RÓŻNICE I RÓŻNICZKI WYKŁADNICZE.

PODAŁ

W. KRAUZE.

Przez różnice i różniczki wykładnicze pozwoliłem sobie przetłomaczyć wyrazy „les grades i les gradules“, [1]) wprowadzone przez H. Wrońskiego w jego „théorie des grades“. Rozumie Wroński przez nie przyrostki „jakie otrzymuje wykładnik funkcyi jednej zmiennej niezależnej, jeżeli wykładnikowi tej zmiennej niezależnej nadamy dowolny przyrostek. Tak np. gdy w funkcyi fx zamiast x podstawimy $x^{1+\gamma x}$, gdzie γx będzie właśnie takim przyrostkiem wykładniczym zmiennej niezależnej x, wtedy funkcyą przedstawić można w postaci $fx^{1+\gamma fx}$, gdzie γfx jest przyrostkiem funkcyi fx, odpowiadającym przyrostkowi γx. Te przyrostki γx i γfx są różnicami lub różniczkami wykładniczemi zależnie od tego, czy są skończonemi czy też nieskończenie małemi; w tym ostatnim wypadku oznacza je Wroński przez gx, gfx. Właściwie zarówno γx, γfx, jak i gx, gfx nie są bynajmniej przyrostkami samej zmiennej lub funkcyi, a tylko przyrostkami ich wykładnika; przyrostkami zmiennej oraz funkcyi będą rzeczywiście $x^{\gamma x}$, $fx^{\gamma fx}$, x^{gx}, fx^{gfx}.

Dla znalezienia różnic i różniczek wykładniczych różnych funkcyj, szuka Wroński związku między temi różnicami i różnicami zwykłemi. W tym celu zakłada

$$x^{1+\gamma x} = x + \Delta x \tag{1}$$

[1]) Porówn. artykuł następny.

wtedy

$$fx^{1+\gamma fx} = f(x+\Delta x),$$

skąd

$$fx^{\gamma fx} = \frac{f(x+\Delta\alpha)}{fx}.$$

Wziąwszy logarytm stron obu, otrzymuje:

$$\gamma fx = \frac{\log f(x+\Delta x) - \log fx}{\log fx}.$$

Wyrażenie $\log f(x+\Delta x) - \log fx$ będzie, według Wrońskiego, różnicą wsteczną („régressive“) $\log f\ (x+\Delta x)$, którą oznaczamy przez $\Delta \log f(x+\Delta x)$ i znajdujemy ostatecznie

$$\gamma fx = \frac{\Delta \log f(x+\Delta x)}{\log fx}. \tag{2}$$

Przechodząc do nieskończenie małych, będziemy mieli:

$$gfx = \frac{d \log fx}{\log fx}. \tag{3}$$

Zakładając w (2) i (3) $fx = x$, znajdziemy związki między różnicami i różniczkami wykładniczemi a różnicami i różniczkami zwyczajnemi zmiennej niezależnej, a mianowicie:

$$\gamma x = \frac{\Delta \log (x+\Delta x)}{\log x}, \qquad \Delta x = x\,(x^{\gamma x} - 1). \tag{4}$$

$$gx = \frac{dx}{x \log x}, \qquad dx = x \log x\ gx. \tag{5}$$

Jeżeli w (2) i (3) założymy $fx = e^{\varphi x}$, będzie:

$$\gamma e^{\varphi x} = \frac{\Delta\, \varphi(x+\Delta x)}{\varphi x},$$

$$g e^{\varphi x} = \frac{d\varphi x}{\varphi x};$$

skąd z łatwością otrzymamy:

$$\Delta\, \varphi\, x = \varphi\, (x - \Delta x)\, \gamma e^{\varphi\,(x-\Delta x)}\,, \tag{6}$$

$$d\, \varphi\, x = \varphi x\,.\, g e^{\varphi x}\,; \tag{7}$$

przytem pamiętać należy, że w (6) Δ oznacza różnicę wsteczną.

