamy na prostej 16 odcinków 1, 2, 3, ... 16; jednocześnie podzielmy każdy z czterech kwadratów 1, 2, 3, 4 na cztery kwadraty równe i w 16 kwadratów tak otrzymanych wpiszmy liczby 1, 2, ... 16, wybierając kolej kwadratów w ten sposób, aby każdy kwadrat następny jednym bokiem opierał się o poprzedzający (Fig. 2). Jeżeli postępować bę-

*[1]) Porówn. komunikat o tym samym przedmiocie w Rozprawach Towarzystwa niemieckich przyrodników i lekarzy, („Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte"), Brema, 1890.

*[2]) Artykuł ten, pomieszczony w 38 tomie dziennika „Mathematische Annalen", został nam łaskawie nadesłany przez autora do ogłoszenia w przekładzie w piśmie naszem. *S. D.*

[2]) Mathematische Annalen, t. 36, str. 157.

dziemy w ten sam sposób dalej — Fig. 3 uzmysławia krok następny — to widzieć łatwo, w jaki sposób każdemu danemu punktowi prostej można przyporządkować jeden oznaczony punkt kwadratu. Potrzeba tylko oznaczyć te z odcinków prostej, na których punkt dany przypada. Kwadraty, oznaczone temi samemi liczbami, leżą koniecznie jedne w drugich i zamykają w granicy oznaczony punkt powierzchni. Niechaj to będzie punkt przyporządkowany danemu punktowi. *Tak znalezione odwzorowanie jest jednoznacznem i ciągłem i odwrotnie każdemu punktowi kwadratu odpowiadają jeden, dwa lub cztery punkty linii.* Godnem uwagi jest przytem, że przez odpowiednią zmianę linij dzielących w kwadracie można znaleść *odwzorowanie jednoznaczne i ciągłe, którego odwrotność wszędzie co najwyżej jest trójznaczną.*

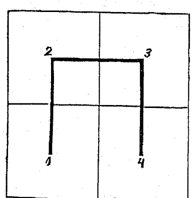

Fig. 1.

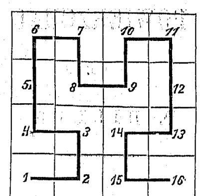

Fig. 2.

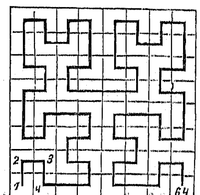

Fig. 3.

Znalezione wyżej funkcye odwzorowujące są zarazem prostemi przykładami funkcyj wszędzie ciągłych i nigdzie nie różniczkowalnych.

Mechaniczne znaczenie podanego odwzorowania jest takie: *Punkt może poruszać się ruchem ciągłym w ten sposób, że w czasie skończonym znajdzie się we wszystkich punktach kawałka powierzchni.* Można też — również przez zmianę odpowiednią linij dzielących w kwadracie — sprawić jednocześnie, że w *nieskończenie wielu zgęszczonych — wszędzie punktach kwadratu istnieje oznaczony kierunek ruchu tak naprzód jako też i wstecz.*

Co się tyczy przedstawienia analitycznego funkcyj odwzorowujących, to z ciągłości ich wynika wprost na podstawie twierdzenia ogólnego, dowiedzionego przez K. Weierstrassa [1]), że funkcye te dają się rozwinąć na szeregi nieskończone, postępujące według funkcyj całkowitych wymiernych i w całym przedziale zbieżne bezwzględnie i jednostajnie.

[1]) Porów. „Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin", 9 czerwca 1885.

O RÓWNANIU RUCHU DRGAJĄCEGO CIAŁ LOTNYCH JEDNORODNYCH.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

Znane są dobrze sposoby całkowania równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

w którem u oznacza zgęszczenie lub rozrzedzenie gazu, za pomocą całek oznaczonych. Stosując podobne całki między granicami $+\infty$ i $-\infty$, rozwiązano wiele trudnych i pięknych zadań z fizyki matematycznej. Mniemam jednak, że, mając całkę ogólną pod postacią skończonej sumy funkcyj dowolnych trzech argumentów, można będzie rozwiązywać zagadnienia trudniejsze, drogą znacznie prostszą, aniżeli przez stosowanie całek oznaczonych. Wskutek tego, postawiłem sobie za cel zadania odnalezienie drogi, za pomocą której daje się utworzyć całka ogólna pod postacią skończoną. W tym celu, nasamprzód używam metody własnej dla otrzymania całki *zupełnej* z czternastoma stałemi dowolnemi. Następnie przechodzę od tego wzoru do całki ogólniejszej z funkcyami dowolnemi pojedyńczych argumentów. Nakoniec dając kształt ogólny funkcyi dowolnej trzech argumentów liniowych, przy pomocy metody współczynników nieoznaczonych, nader prosto otrzymuję całkę *ogólną*. Tym sposobem cała trudność zagadnienia staje się zależną od rozwiązania pewnego układu równań algebraicznych.

Niech całka powyższego równania będzie jednocześnie całką równania o różniczkach zupełnych:

$$du = y_1\, dx + y_2\, dy + y_3\, dz + y_4\, dt, \tag{2}$$