Rozwiązawszy te równania, znajdziemy $g_m \varphi x$ w funkcyi różniczek wykładniczych $e^{\varphi x}$ różnych rzędów:

$$g_m \varphi x = \frac{1}{\log \varphi x} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 0, & \dots\dots\dots\dots & , 0, & g e^{\varphi x} \\ g e^{\varphi x}, & 1, & \dots\dots\dots\dots & , 0, & g_2 e^{\varphi x} \\ g_2 e^{\varphi x}, & 2 g e^{\varphi x}, & \dots\dots\dots\dots & , 0, & g_3 e^{\varphi x} \\ \vdots & & & & \\ g_{m-1} e^{\varphi x}, & \frac{m-1}{1} g_{m-2} e^{\varphi x}, & \dots, & \frac{m-1}{1} g e^{\varphi x}, & g_m e^{\varphi x} \end{vmatrix} \qquad (21)$$

Weźmy teraz $g_\mu (e^{Fx+fx})$; na mocy (10) otrzymujemy

$$g_m (e^{Fx+fx}) = \frac{1}{Fx+fx} (d^m Fx + d^m fx) = \frac{Fx \,.\, g_m e^{Fx} + fx\, g_m e^{fx}}{Fx+fx} \qquad (22)$$

dostatecznie więc w (21) założyć $\varphi x = Fx + fx$, a potem w wyznaczniku po prawej stronie tego wzoru podstawić wyrażenia z (22), by otrzymać $g_m (Fx+fx)$ w funkcyi różnego rzędu różniczek wykładniczych funkcyj e^{Fx} i e^{fx}. Zamiast ge^{Fx} i ge^{fx} różnych rzędów możemy potem podstawić ich wyrażenia za pomocą różnych rzędów gFx i gfx i otrzymać ostateczny wzór na $g_m (Fx+fx)$, którego tu nie pomieszczam, ponieważ jest nader złożony. Całą teoryą różnic i różniczek wykładniczych wyprowadził Wroński à priori, na mocy badań filozoficznych nad różnymi niezbędnemi gałęziami algorytmii. Czy teorya ta będzie kiedykolwiek w matematyce stosowana, przesądzać trudno, z powodu jej blizkiego związku z rachunkiem różniczkowym. Co prawda, autor jej twierdzi, że dwie te teorye istnieją niezależnie jedna od drugiej; nie jestem jednak pewny, czy możnaby wszystkie powyżej podane wzory wyprowadzić bez pomocy rachunku różniczkowego.

Pozostaje jeszcze zbadać różnice i różniczki wykładnicze o skaźniku odjemnym, które odpowiadają całkom w rachunku różniczkowym; postaram się je rozpatrzyć w artykule późniejszym.

Z WROŃSKIEGO TEORYI STOPNI SKOŃCZONYCH I NIESKOŃCZENIE MAŁYCH.

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

1. Zasady teoryi *stopni skończonych i nieskończenie małych*, (grades et gradules) [1]) podał Wroński w dziele swem „Introduction à la philosophie des mathématiques et technie d'algorithmie" [2]), skąd ją Montferrier bez zmiany prawie, tylko w skróceniu, wniósł do swojej „Encyklopedyi" [3]). Teorya ta pozostała dotąd bez zastosowań. Próba Wrońskiego zastosowania jej do odkrycia formy ogólnej pierwiastków równania algebraicznego nie może być uważana za doskonałą [4]). W rękopisach po Wrońskim znalazłem notatki, z których okazuje się, że pomysł swój stosował do badań

[1]) Wprowadzamy tymczasowo tę nazwę w miejsce nazwy „różnic i różniczek wykładniczych" użytej przez p. Krauzego; mimo, że wyraz stopień ma i inne znaczenie, sądzimy, że nie da to powodu do dwuznaczności.

[2]) Rok 1811, str. 48—61, 82—90.

[3]) Encyclopédie mathématique, T. III, p. 96—103.

[4]) Introduction p 82—90. Za pomocą rachunku stopni, zastosowanego do wyrażenia

$$X = (a_1+x)(a_2+x)\dots(a_n+x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_\omega x^\omega,$$

stara się Wroński wykazać, że pierwiastki równania $X=0$ są zawsze postaci

$$a = \psi\left\{\sqrt[\lambda]{\;}\left(\sqrt[\varkappa]{\;}\dots\left(\sqrt[\alpha]{A} + B\right) + C\right)\dots\right\}$$

gdzie $A, B, C\dots$ są funkcye współczynników równania, ψ zaś jest znakiem funkcyi, złożonej z wartości różnych, jakie przybierać może jej argument.

z teoryi liczb, oraz, że teoryą stopni, traktowaną w książce tylko w przypadku funkcyj jednej zmiennej niezależnej, starał się rozszerzyć i do funkcyj wielu zmiennych. Z notatek tych wszakże dotąd nie zdołałem jeszcze urobić sobie dostatecznie jasnego na te uogólnienia i zastosowania poglądu.