Z wzoru (3) znajdujemy różniczki wykładnicze następujących funkcyj:

$$\left.\begin{aligned} g\,(x^m) &= \frac{dx}{x \log x} = gx\,. \\ g\,(a^x) &= \frac{dx}{x} = \log x\,.\,gx\,. \\ g\,(\log x) &= \frac{gx}{\log\log x}\,. \\ g\,(\sin x) &= \frac{x \log x \operatorname{cotg} x}{\log \sin x}\, gx\,, \\ g\,(\cos x) &= -\frac{x \log x \operatorname{tg} x}{\log \cos x}\, gx\,, \\ g\,(\operatorname{tg}\, x) &= \frac{2\, x \log x}{\log \operatorname{tg} x\,.\sin 2x}\, gx\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Powyższe różnice i różniczki wykładnicze są rzędu pierwszego. Różnice i różniczki wykładnicze wyższych rzędów dodatnich i ujemnych powstają zupełnie inaczej, niż różnice lub różniczki zwyczajne, a mianowicie: aby otrzymać różnicę wykładniczą drugiego rzędu funkcyi fx, nadajemy wykładnikowi zmiennej niezależnej przyrostek γx nie w wyrażeniu na γfx, lecz w wyrażeniu na $fx^{\gamma fx}$. Ponieważ

$$fx^{\gamma fx} = e^{\Delta \log f\,(x+\Delta x)}\,,$$

nadając więc zmiennej x przyrostek Δx, albo, co na jedno wychodzi, wykładnikowi zmiennej przyrostek γx, otrzymamy

$$(fx^{\gamma fx})^{1+\Gamma} = e^{\Delta \log f\,(x+2\Delta x)}\,,$$

lub

$$fx^{\gamma fx + \Gamma.\gamma fx} = e^{\Delta \log f\,(x+2\Delta x)}\,,$$

gdzie $\Gamma\,.\,\gamma fx$ będzie różnicą wykładniczą drugiego rzędu funkcyi fx, którą to różnicę oznacza W r o ń s k i przez $\gamma_2 fx$; będzie więc

$$fx^{\gamma fx + \gamma_2 fx} = e^{\Delta \log f\,(x+2\Delta x)}\,,$$

skąd

$$\gamma_2\, fx = \frac{\Delta^2 \log f\,(x+2\Delta x)}{\log fx}\,.$$

Przechodząc w ten sposób kolejno do następnych rzędów, znajdziemy wogóle:

$$\gamma_m\, fx = \frac{\Delta^m \log f\,(x+m\Delta x)}{\log fx}\,, \tag{9}$$

a dla przyrostków nieskończenie małych:

$$g_m\, fx = \frac{d^m \log fx}{\log fx}\,. \tag{10}$$

Tyle znajdujemy wiadomości o różnicach i różniczkach wykładniczych W r o ń s k i e g o w Encyklopedyi M o u t f e r r i e r a (Tom III, § 811—815). Mamy tam jeszcze wzmiankę o $\gamma_m\,(Fx+fx)$, $g_2\,\gamma_m\,(Fx\,.\,fx)$ i $\gamma_m\,(Fx^{fx})$ oraz wzór na $g_m\,(Fx^{fx})$ podany bez udowodnienia. Poniżej podaję te wzory; czy są to jednak te same, jakie podaje W r o ń s k i, sprawdzić nie mogłem, nie znając dzieł jego.

