$$r = m = k = 3\,, \qquad s = n = l = 2\,.$$

Wykonanie tych wszystkich rachunków zbyt powiększyłoby objętość niniejszego artykułu i z tego powodu w dalsze szczegóły wchodzić nie będziemy [1]).

Płock, w styczniu 1894 roku.

---

[1]) Postaram się odeprzeć możliwy zarzut następujący. W wybranych przykładach potęga ilości p_i nie przewyższa 3-ej. Pytanie, czy będzie jednak możebnem podobne rozwiązanie, jeżeli wykładnik potęg przewyższy liczbę 4. Tak naprzykład:

$$F = Ap^5_1 + B\,p_1\,p_2 + Cp_2 + D = 0\,, \tag{a}$$

gdzie ilości p_1, p_2 oznaczają pochodne cząstkowe; A, B, C, D pewne stałe. Dajmy, że p_2 jest funkcyą wymierną zmiennych i że kształt jej obieramy w postaci wielomianu. Gdybyśmy zechcieli powyższe równanie rozwiązać względem ilości p_1, to wiadomem jest, że p_1 nie będzie już wcale funkcyą wymierną. Zarzut ten, pozornie słuszny, daje się łatwo obalić tak: Jedno równanie pomiędzy dwiema ilościami p_1, p_2 jest *nieoznaczone* i posiada nieskończenie wiele rozmaitych rozwiązań; można więc zawsze dla p_1 i p_2 wybrać takie funkcye wymierne, że równanie dane zamieni się na tożsamość. W tym celu dajmy

$$p_1 = \frac{M}{N}\,, \qquad p_2 = \frac{P}{Q}\,,$$

gdzie M jest wielomian algebraiczny stopnia m, N wielomian stopnia n, P stopnia p i Q stopnia q. Podstawiając powyższe wartości p_i w równanie (a), będziemy mieli

$$AM^5\,Q + BMN^4P + CN^5P + DN^5Q \equiv 0\,.$$

Dla stopni wielomianów mamy warunki:

$$m + q = n + p$$

i oprócz tego

$$5m + q = m + 4n + p = 5n + p = 5n + q\,. \tag{b}$$

Warunkom napisanym zawsze uczynić można zadość, przyjmując $m = n$, tudzież $p = q$, gdzie m i p są jakiekolwiek liczby całkowite.

Gdyby A, B, C, D były funkcye wymierne zmiennych, to i w tym przypadku sposób powyższego rozumowania pozostałby bez zmiany i tylko zamiast dwóch warunków z pomiędzy (b) moglibyśmy napisać dwie nierówności tak, jak postąpiliśmy w przykładzie II-im. (Przypisek autora).

UWAGA O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH RZĘDU 1-go.

(Z powodu artykułu p. Stodółkiewicza).

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

---

1. Według Lagrange'a zcałkować równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go:

$$F\,(z_1\; x_1\; x_2) \ldots x_n\,,\, p_1\; p_2 \ldots p_n) \tag{1}$$

gdzie z jest funkcyą zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots x_n$; $p_1, p_2 \ldots p_n$ są pochodnemi tej funkcyi względem każdej z tych zmiennych, znaczy: znaleźć taką funkcyą $\varphi\,(x_1\; x_2 \ldots x_n)$, która podstawiona w miejsce z w równanie (1), zamienia je na tożsamość.

Jacobi [1]) w następujący sposób sformułował to zagadnienie:

„Szukamy ilości $p_1, p_2 \ldots p_n$, jako takich funkcyj zmiennych, aby wyrażenie

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n \tag{2}$$ [2])

---

[1]) Jacobi, Vortesungen über Dynamik, 31-e Vorlesung, str. 238 i dalsze.

