Mamy:

$$\gamma_\mu\, Fx^{fx} = \frac{\Delta^\mu f(x+\mu\xi)\,.\log F(x+\mu\xi)}{fx\,.\log Fx}.$$

Wprowadźmy tu za różnicę $\Delta^\mu f(x+\mu\xi)$ jej wyrażenie, obliczone według wzoru (3), a zamiast $\log F(x+\mu\xi)$ stopnie według określenia; to doprowadzi z łatwością do wzoru (3). Wzór (3′) otrzymuje w podobny sposób, zastępując różnicę Δ^μ przez d^μ i zamiast logarytmu wprowadzając stopnie nieskończenie małe.

Warszawa, w maju 1894.

O CAŁKOWANIU ROWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH OGÓLNYCH RZĘDU 1-go.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

W pracy niniejszej zamierzam wyłożyć nowy sposób całkowania równań różniczkowych cząstkowych ogólnych, w których pochodne cząstkowe związane są tak pomiędzy sobą, jak i ze wszystkiemi zmiennemi, grupą działań wymiernych. Takiego kształtu równania różniczkowe mają najważniejsze zastosowania w zagadnieniach fizyki i mechaniki. Sposób mój przedstawia tę dogodność, że wymaga zawsze tylko jednej kwadratury. Oprócz tego metoda całkowania, poniżej wyłożona, wykazuje jeszcze tę własność całek zupełnych równań różniczkowych cząstkowych [1]), że liczba stałych dowolnych może być zawsze, według upodobania, powiększaną, co, jak mi się zdaje, nie jest objęte, ani przewidywane w teoryach Lagrange'a i Jacobi'ego [2]). Własność wzmiankowaną niejednokrotnie spostrzegałem przy całkowaniu pewnych równań różniczkowych cząstkowych rzędu 2-go, i to naprowadziło mnie na myśl, że własność podobna musi być wspólną dla wszystkich równań różniczkowych cząstkowych.

Kształt ogólny równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1-go można napisać tak:

---

[1]) Całką nazywamy taką funkcyą n zmiennych niezależnych i n, lub więcej, stałych dowolnych, która zamienia dane równanie różniczkowe na *tożsamość*. (Przyp. autora).

[2]) Porówn. artykuł następny (Red.).

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmienne niezależne, a x oznacza zmienną zależną. Wiemy, że różniczką zupełną jest

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial x_n} dx_n; \tag{2}$$

jeżeli zaś przyjmiemy używane zwykłe oznaczenia:

$$\frac{\partial x}{\partial x_i} = p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

natenczas będziemy mieli z (2):

$$dx = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n, \tag{3}$$

oraz z równania (1)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \tag{4}$$

Równanie (3) powinno być koniecznie dokładne, czyli współczynniki p^i muszą czynić zadość warunkom

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Zajmiemy się tu takim przypadkiem, gdy w równaniu (4) symbol F wyobraża tylko funkcyą wymierną wszystkich ilości x_i, p_i. Zagadnienie nasze wypowiemy tak:

Jeżeli w jakikolwiek bądź sposób znajdziemy n funkcyj ogólnych p_i, zamieniających na tożsamości równania (4) oraz wszystkie równania (5), natenczas, wykonywając kwadraturę równania dokładnego (3), otrzymamy całkę szukaną równania (1). Zagadnienie to można rozwiązać najrozmaitszemi sposobami.