Na mocy związku między różnicami zwykłemi i różnicami wykładniczemi możemy wyprowadzić niektóre wzory analogiczne dla jednych i drugich. A mianowicie wziąwszy szereg równań wynikających z (9):

$$\log fx.\gamma_m fx = \log f\,(x+m\Delta x) - \frac{m}{1} \log f(x+\overline{m-1}.\Delta x) + \frac{m^{2/-1}}{1^{2/1}} \log f(x+\overline{m-2}.\Delta x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m \log fx\,;$$

$$\log fx.\gamma_{m-1} fx = \log f(x+\overline{m-1}.\Delta x) - \frac{m-1}{1} \log f\,(x+\overline{m-2}\,.\,\Delta x) +$$
$$+ \frac{(m-1)^{2/-1}}{1^{2/1}} \log f(x+\overline{m-3}.\Delta x) - \ldots + (-1)^{m-1} \log fx\,;$$

. . . .

$$\log fx\,.\,\gamma fx = \log f\,(x+\Delta x) - \log fx\,;$$

pomnóżmy je, zacząwszy od drugiego przez $\frac{m}{1}$, $\frac{m^{2/-1}}{1^{2/1}}$, $\frac{m^{3/-1}}{1^{3/1}}$, . . . , $\frac{m^{m-1/-1}}{1^{m-1/1}}$ i dodajmy; otrzymamy tym sposobem:

$$\gamma_m fx + \frac{m}{1}\gamma_{m-1} fx + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_{m-2} fx + \ldots + \frac{m^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}}\gamma fx$$
$$= \frac{\log f(x+m\Delta x) - \log fx}{\log fx}.$$

Ponieważ $\gamma_0 fx$ jak to wynika z (9), równa się 1, możemy przeto wzór ten napisać tak:

$$\begin{aligned}&\gamma_m fx + \frac{m}{1}\gamma_{m-1} fx + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_{m-2} fx + \ldots \\ &\ldots + \frac{m^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}}\gamma fx + \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}}\gamma_0 fx = \frac{\log f(x+m\Delta x)}{fx}.\end{aligned} \tag{11}$$

Zakładając $\varphi x = e^{\varphi x}$, znajdziemy:

$$\begin{aligned}&\gamma_m e^{\varphi x} + \frac{m}{1}\gamma_{m-1} e^{\varphi x} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_{m-2} e^{\varphi x} + \ldots \\ &\ldots + \frac{m^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}}\gamma e^{\varphi x} + \frac{m^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}}\gamma_0 e^{\varphi x} = \frac{\varphi(x+m\Delta x)}{\varphi x},\end{aligned} \tag{12}$$

skąd po założeniu $m\,\Delta x = i$

$$\varphi(x+i) = \varphi x\left[\gamma_0 e^{\varphi x} + \frac{i}{1.\Delta x}\gamma e^{\varphi x} + \frac{i^{2|-\Delta x}}{1^{2|1}.\Delta x^2}\cdot\gamma_2 e^{\varphi x} + \ldots + \frac{i^{m|-\Delta x}}{1^{m|1}.\Delta x^m}\gamma_m e^{\varphi x}\right] \tag{13}$$

co nam przypomina wzór interpolacyjny N e w t o n a.

Przy pomocy wzoru (11), przedstawionego w formie nielogarytmowej, znajdziemy następujący związek między różnicą wykładniczą m-go rzędu e^{fx} i różnicami wykładniczemi samej funkcyi fx.

$$\begin{aligned}\gamma_m e^{fx} &= fx^{\frac{m}{1}\gamma fx + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_2 fx + \ldots + \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}}\gamma_m fx} \\ &- \frac{m}{1}\cdot fx^{\frac{m-1}{1}\gamma fx + \frac{\overline{m-1}^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_2 fx + \ldots + \frac{\overline{m-1}^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}}\gamma_{m-1} fx} \\ &+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} fx^{\frac{m-2}{1}\gamma fx + \frac{\overline{m-2}^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_2 fx + \ldots + \frac{\overline{m-2}^{m-2|-1}}{1^{m-2|1}}\gamma_{m-2} fx} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (-1)^{m-1}\frac{m^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}} fx^{\gamma fx} + (-1)^m.\end{aligned} \tag{14}$$

Możemy jeszcze napisać związek inny:

$$\begin{aligned}&\gamma_0 e^{fx} + \frac{m}{1}\gamma e^{fx} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_2 e^{fx} + \ldots + \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}}\gamma_m e^{fx} \\ &= fx^{\frac{m}{1}\gamma fx + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\gamma_2 fx + \ldots + \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}}\gamma_m fx},\end{aligned} \tag{15}$$

który otrzymujemy z porównania (11) i (12).