Mimo, że teorya stopni, przedstawiona we wspomnianem dziele, nie znalazła, jak powiedziano, zastosowania, sądzimy jednak, że nie jest pozbawiona interesu teoretycznego, tak ze względu na samą genezę nowego pojęcia, oraz stanowisko jego wśród innych pojęć matematycznych, jako też ze względu na ciekawą analogią, jaką wzory rachunku stopni przedstawiają z wzorami rachunku różniczkowego i różnicowego.

2. Z poprzedzającego artykułu p. Krauzego można powziąć wyobrażenie o zasadach teoryi Wrońskiego; w notatce niniejszej podajemy tylko dopełnienia, oparte na przedstawieniu samego Wrońskiego. Powiemy więc najprzód, że wychodząc z zasad swojej architektoniki matematycznej, wywnioskował on, iż obok algorytmu różnic i różniczek, w którym widział — używamy tu terminologii samego Wrońskiego — wpływ cząstkowy sumowania (dodawania i odejmowania) w stopniowaniu (potęgowaniu i pierwiastkowaniu), istnieć musi algorytm nowy, wynikający z wpływu cząstkowego odwrotnego, t. j. wpływu stopniowania w sumowaniu. Niezupełnie jasne te dla czytelnika, nieobznajmionego z językiem filozoficznym Wrońskiego, wyrażenia tłomaczy dopiero określenie stopni skończonych i nieskończenie małych. Stopnie skończone (grades) zachodzą wtedy, gdy kolejne wartości zmiennej otrzymuje się za pomocą stopniowych przyrostów jej wykładnika; stopnie nieskończenie małe (gradules) wtedy, gdy te stopniowe wykładniki są nieskończenie małe. Odpowiednio do tego istnieją dwa nowe rachunki: rachunek stopni skończonych (calcul des grades) i rachunek stopni nieskończenie małych (calcul des gradules). Każdy z nich, podobnie jak rachunek różniczkowy i rachunek różnic, dzieli się na gałęzie: rachunek stopni oznaczonych — prosty i odwrotny (odpowiadający rachunkowi różniczkowemu i całkowemu), oraz rachunek stopni nieoznaczonych (odpowiadający rachunkowi waryacyjnemu).

Po podaniu określeń, przystępuje Wroński do wywodu wzorów zasadniczych, przedstawiających stopnie rzędów wyższych skończone i nieskończenie małe funkcyj:

$$F(x)+f(x)\,, \quad F(x)-f(x)\,, \quad F(x)^{f(x)}$$

przez stopnie funkcyj $F(x)$ i $f(x)$. Z tych tylko wzór trzeci powtórzony został przez Montferriera.

Wzory te mają postaci takie:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu(Fx+fx) = \frac{1}{\log(Fx+fx)}\, d^{-1} \Big\{ & d\,(Fx\,.\,\gamma_\mu e^{Fx} + fx\,.\,\gamma_\mu e^{f(x)}) \\ & .\,\Delta^0\,(F(x+\mu\xi)+f(x+\mu\xi))^{-1} \\ & + \frac{\mu}{1}\, d\,(Fx\,\gamma_{\mu-1} e^{Fx} + fx\,.\,\gamma_{\mu-1} e^{fx})\,.\,\Delta^1(F(x+\mu\xi)+f(x+\mu\xi))^{-1} \\ & + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu-1}{2}\, d\,(Fx\,.\,\gamma_{\mu-2} e^{Fx} + fx\,.\,\gamma_{\mu-2} e^{fx})\,.\,\Delta^2(F(x+\mu\xi)+f(x+\mu\xi))^{-1} \\ & + \cdots\cdots\cdots \Big\}; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}g_\mu(Fx+fx) = \frac{\Omega}{\log(Fx+fx)} \Big\{ & g_0\, e^{\Omega}\,.\,(Fx\,.\,g_\mu e^{Fx} + fx\,.\,g_\mu e^{fx}) \\ & + \frac{\mu-1}{1}\, g_1\, e^{\Omega}(Fx\,.\,g_{\mu-1} e^{Fx} + fx\,.\,g_{\mu-1} e^{fx}) \\ & + \frac{\mu-1}{1}\cdot\frac{\mu-2}{2}\,.\,g_2\, e^{\Omega}(Fx\,.\,g_{\mu-2} e^{Fx} + fx\,.\,g_{\mu-2} e^{fx}) \\ & + \cdots\cdots\cdots \Big\}; \end{aligned} \tag{1'}$$