Jest, według mego zdania, rzeczą godną wielkiej wagi to, że wszystkie funkcye p_i, czyniące zadość wyżej omówionym warunkom, można łatwo odnaleźć na drodze czysto algebraicznej, bez żadnych całkowań; jeżeli tylko, jak powiedzieliśmy wyżej, równanie (4) oprócz funkcyj wymiernych, albo wykładniczych, innych funkcyj wcale nie zawiera. Dowiedziemy najprzód twierdzenia, że układ równań (5) rozwiązuje się zawsze przez funkcye wymierne i wykładnicze z upodobaną liczbą stałych dowolnych. Aby tego dowieść, dajmy:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{a_{i,1} x_1^{\alpha_i} + a_{1,2} x_2^{\alpha_i} + \ldots + a_{i,n} x_n^{\alpha_i} + a_{i,n+1} x_1^{\alpha_i - 1} x_2 + a_{i,n+2} x_1^{\alpha_i - 1} x_3 + \ldots + a_{i,0}}{b_{i,1} x_1^{\beta_i} + b_{i,2} x_2^{\beta_i} + \ldots + b_{i,n} x_n^{\beta_i} + b_{i,n+1} x_1^{\beta_i - 1} x_2 + b_{i,n+2} x_1^{\beta_i - 1} x_3 + \ldots + b_{i,0}} \\ p_k &= \frac{a_{k,1} x_1^{\alpha_k} + a_{k,2} x_2^{\alpha_k} + \ldots + a_{k,n} x_n^{\alpha_k} + a_{k,n+1} x_1^{\alpha_k - 1} x_2 + a_{k,n+2} x_1^{\alpha_k - 1} x_3 + \ldots + a_{k,0}}{b_{k,1} x_1^{\beta_k} + b_{k,2} x_2^{\beta_k} + \ldots + b_{k,n} x_n^{\beta_k} + b_{k,n+1} x_1^{\beta_k - 1} x_2 + b_{k,n+2} x_1^{\beta_k - 1} x_3 + \ldots + b_{k,0}} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie ilości $a_{i,s}$, $b_{i,s}$, $a_{k,s}$, $b_{k,s}$ są stałe dowolne, a α_i, β_i, α_k, β_k są to najwyższe i dowolnie obrane potęgi, które będziemy nazywali *stopniami* wielomianów. Podstawiając powyższe wartości na p_i, p_k w równania (5) i mając na uwadze tylko najwyższe potęgi zmiennych, będziemy mieli:

$$\begin{aligned} &\frac{(b_{i,1} x_1^{\beta_i} + \ldots)(a_{i,k} \alpha_i x_k^{\alpha_i - 1} + \ldots) - (a_{i,1} x_1^{\alpha_i} + \ldots)(b_{i,k} \beta_i x_k^{\beta_i - 1} + \ldots)}{(b_{i,1} x_1^{\beta_i} + \ldots\ldots)^2} \\ = &\frac{(b_{k,1} x_1^{\beta_k} + \ldots)(a_{k,i} \alpha_k x_i^{\alpha_k - 1} + \ldots) - (a_{k,1} x_1^{\alpha_k} + \ldots)(b_{k,i} \beta_k x_i^{\beta_k - 1} + \ldots)}{(b_{k,1} x_1^{\beta_k} + \ldots\ldots)^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Jeżeli uwolnimy równania (7) od mianowników, natenczas zauważymy łatwo, że, aby po obu stronach znaku równości były wielomiany jednakowego stopnia, koniecznym jest warunek, aby sumy wykładników najwyższych potęg były pomiędzy sobą równe, to jest:

$$\beta_i + \alpha_i - 1 + 2\beta_k = \beta_k + \alpha_k - 1 + 2\beta_i,$$

czyli

$$\alpha_i + \beta_k = \alpha_k + \beta_i, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Uwolniwszy równania (7) od mianowników, po wykonaniu wskazanych mnożeń, przyrównywamy wzajemnie współczynniki przy wyrazach podobnych i tym sposobem zamieniamy z łatwością równania (7) na tożsamości. Oczywista, zamiast funkcyj wymiernych ułamkowych możemy także brać mniej ogólne funkcye całkowite z nieograniczoną liczbą stałych dowolnych.

Dla dowiedzenia tego, że układ równań (5) można rozwiązać także przez funkcye wykładnicze z upodobaną liczbą stałych dowolnych, dajmy

$$p_i = (b_{i,1} x_1^s + b_{i,2} x_2^s + \ldots + b_{i,n} x_n^s + b_{i,n+1} x_1^{s-1} x_2 + \ldots + b_{i,0})\, e^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{9}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $b_{i,k}$ są stałe dowolne, s oznacza najwyższą potęgę zmiennych. Wykładnik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest dla wszystkich funkcyj p_i jednakowy:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1^r + a_2 x_2^r + \ldots$$
$$\ldots + a_n x_n^r + a_{n+1} x_1^{r-1} x_2 + a_{n+2} x_1^{r-1} x_3 + \ldots + a_0 ;$$

ilości a są to pewne stałe dowolne.