Przejdźmy teraz do różnicy wykładniczej m-go rzędu funkcyi Fx^{fx}. Wiemy, że

$$\gamma_m(Fx^{fx}) = \frac{\Delta^m[\log F f(x+m\Delta x)\log F(x+m\Delta x)]}{fx.\log F x};$$

pozostaje więc tylko rozwinąć różnicę Δ^m iloczynu i potem różnice Δ różnego rzędu zastąpić odpowiedniemi wyrażeniami, zawierającemi różnice wykładnicze γ różnego rzędu. W tym celu weźmy wzór:

$$\begin{aligned}\Delta^m(fx.\varphi x) &= fx.\Delta^m\varphi x + \frac{m}{1}\Delta fx[\Delta^{m-1}\varphi x - \Delta^m\varphi x] \\ &+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\Delta^2 fx[\Delta^{m-2}\varphi x - 2\Delta^{m-1}\varphi x + \Delta^m\varphi x] \\ &+ \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\Delta^3 fx[\Delta^{m-3}\varphi x - 3\Delta^{m-2}\varphi x + 3\Delta^{m-1}\varphi x - \Delta^m\varphi x] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \Delta^\mu fx\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}\left[\Delta^{m-\mu}\varphi x - \frac{\mu}{1}\Delta^{m-\mu-1}\varphi x + \frac{\mu^{2|-1}}{1^{2|1}}\Delta^{m-\mu-2}\varphi x - \ldots + (-1)^\mu\Delta^m\varphi x\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

dla różnic wstecznych i załóżmy w nim $\varphi x = \log F(x)$ oraz $x = x + m\Delta x$, wtedy:

$$\begin{aligned}\gamma_m(Fx^{fx}) = \frac{1}{fx.\log Fx}\Big\{&f(x+m\Delta x)\,\Delta^m\log F(x+m\Delta) \\ &+ \frac{m}{1}\Delta f(x+m\Delta x)[\Delta^{m-1}\log F(x+m\Delta x) - \Delta^m\log F(x+m\Delta x)] \\ &+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\Delta^2 f(x+m\Delta x)[\Delta^{m-2}\log F(x+m\Delta x) - 2\Delta^{m-1}\log F(x+m\Delta x) \\ &+ \Delta^m\log F(x+m\Delta x)] + \text{i t. d.}\ldots\Big\}\end{aligned}$$

$$=\frac{f\,(x+m\Delta x)}{fx}\cdot\frac{\Delta^m \log\, F\,(x+m\Delta x)}{\log\, Fx}$$

$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{\Delta f\,(x+m\Delta x)}{f\,(x+\overline{m-1}.\Delta x)}\cdot\frac{f(x+\overline{m-1}.\Delta x)}{fx}\left[\frac{\Delta^{m-1}\log F(x+m\Delta x)}{\log\, F\,(x+\Delta x)}\cdot\frac{\log F(x+\Delta x)}{\log\, Fx}\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta^m \log F\,(x+m\Delta x)}{\log\, Fx}\right]$$

$$+\frac{m^{2/-1}}{1^{2/1}}\,\frac{\Delta^2 f(x+m\Delta x)}{f(x+\overline{m-2}.\Delta x)}\cdot\frac{f(x+\overline{m-2}.\Delta x)}{fx}\cdot\left[\frac{\Delta^{m-2}\log F(x+m\Delta x)}{\log F(x+2\Delta x)}\cdot\frac{\log F\,(x+2\Delta x)}{\log\, Fx}\right.$$

$$\left.-\,2\,\frac{\Delta^{m-1}\log F(x+m\Delta x)}{\log F(x+\Delta x)}\cdot\frac{\log F(x+\Delta x)}{\log\, Fx}+\frac{\Delta^m \log F(x+m\Delta x)}{\log\, Fx}\right]+\text{i t. d.}$$