[2]) Jacobi zakłada, że w równaniu (1) nie zachodzi wyraźnie funkcya z; lecz wiadomo, że za pomocą łatwego przekształcenia każde równanie (1) do tej postaci sprowadzić można.

było różniczką zupełną. Ponieważ równanie (1) samo przedstawia już związek pomiędzy ilościami x i p, musimy więc znaleźć jeszcze $n-1$ takich związków, aby można wszystkie $p_1, p_2 \ldots p_n$ wyrazić przez $x_1, x_2, \ldots x_n$. Te funkcye winny zamienić (2) na różniczkę zupełną, a więc winny spełniać $\frac{n(n-1)}{2}$ warunków całkowalności

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}. \tag{3}$$

$$i = 1, 2 \ldots n; \quad k = 1, 2 \ldots n, \quad i \gtrless k.$$

Punkt widzenia p. Stodółkiewicza, zgadza się tedy w zupełności z określeniem Jacobi'ego. Niczem to bowiem istoty rzeczy nie zmienia, że p. S. funkcyom p_i nadaje odrazu formę wyraźną (funkcyj wymiernych), co, jak powiada Jacobi: „ist eine für die Rede stehende Untersuchung zu explicite Form“ [1]), i że przyjmuje nie $n-1$ lecz n równań na funkcye p_i, skutkiem czego równanie (1) za wynikające tożsamościowo z układu tych równań uważane być winno. Jako metoda całkowania sposób p. Stodółkiewicza, nie obcy, jak widzimy z powyższego, i Jacobi'emu, może być w wielu przypadkach użyteczny i prędko prowadzący do celu, jest jednak mniej ogólny i w wykonaniu, jak śmiemy sądzić, nie zawsze dogodny.

2. Lecz niezależnie od wskazania samego sposobu całkowania, p. Stodółkiewicz wypowiada jeszcze twierdzenie, że całka zupełna równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go może zawierać zupełnie dowolną jakkolwiek wielką liczbę parametrów czyli stałych dowolnych. Co do tego poglądu pozwolimy sobie zauważyć co następuje:

Czy utrzymamy określenie zadania całkowania takiem, jak je wypowiada Jacobi a w czem, jak widzieliśmy zawiera się zagadnienie p. Stodółkiewicza, czy też pojmiemy z Lie'm [2]) zagadnienie to ogólniej a mianowicie, jako oznaczenie wszystkich $(n+1)$ — częściowych układów:

$$F_1(z_1, x_1, x_2, \ldots x_n;\ p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \ldots F_{n+1}(z_1, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

czyniących zadość równaniu Pfaffa:

$$dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 \ldots p_n\, dx_n = 0$$

[1]) Jacobi l. c., str. 239.

[2]) Lie, Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnift, str. 87.

i obejmujących równanie (1)“ zawsze w teoryi tej całką zupełną będzie funkcya φ zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$ i n parametrów takich, że układ równań

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \ldots \frac{d\varphi}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

czyni zadość tożsamościowo równaniu (1) [1]).

Mogą wszakże, jak to zauważył już Jacobi [2]), zachodzić przypadki, w których funkcya φ jest postaci:

$$\varphi(z, x_1, x_2, \ldots x_n, a_1\, a_2 \ldots a_n, a_{n+1} \ldots a_{n+1})$$

t. j. zawiera więcej niż n stałych dowolnych i układ (4) czyni zadość tożsamościowo równaniu (1). Jeżeli zachowamy dla funkcyi φ i w tych przypadkach nazwę całki zupełnej, powiemy, że całka zupełna równania (1), oprócz n stałych „istotnych“, zawiera jeszcze s stałych *dodatkowych* (überzählige Constanten, constantes supplémentaires).