Podstawiając wartości na p_i (9) w równania (5) i mając na uwadze tylko najwyższe potęgi zmiennych, będziemy mieli

$$\begin{aligned}&(b_{i,k} s x_k^{s-1} + \ldots)\, e^f + (b_{i,1} x_1^s + b_{i,2} x_2^s + \ldots)\,(a_k r x_k^{r-1} + \ldots)\, e^f \\ &= (b_{k,i}\, s x_i^{s-1} + \ldots)\, e^f + (b_{k,1} x_1^s + b_{k,2} x_2^s + \ldots)\,(a_i r x_i^{r-1} + \ldots)\, e^f.\end{aligned} \tag{10}$$

Po skróceniu ostatniego równania przez e^f i po wykonaniu wszystkich wskazanych mnożeń, zauważymy łatwo, że wielomiany po obu stronach znaku równości będą zawsze jednakowego stopnia. Następnie, przyrównywając współczynniki przy wyrazach podobnych, zamienimy wszystkie równania (10) na tożsamości.

Z tego, co dowiedliśmy powyżej, można wywnioskować, że sumy funkcyj wymiernych ułamkowych lub całkowitych, oraz funkcyj wykładniczych kształtu (9) mogą być podobnież rozwiązaniami układu (5). Wszelkie funkcye dowolne funkcyj wymiernych (6) lub wykładniczych (9) mogą być również rozwiązaniami układu (5).

Ponieważ warunki (8) przedstawiają nam n—1 równań nieoznaczonych, a liczba stałych dowolnych w funkcyach p_i jest według upodobania nieograniczoną, można więc będzie dobrać tak liczby α_i, β_i, α_k, β_k i stałe dowolne $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, że i równanie (4) zamieni się na tożsamość.

W tym celu, należy tylko wyrugować z równania (4) wszystkie funkcye p_i przy pomocy równań (6) lub (9) i po uwolnieniu od mianowników przyrównać do zera wszystkie współczynniki.

Postępowanie opisane objaśnimy na przykładach:

1) Niechaj będzie do całkowania równanie

$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{4}{(x+y)\, z} = 0. \tag{11}$$

Oznaczmy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = p_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = p_3,$$

natenczas będzie

$$du = p_1\, dx + p_2\, dy + p_3\, dz, \tag{12}$$

gdzie

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ x_1 = x,\ x_2 = y.\ x_3 = z). \tag{13}$$

Równanie (11) możemy napisać tak

$$z\,(x+y)\, p_3\, (p_1 + p_2) + 4 = 0. \tag{14}$$

Odnalezienie funkcyj p_1, p_2, p_3, zamieniających na tożsamości równania (13) i (14), jest rzeczą bardzo łatwą i może być wykonane najrozmaitszemi sposobami.

Najprościej będzie przyjąć

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6}{x+y}, \\ p_2 &= \frac{b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 xy + b_4 x + b_5 y + b_6}{x+y}, \\ p_3 &= \frac{1}{cz}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_6, b_1, b_2, \ldots, b_6, c$ są stałe dowolne.

Podstawiając wartości (15) w równanie (14), otrzymamy

$$(a_1+b_1)\, x^2 + (a_2+b_2)\, y^2 + (a_3+b_3)\, xy + (a_4+b_4)\, x + (a_5+b_5)\, y$$
$$+ a_6 + b_6 + 4c = 0.$$

Przyrównawszy do zera wszystkie współczynniki, będziemy mieli

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2, \quad b_3 = -a_3, \quad b_4 = -a_4, \quad b_5 = -a_5,$$
$$b_6 = -a_6 - 4c.$$

Uwzględniając te ostatnie związki, podstawiamy wartości (15) w równania (13) i łatwo otrzymujemy

$$\frac{(x+y)\,(2a_2\, y + a_3\, x + a_5) - (a_1\, x^2 + a_2\, y^2 + a_3\, xy + a_4\, x + a_5\, y + a_6)}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{(x+y)\,(-2a_1\, x - a_3\, y - a_4) + (a_1\, x^2 + a_2\, y^2 + a_3\, xy + a_4\, x + a_5\, y + a_6 + 4c)}{(x+y)^2}.$$