$$\gamma_\mu(Fx\,.\,fx) = \frac{\log Fx\,.\,\gamma_\mu Fx + \log fx\,.\,\gamma_\mu fx}{\log(Fx\,.\,fx)}\,; \tag{2}$$

$$g_\mu(Fx\,.\,fx) = \frac{\log Fx\,.\,g_\mu Fx + \log fx\,.\,g_\mu fx}{\log(Fx\,.\,fx)}\,; \tag{2'}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\mu Fx^{fx} = \frac{1}{fx}\cdot \Big\{ & f(x+\mu\xi)\,.\,\gamma_0\, e^{f(x+\mu\xi)}\,.\,\gamma_\mu Fx \\ & + \frac{\mu}{1} f(x+(\mu-1)\xi)\,\gamma_1\, e^{f(x+(\mu-1)\xi)}\,.\,\gamma_{\mu-1} Fx \\ & + \frac{\mu}{1}\,\frac{\mu-1}{2}\,.\,f(x+(\mu-2)\xi)\,.\,\gamma_2\, e^{f(x+(\mu-2)\xi)}\,.\,\gamma_{\mu-2} Fx \\ & + \cdots\cdots\cdots \Big\}; \end{aligned} \tag{3}$$

$$g_\mu \, Fx^{fx} = g_0 \, e^{fx} \cdot g_\mu \, Fx + \frac{\mu}{1} g_1 \, e^{fx} \cdot g_{\mu-1} \, Fx$$

$$+ \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \cdot g_2 \, e^{fx} \cdot g_{\mu-2} \, Fx + \ldots\ldots \tag{3'}$$

We wzorze (1') Ω oznacza $(Fx+fx)^{-1}$, we wzorach (1), (1'), (2) i (2') ξ oznacza różnicę Δx [1]).

3. Dowód wzorów powyższych opiera się na związkach:

$$\Delta^\mu \, \psi(x) = \psi(x-\mu\,\xi) \, \gamma_\mu \, e^{\psi(x-\mu\xi)},$$

$$d^\mu \, \psi(x) = \psi(x) \, g_\mu \, e^{\psi(x)}, \tag{a}$$

wynikających z określenia stopni, oraz na następujących znanych wzorach rachunku różnic:

$$\Delta^\mu (Fx \, fx) = Fx \, \Delta^\mu fx + \frac{\mu}{1} \Delta \, Fx \, . \, \Delta^{\mu-1} f(x-\xi)$$

$$+ \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \Delta^2 \, Fx \, \Delta^{\mu-2} f(x-2\xi) \tag{b}$$

$$+ \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \cdot \frac{\mu-2}{3} \Delta^3 \, Fx \, . \, \Delta^{\mu-3} f(x-3\xi) \, .$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$\Delta_\xi^\nu (\Delta_\zeta^\mu \, \varphi \, x) = \Delta_\zeta^\mu (\Delta_\xi^\nu \, \varphi x) \tag{c}$$

gdzie ζ i ξ są przyrosty równe lub różne zmiennej x, zaś μ i ν są liczby całkowite dodatnie lub ujemne (w tym ostatnim przypadku różnica oznacza sumę).

Z określenia

$$\gamma_\mu \, \varphi x = \frac{\Delta^\mu \log \varphi(x+\mu\xi)}{\log \varphi(x)}$$

wynika bezpośrednio:

[1]) Dodajemy tą uwagę ogólną, że teorya Wrońskiego podaje formę stopni skończonych i nieskończenie małych, pozostawiając nietkniętem pytanie, czy i o ile funkcye badane nadają się do poddania ich działaniom, wyrażonym przez te algorytmy. Pytanie to wymagałoby oddzielnego badania, w które obecnie nie wchodzimy

$$\gamma_\mu (Fx+fx) = \frac{\Delta^\mu \log \{F(x+\mu\xi) + f(x+\mu\xi)\}}{\log (Fx+fx)}$$

$$= \frac{\Delta^\mu \log (F_\mu + f_\mu)}{\log (F_0 + f_0)}, \tag{4}$$

gdzie F_ω i f_ω oznaczają w skróceniu: $F(x+\omega\xi)$, $f(x+\omega\xi)$. Lecz

$$\Delta^\mu \log (F_\mu + f_\mu) = \Delta^\mu \int \frac{dF_\mu + df_\mu}{F_\mu + f_\mu} = \Delta^\mu \, d^{-1} \, \Omega_\mu \, (dF_\mu + df_\mu),$$