Między innemi, przypadek taki ma miejsce wtedy, gdy w równaniu (1) nie zachodzi funkcya zależna z lub którakolwiek ze zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots x_n$; wtedy stałe dodatkowe wprost dodają się w całce do zmiennych, które w równaniu nie zachodzą. Taką np. jest stała a_0, dodana do z w przykładzie pierwszym p. Stodółkiewicza; takiemi są stałe $b_1, b_2 \ldots b_n$ w całce zupełnej

$$z = b + a_1(x_1 + b_1) + a_2(x_2 + b_2) + \ldots + a_n(x_n + b_n)$$

równania

$$f(p_1, p_2, \ldots p_n) = 0,$$

gdzie stałe $a_1, a_2 \ldots a_n$ czynią zadość równaniu $f(a_1, a_2 \ldots a_n) = 0$. Zauważymy nadto, że przykład pierwszy p. Stodółkiewicza ma tę własność, iż równaniu czyni zadość całka

$$z = \psi(x-y) + A \log \varphi(x+y) - \frac{2}{A} \log z$$

[1]) Wprowadzając parametry odrazu do określenia całki, można powiedzieć: „Zcałkować równanie (1) znaczy określić ilości $z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n$ jako funkcye n *istotnych* parametrów $a_1, a_2 \ldots a_n$, aby tak równanie (1) jak i równania

$$\frac{\partial z}{\partial a_k} = \sum_{l=1}^{l=n} p_l \frac{\partial x_l}{\partial a_k} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

były tożsamościowo spełnione. (Porówn. Schur „Ueber partielle Differential — gleichungen 1-e Ordnung, Leipz. Ber. 1894, I str. 39.) Dodamy jeszcze, że właśnie w znalezieniu całki zupełnej o n parametrach tkwi, jak wiadomo, główny interes zadania o całkowaniu równań różniczkowych.

[2]) Jacobi l. c. str. 382 i dal.

gdzie A jest stałą dowolną, ψ zaś funkcyą dowolną. Biorąc za ψ wielomian jakiegokolwiek stopnia, możemy wprowadzić do całki ilekolwiek stałych dowolnych.

Możemy wreszcie wprowadzić większą liczbę stałych dowolnych, wychodząc z całki *ogólnej*. Tak np. równanie

$$z = px + qy$$

ma całkę zupełną

$$z = ax + by$$

z *dwiema* stałemi dowolnemi. Jego całkę ogólną znajdziemy, rugując a z równań

$$z = ax + \psi(a)\, y\,; \quad 0 = x + \psi'(a)\, y\,,$$

gdzie ψ jest funkcyą dowolną. Kładąc np.

$$\psi(a) = ka^2 + ma + n\,,$$

otrzymujemy całkę

$$z = y\left\{\frac{1}{4k}\left(\frac{x}{y} - m\right)^2 - n\right\}$$

z *trzema* stałemi dowolnemi k, m, n.

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI PRACOWNI FIZYCZNEJ MUZEUM PRZEMYSŁU I ROLNICTWA W WARSZAWIE.

Za rok 1893.

PODAŁ

J. J. BOGUSKI.

W roku sprawozdawczym inwentarz Pracowni, pomimo dość znacznej sumy wydanej na potrzeby bieżące (112 rs. 18 kop.), został powiększony o jeden tylko przyrząd, a mianowicie liczebnik obrotów, nabyty głównie w celu przeprowadzania ćwiczeń z praktykantami cukrowniczymi.

Zajęcia, równie jak i lat ubiegłych, polegały na sprawdzaniu przyrządów naukowo-technicznych; sprawdzano przeważnie termometry lekarskie (Chwastkiewicz, Berent i Plewiński, Dr Dobrski i wi.) oraz kolby i naczynia do analizy miareczkowej (Chwastkiewicz, Berent i Plewiński) oraz dwa pyrometry, jeden Le-Chatelier, drugi Siemensa (wyrobu Hartmanna i Brauna we Frankfurcie nad Menem).

Kształcąca działalność Pracowni polegała na wykonywaniu ćwiczeń praktycznych w pomiarach fizycznych, mających zastosowanie w cukrownictwie. Pod tym względem z usług Pracowni korzystały następujące osoby:

1. Aleksander Miecznikowski z fabryki cukru „Leonów“.
2. Ludwik Łubieński z fabryki cukru „Zbiersk“.
3. Mieczysław Szaniawski z fabryki cukru „Guzów“.