Jeżeli zaś porównamy współczynniki przy wyrazach podobnych ostatniego równania, otrzymamy:

$$a_2 = -a_1, \quad a_4 = a_5, \quad a_6 = -2c. \quad a_3 = 0.$$

Widzimy więc, że kształt funkcyj p_1, p_2, p_3 będzie taki

$$p_1 = \frac{a_1 (x^2-y^2) + a_4 (x+y) - 2c}{x+y}\,,$$

$$p_2 = \frac{-a_1 (x^2-y^2) - a_4 (x+y) - 2c}{x+y}\,.$$

$$p_3 = \frac{1}{cz}\,.$$

Wskutek tego, równanie (12) będzie miało kształt

$$du = \frac{a_1(x^2-y^2)+a_4(x+y)-2c}{x+y}\,dx - \frac{a_1(x^2-y^2)+a_4(x+y)+2c}{x+y}\,dy + \frac{1}{cz}\,dz\,.$$

Pozostaje nam tylko wykonać kwadraturę powyższego równania dokładnego. Po całkowaniu będziemy mieli

$$u+a_0 = \frac{1}{2}\,a_1\,(x-y)^2 + a_4\,(x-y) - 2c \log\,(x+y) + \frac{1}{c}\log z\,, \qquad (16)$$

gdzie a_0, a_1, a_4, c są stałe dowolne.

Liczba stałych dowolnych w całce zupełnej (16) może być według upodobania powiększoną, gdyż w wielomianach (15) przyjęliśmy dla ułatwienia rachunków prosty kształt ogólny funkcyj wymiernych 2-go stopnia. Można-by jednak było równie dobrze napisać wielomiany 3-go, 4-go lub jakiegokolwiek stopnia i tym sposobem stałych dowolnych wprowadzilibyśmy do całki zupełnej tyle, ile się podoba.

2) Niechaj będzie równanie

$$(x^3+y^3+z)\,\frac{\partial u}{\partial z} + (2z-y^2)\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + x\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 1 = 0\,.$$

Używając podobnych, jak poprzednio, oznaczeń, zamiast ostatniego równania będziemy mieli

$$(x^3+y^3+z)\,p_3 + (2z-y^2)\,p_1\,p_2 + x\,p_3^2 + 1 = 0\,. \qquad (17)$$

Przyjmujemy następnie:

$$p_1 = \frac{M}{N}\,, \qquad p_2 = \frac{K}{L}\,, \qquad p_3 = \frac{R}{S}\,,$$

gdzie M oznacza wogóle wielomian o trzech zmiennych, m-go stopnia, N — wielomian n-go stopnia, K — wielomian k-go stopnia i t. d. Podstawiwszy te wartości na p_i w równanie (17), po uwolnieniu od mianowników, otrzymamy

$$(x^3+y^3+z)\,RSNL + (2z-y^2)\,S^2MK + x\,R^2NL + S^2NL = 0\,. \qquad (18)$$

Dla liczb, wyobrażających stopnie wielomianów, mamy, na zasadzie (8), dwa warunki:

$$m+l = n+k\,, \qquad m+s = n+r\,. \qquad (19)$$

Oprócz tego, mając na uwadze równanie (18), stopnie wielomianów możemy poddać jeszcze warunkom dodatkowym

$$\left.\begin{array}{l} 3+r+s+n+l = 2+2s+m+k\,, \\ 1+2r+n+l > 2s+n+l\,, \quad 3+r+s+n+l > 1+2r+n+l\,. \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Po rozwiązaniu układu nieoznaczonego (19) (20) w liczbach całkowitych, między wieloma innemi odpowiedziami otrzymamy i takie

$$r = m = k = 2\,, \qquad s = n = l = 1\,.$$

Widzimy więc, że kształt wielomianów będzie następujący:

$$M = a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}\,,$$
$$N = b_1x+b_2y+b_3z+b_4\,,$$
$$K = c_1x^2+c_2y^2+c_3z^2+c_4xy+c_5xz+c_6yz+c_7x+c_8y+c_9z+c_{10}\,,$$
$$L = d_1x+d_2y+d_3z+d_4\,,$$
$$R = h_1x^2+h_2y^2+h_3z^2+h_4xy+h_5xz+h_6yz+h_7x+h_8y+h_9z+h_{10}\,,$$
$$S = k_1x+k_2y+k_3z+k_4\,.$$

Dalej, podstawiamy powyższe wartości wielomianów w równanie (18) i, przyrównywając do zera wszystkie współczynniki, otrzymamy pewną ilość równań dla samych stałych a, b, c, d, h, k. Dalsze związki pomiędzy stałemi wypłyną z porównania współczynników przy wyrazach podobnych równań (5).