gdzie $\Omega_\mu = (F_\mu + f_\mu)^{-1}$, znak zaś d^{-1} oznacza całkę. Na podstawie wzoru (c) jest tedy

$$\Delta^\mu \log (F_\mu + f_\mu) = d^{-1} \, \Delta^\mu \, \Omega_\mu \, (dF_\mu + df_\mu) \, ;$$

stosując tu do strony drugiej wzór (b), znajdziemy:

$$\Delta^\mu \log (F_\mu + f_\mu) = d^{-1} \Big\{ \Omega_\mu \, (d \, \Delta^\mu \, F_\mu + d \, \Delta^\mu \, f_\mu)$$

$$+ \frac{\mu}{1} \Delta \, \Omega_\mu \, (d \, \Delta^{\mu-1} \, F_{\mu-1} + d \, F^{\mu-1} \, f_{\mu-1})$$

$$+ \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu-1}{2} \Delta^2 \, \Omega_\mu \, (d \, \Delta^{\mu-2} \, F_{\mu-2} + d \, \Delta^{\mu-2} \, f_{\mu-2}) + \ldots \Big\} \, .$$

Podstawiając zamiast różnic Δ stopnie, na zasadzie wzoru (a) i wprowadziwszy otrzymane wyrażenie w równanie (4), dojdziemy do wzoru (1).

Przechodząc od stopni skończonych do stopni nieskończenie małych g_μ, będziemy mieli:

$$\Delta^\mu \log (F_\mu + f_\mu) = \frac{d^{\mu-1} \, \Omega \, . \, (dFx + dfx)}{\log (Fx + fx)},$$

gdzie $\Omega = (Fx+fx)^{-1}$; stosując do tego przypadku to samo postępowanie, co wyżej, i opierając się na określeniu

$$g_\mu \, \varphi x = \frac{d^\mu \log \varphi x}{\log \varphi x},$$

otrzymamy z łatwością wzór (1').

Wzory (2) i (2') wynikają bezpośrednio z określeń.

Wzory (3) i (3') otrzymuje się w sposób następujący:

Mamy:

$$\gamma_\mu \, Fx^{fx} = \frac{\Delta^\mu f(x+\mu\xi) \, . \, \log F(x+\mu\xi)}{fx \, . \, \log Fx}.$$

Wprowadźmy tu za różnicę $\Delta^\mu f(x+\mu\xi)$ jej wyrażenie, obliczone według wzoru (3), a zamiast $\log F(x+\mu\xi)$ stopnie według określenia; to doprowadzi z łatwością do wzoru (3). Wzór (3') otrzymuje w podobny sposób, zastępując różnicę Δ^μ przez d^μ i zamiast logarytmu wprowadzając stopnie nieskończenie małe.

Warszawa, w maju 1894.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH OGÓLNYCH RZĘDU 1-go.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

W pracy niniejszej zamierzam wyłożyć nowy sposób całkowania równań różniczkowych cząstkowych ogólnych, w których pochodne cząstkowe związane są tak pomiędzy sobą, jak i ze wszystkiemi zmiennemi, grupą działań wymiernych. Takiego kształtu równania różniczkowe mają najważniejsze zastosowania w zagadnieniach fizyki i mechaniki. Sposób mój przedstawia tę dogodność, że wymaga zawsze tylko jednej kwadratury. Oprócz tego metoda całkowania, poniżej wyłożona, wykazuje jeszcze tę własność całek zupełnych równań różniczkowych cząstkowych [1]), że liczba stałych dowolnych może być zawsze, według upodobania, powiększaną, co, jak mi się zdaje, nie jest objęte, ani przewidywane w teoryach Lagrange'a i Jacobi'ego [2]). Własność wzmiankowaną niejednokrotnie spostrzegałem przy całkowaniu pewnych równań różniczkowych cząstkowych rzędu 2-go, i to naprowadziło mnie na myśl, że własność podobna musi być wspólną dla wszystkich równań różniczkowych cząstkowych.

Kształt ogólny równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1-go można napisać tak:

---

[1]) Całką nazywamy taką funkcyą n zmiennych niezależnych i n, lub więcej, stałych dowolnych, która zamienia dane równanie różniczkowe na *tożsamość*. (Przyp. autora).

[2]) Porówn. artykuł następny (Red.).