DOWÓD PRZESTĘPNOŚCI LICZBY e.

PODAŁ

A. HURWITZ [1]).

Listownej wiadomości p. Hilberta zawdzięczam poznanie podanego przezeń nadzwyczaj prostego dowodu przestępności liczby e.

Zauważyłem, że w dowodzie tym można uniknąć posługiwania się całkami, tak że dowód opierać się tylko będzie na pierwszych elementach rachunku różniczkowego. Pozwalam sobie przedstawić tu w krótkości tę modyfikacyą dowodu p. Hilberta [2]).

Niechaj $f(x)$ będzie funkcyą całkowitą wymierną stopnia r-go zmiennej x. Połóżmy dla skrócenia

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(r)}(x), \tag{1}$$

wtedy pochodną funkcyi $e^{-x} F(x)$ będzie $-e^{-x} f(x)$. Na podstawie znanego twierdzenia:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\,\varphi'(\vartheta x). \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

będzie tedy:

[1]) Podajemy z upoważnienia prof. Hurwitza przekład tej pracy ogłoszonej w Nr 4 „Göttinger Nachrichten", z r. 1893 a następnie przedrukowanej w dzienniku „Mathematische Annalen", t. 43, str. 220—221. *S. D.*

[2]) P. Hilbert, jak właśnie dowiaduję się od niego, miał zresztą w wykładzie swoim wskazać też, jak można w dowodzie uniknąć całek i zarazem różniczkowania, zastępując całki wartościami granicznemi. (*Przyp. autora*).

$$e^{-x} F(x) - F(0) = -x e^{-\vartheta x} f(\vartheta x),$$

lub

$$F(x) - e^{x} F(0) = -x e^{(1-\vartheta)x} f(\vartheta x). \qquad (0 < \vartheta < 1) \tag{2}$$

Przypuśćmy, że liczba e czyni zadość równaniu

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \ldots + C_n e^n = 0; \tag{3}$$

$C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ są liczbami całkowitemi, z których pierwsza, bez szkody dla ogólności, może być przyjęta jako różna od zera i dodatnia.

Stosuję równanie (2) do funkcyi

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \ldots (n-x)^p;$$

w której p jest liczbą pierwszą, większą od większej z dwóch liczb n i C_0. Kładąc kolejno $x = 1, 2, \ldots n$, otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned}
F(1) - e\, F(0) &= \varepsilon_1, \\
F(2) - e^2 F(0) &= \varepsilon_2, \\
&\;\;\vdots \\
F(n) - e^n F(0) &= \varepsilon_n,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

gdzie

$$\varepsilon_k = -k\, e^{(1-\vartheta)k} \cdot \frac{(\vartheta k)^{p-1} (1-\vartheta k)^p \ldots (n-\vartheta k)^p}{(p-1)!}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

przy rosnącem p, maleje nieograniczenie. Lecz według (1) otrzymujemy wartość funkcyi $F(k)$, rozwijając $f(k+h)$ podług potęg ilości h i zastępując potem potęgi $h, h^2, h^3 \ldots$ odpowiednio przez $1!, 2!, 3! \ldots$ Są więc ilości

$$F(1),\ F(2),\ \ldots\ F(n)$$

liczbami całkowitemi przez p podzielnemi, $F(0)$ zaś jest liczbą całkowitą przez p niepodzielną.

Z równań (4), przy uwzględnieniu równania (3), wynika:

$$C_1 F(1) + C_2 F(2) + \ldots + C_n F(n) = C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 + \ldots + C_n \varepsilon_n.$$

Ponieważ strona prawa przy rosnących wartościach liczby p nieograniczenie maleje, lewa zaś jest zawsze liczbą całkowitą, musi być zatem

$$C_1 F(1) + C_2 F(2) + \ldots + C_n F(n) + C_0 F(0) = 0, \tag{5}$$

jeżeli liczba p jest dostatecznie wielką. Lecz równanie (5) jest niemożliwe, ponieważ na jego stronie lewej mamy liczbę całkowitą niepodzielną przez p. Przypuszczenie, że liczba e czyni zadość równaniu postaci (3), prowadzi tedy do sprzeczności, jest więc niemożliwe; innemi słowy: liczba e jest przestępną *).

Zürich, 18 stycznia 1893.

*1) P. Gordan podał niedawno modyfikacyą powyższego dowodu, w której korzysta tylko z rozwinięcia funkcyi e^x na szereg. (Comptes Rendus, Nr 18, r. 1893).

*2) Patrz artykuł następny. (*S. D.*).

PRZESTĘPNOŚĆ LICZB e i π.

PODAŁ

P. GORDAN [1]).

Hermite dowiódł przestępności liczby e, Lindemann przestępności liczby π, t. j. pokazali, że nie istnieje żadna funkcya całkowita o współczynnikach całkowitych, mająca za pierwiastki liczbę e lub π.

Obecnie Hilbert i Hurwitz podali uproszczenie dowodu, skutkiem czego przedstawia się on w ten sposób.

Funkcyę e^x określmy za pomocą szeregu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots,$$

wprowadźmy oznaczenie symboliczne

$$r! = h^r,$$

i pomnóżmy obie strony przez tę ilość i przez stałą dowolną c_r; będzie

$$c\ h^r e^x = c_r\,(x+h)^r + c_r\,x^r\,u_r\,, \tag{1}$$

1) Podajemy z upoważnienia prof. Gordana przekład tej pracy, ogłoszonej w „Mathematische Annalen" tom 43, str. 222—224. *S. D.*