Ze wszystkich tych równań należy odrzucić związki zbyteczne, wypływające w jakibądź sposób z pozostałych równań, które powinny być zupełnie między sobą niezależne.

Gdyby liczba stałych dowolnych a_i, b_i, c_i, d_i, h_i, k_i okazała się niewystarczającą, natenczas moglibyśmy podwyższyć stopnie wielomianów.

$$r = m = k = 3\,, \qquad s = n = l = 2\,.$$

Wykonanie tych wszystkich rachunków zbyt powiększyłoby objętość niniejszego artykułu i z tego powodu w dalsze szczegóły wchodzić nie będziemy [1]).

Płock, w styczniu 1894 roku.

---

[1]) Postaram się odeprzeć możliwy zarzut następujący. W wybranych przykładach potęga ilości p_i nie przewyższa 3-ej. Pytanie, czy będzie jednak możebnem podobne rozwiązanie, jeżeli wykładnik potęg przewyższy liczbę 4. Tak naprzykład:

$$F = Ap^5_1 + B\,p_1\,p_2 + Cp_2 + D = 0\,, \tag{a}$$

gdzie ilości p_1, p_2 oznaczają pochodne cząstkowe; A, B, C, D pewne stałe. Dajmy, że p_2 jest funkcyą wymierną zmiennych i że kształt jej obieramy w postaci wielomianu. Gdybyśmy zechcieli powyższe równanie rozwiązać względem ilości p_1, to wiadomem jest, że p_1 nie będzie już wcale funkcyą wymierną. Zarzut ten, pozornie słuszny, daje się łatwo obalić tak: Jedno równanie pomiędzy dwiema ilościami p_1, p_2 jest *nieoznaczone* i posiada nieskończenie wiele rozmaitych rozwiązań; można więc zawsze dla p_1 i p_2 wybrać takie funkcye wymierne, że równanie dane zamieni się na tożsamość. W tym celu dajmy

$$p_1 = \frac{M}{N}\,, \qquad p_2 = \frac{P}{Q}\,,$$

gdzie M jest wielomian algebraiczny stopnia m, N wielomian stopnia n, P stopnia p i Q stopnia q. Podstawiając powyższe wartości p_i w równanie (a), będziemy mieli

$$AM^5\,Q + BMN^4P + CN^5P + DN^5Q \equiv 0\,.$$

Dla stopni wielomianów mamy warunki:

$$m + q = n + p$$

i oprócz tego

$$5m + q = m + 4n + p = 5n + p = 5n + q\,. \tag{b}$$

Warunkom napisanym zawsze uczynić można zadość, przyjmując $m = n$, tudzież $p = q$, gdzie m i p są jakiekolwiek liczby całkowite.

Gdyby A, B, C, D były funkcye wymierne zmiennych, to i w tym przypadku sposób powyższego rozumowania pozostałby bez zmiany i tylko zamiast dwóch warunków z pomiędzy (b) moglibyśmy napisać dwie nierówności tak, jak postąpiliśmy w przykładzie II-im. (Przypisek autora).

UWAGA O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH RZĘDU 1-go.

(Z powodu artykułu p. Stodółkiewicza).

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

1. Według Lagrange'a zcałkować równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go:

$$F\,(z_1\; x_1\; x_2)\,.\,.\,.\,x_n\,,\,p_1\,p_2\,.\,.\,.\,p_n) \tag{1}$$

gdzie z jest funkcyą zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots x_n$; $p_1, p_2 \ldots p_n$ są pochodnemi tej funkcyi względem każdej z tych zmiennych, znaczy: znaleźć taką funkcyą $\varphi\,(x_1\; x_2 \ldots x_n)$, która podstawiona w miejsce z w równanie (1), zamienia je na tożsamość.

Jacobi [1]) w następujący sposób sformułował to zagadnienie:

„Szukamy ilości $p_1, p_2 \ldots p_n$, jako takich funkcyj zmiennych, aby wyrażenie

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n \tag{2}$$ [2])

---

[1]) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 31-e Vorlesung, str. 238 i dalsze.

[2]) Jacobi zakłada, że w równaniu (1) nie zachodzi wyraźnie funkcya z; lecz wiadomo, że za pomocą łatwego przekształcenia każde równanie (1) do tej postaci sprowadzić można.