jeżeli liczba p jest dostatecznie wielką. Lecz równanie (5) jest niemożliwe, ponieważ na jego stronie lewej mamy liczbę całkowitą niepodzielną przez p. Przypuszczenie, że liczba e czyni zadość równaniu postaci (3), prowadzi tedy do sprzeczności, jest więc niemożliwe; innemi słowy: liczba e jest przestępną *).

Zürich, 18 stycznia 1893.

---

*1) P. Gordan podał niedawno modyfikacyą powyższego dowodu, w której korzysta tylko z rozwinięcia funkcyi e^x na szereg. (Comptes Rendus, Nr 18, r. 1893).

*2) Patrz artykuł następny. (*S. D.*).

PRZESTĘPNOŚĆ LICZB e i π.

PODAŁ

P. GORDAN [1]).

Hermite dowiódł przestępności liczby e, Lindemann przestępności liczby π, t. j. pokazali, że nie istnieje żadna funkcya całkowita o współczynnikach całkowitych, mająca za pierwiastki liczbę e lub π.

Obecnie Hilbert i Hurwitz podali uproszczenie dowodu, skutkiem czego przedstawia się on w ten sposób.

Funkcyę e^x określmy za pomocą szeregu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots,$$

wprowadźmy oznaczenie symboliczne

$$r! = h^r,$$

i pomnóżmy obie strony przez tę ilość i przez stałą dowolną c_r; będzie

$$c\ h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r u_r, \tag{1}$$

---

1) Podajemy z upoważnienia prof. Gordana przekład tej pracy, ogłoszonej w „Mathematische Annalen“ tom 43, str. 222—224. *S. D.*

gdzie

$$u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+1 \, . \, r+2} + \ldots\ldots$$

Jeżeli

$$\xi = \text{mod. } x \,,$$

to

$$\text{mod. } u_r < e^{\xi} \,;$$

kładąc

$$u_r = q_r \, e^{\xi} \,,$$

mieć będziemy

$$\text{mod. } q_r < 1 \,.$$

Z wzoru (1) wynikają następujące:

$$c_r \, h^r \, e^x = c_r \, (x+h)^r + c_r \, x^r \, q_r \, e^{\xi} \,,$$

$$e^x \sum_{r=0}^{r=s} c_r \, h^r = \sum_{r=0}^{r=s} c_r \, (x+h)^r + e^{\xi} \sum_{r=0}^{r=s} c_r \, q_r \, x^r \,;$$

kładąc

$$\sum_{r=0}^{r=s} c_r \, x^r = \varphi(x) \,, \quad \sum_{r=0}^{r=s} c_r \, q_r \, x^r = \psi(x) \,,$$

otrzymamy

$$e^x \, \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^{\xi} \, \psi(x) \,. \tag{2}$$

Gdyby istniało równanie o współczynnikach całkowitych

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa \, e^\varkappa = 0 \,,$$

to z wzoru (2) mielibyśmy

$$0 = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa \, \varphi(\varkappa + h) + \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa \, \psi(\varkappa) \, e^\varkappa \,. \tag{3}$$

Jeżeli na φ wybierzemy funkcyą

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \, (1-x \, . \, 2-x \ldots\ldots n-x)^p_{\mathbf{s}} \,,$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, większą od liczb n i C_0, to ilości $\varphi(h+\varkappa)$ będą liczbami całkowitemi. Liczby $\varphi(h+1)$, $\varphi(h+2) \ldots \varphi(h+n)$ mają czynnik p, liczba $C_0 \, \varphi(h)$ nie ma go; jeżeli p rośnie, φ i ψ stają się dowolnie małemi, wzór (3) jest niemożliwym, liczba e jest więc przestępną.

Gdyby liczba $i\pi$ była pierwiastkiem równania o współczynnikach całkowitych:

$$c \, (x-w_1) \, (x-w_2) \ldots (x-w_\varrho) = 0 \tag{4}$$

to byłoby

$$(1+e^{w_1}) \, (1+e^{w_2}) \ldots (1+e^{w_\varrho}) = 0 \,. \tag{5}$$

Niechaj pomiędzy sumami

$$w_\varkappa \,, \; w_i + w_\varkappa \,, \;\; w_i + w_\varkappa + w_\lambda \,, \ldots\ldots$$

znajduje się $C-1$ ilości równych zeru; oznaczając pozostałe przez

$$\alpha_1 \,, \; \alpha_2 \,, \; \alpha_3 \,, \ldots \alpha_n \,,$$

a ich moduły przez

$$a_1 \,, \; a_2 \,, \; a_3 \ldots a_n \,,$$

znajdujemy z (5):

$$0 = C + \sum_{\varkappa=}^{\varkappa=n} e^{\alpha_\varkappa} \tag{6}$$

Funkcye symetryczne tak ilości $cw_\varkappa$ jak i ilości $c\alpha_\varkappa$ są liczbami całkowitemi.

Według (2) będzie tedy

$$0 = C \, \varphi(h) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(\alpha_\varkappa + h) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} e^{\alpha_\varkappa} \, \psi(\alpha_\varkappa) \tag{7}$$

Niechaj

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \, c^{np+p-1} \, (x-\alpha_1 \, . \, x-\alpha_2 \ldots x-\alpha_n)^p \,.$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, większą od każdej z liczb

$$C, \; n, \; c, \; c^n \, a_1 \, a_2 \ldots a_n \,.$$

Ilości $\varphi(h)$ i $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(a_\varkappa + h)$ są liczbami całkowitemi; $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(a_\varkappa + h)$ posiada czynnik p; $C\varphi(h)$ nie ma go. Jeżeli p rośnie, moduły funkcyj φ i ψ maleją nieograniczenie. Wzór (7) jest niemożliwy, a więc π jest liczbą przestępną.

Erlangen, w maju 1893.

O ODWZOROWANIU CIĄGŁEM LINII NA KAWAŁKU POWIERZCHNI. *)

PODAŁ

D. HILBERT.

Niedawno pokazał Peano [2]) za pomocą rozważania arytmetycznego, jak punkty linii można odwzorować w sposób ciągły w punktach kawałka powierzchni. Funkcye potrzebne do takiego odwzorowania dają się przedstawić w sposób widoczny, jeżeli użyjemy następującego geometrycznego uzmysłowienia. Linią, mającą być odwzorowaną, — niechaj nią będzie prosta o długości 1 — podzielmy najprzód na 4 równe części 1, 2, 3, 4, a kawałek powierzchni, któremu nadajemy postać kwadratu o boku równym 1, podzielmy za pomocą dwóch prostych wzajem prostopadłych na 4 równe kwadraty (Fig. 1). Podzielmy dalej każdy z odcinków 1, 2, 3, 4 znowu na 4 równe części, tak że otrzymamy na prostej 16 odcinków 1, 2, 3, ... 16; jednocześnie podzielmy każdy z czterech kwadratów 1, 2, 3, 4 na cztery kwadraty równe i w 16 kwadratów tak otrzymanych wpiszmy liczby 1, 2, ... 16, wybierając kolej kwadratów w ten sposób, aby każdy kwadrat następny jednym bokiem opierał się o poprzedzający (Fig. 2). Jeżeli postępować bę-

*1) Porówn. komunikat o tym samym przedmiocie w Rozprawach Towarzystwa niemieckich przyrodników i lekarzy, („Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte"), Brema, 1890.

*2) Artykuł ten, pomieszczony w 39 tomie dziennika „Mathematische Annalen", został nam łaskawie nadesłany przez autora do ogłoszenia w przekładzie w piśmie naszem. *S. D.*

[2]) Mathematische Annalen, t. 36, str. 157.