Biorąc na uwagę (11) i (12), otrzymamy ostatecznie:

$$\gamma_m\,(Fx^{fx})=\left(\gamma_0\, e^{fx}+\frac{m}{1}\,\gamma e^{fx}+\frac{m^{2/-1}}{1^{2/1}}\,\gamma_2\, e^{fx}+\ldots+\gamma_m\, e^{fx}\right)\gamma_m\, Fx$$

$$+\frac{m}{1}\left(\gamma_0\, e^{fx}+\frac{m-1}{1}\,\gamma e^{fx}+\ldots+\gamma_{m-1}\, e^{fx}\right)\gamma e^{f\,(x+\overline{m-1}.\Delta x)}$$

$$.\,[\gamma_{m-1}\, F\,(x+\Delta x)\,(1+\gamma Fx)-\gamma_m\, Fx] \tag{16}$$

$$+\frac{m^{2/-1}}{1^{2/1}}\left(\gamma_0\, e^{fx}+\frac{m-2}{1}\,\gamma e^{fx}+\frac{m-2^{2/-1}}{1^{2/1}}\,\gamma_2\, e^{fx}+\ldots+\gamma_{m-2}\, e^{fx}\right).\,\gamma_2\, e^{f(x+\overline{m-2}.\Delta x)}$$

$$.\,[\gamma_{m-2} F\,(x+2\Delta x)\,.\,(1+2\gamma Fx+\gamma_2 Fx)-2\gamma_{m-1}\, F\,(x+\Delta x)\,(1+\gamma Fx)+\gamma_m\, Fx]+$$

i t. d.

Różnicę wykładniczą m-go rzędu iloczynu dwóch funkcyj znajdziemy z łatwością. W samej rzeczy

$$\gamma_m\,(Fx.fx)=\frac{\Delta^m \log F(x+m\Delta x)+\Delta^m \log f(x+m\Delta x)}{\log\, Fx+\log\, fx}=\frac{\log Fx.\gamma_m Fx+\log fx.\gamma_m fx}{\log\, Fx+\log\, fx}\,. \tag{17}$$

Przyjmując większą ilość mnożników, otrzymamy

$$\gamma_m\,(\varphi_1\, x\,.\,\varphi_2\, x\,.\,\varphi_3\, x\,\ldots\,\varphi_\mu\, x)$$

$$=\frac{\log\,\varphi_1\, x\,.\,\gamma_m\,\varphi_1\, x+\log\,\varphi_2\, x\,.\,\gamma_m\,\varphi_2\, x+\ldots+\log\,\varphi_\mu\, x\,.\,\gamma_m\,\varphi_\mu\, x}{\log\,\varphi_1\, x+\log\,\varphi_2\, x+\ldots+\log\,\varphi_\mu\, x}\,.$$

Jeżeli założymy $\varphi_1\, x=\varphi_2\, x=\varphi_3\, x=\ldots=\varphi_\mu\, x$, to

$$\gamma_m\,(\varphi x^\mu)=\gamma_m\,\varphi x\,. \tag{18}$$

co moglibyśmy znaleść bezpośrednio, uzasadniając tym sposobem słuszność ostatniego wzoru dla jakiego bądź wykładnika byle stałego.

Pozostaje jeszcze znaleść różnicę wykładniczą m-go rzędu summy $Fx+fx$, czego, pomimo wielu usiłowań, otrzymać nie mogłem; podobno Wroński wzór ten wyprowadził; przynajmniej tak twierdzi Montferrier, wzoru tego jednak nie podaje w swej Encyklopedyi.

Wzory na różniczki wykładnicze m-go rzędu otrzymamy ze wzorów na różnice wykładnicze, zakładając w tych ostatnich przyrostki zmiennej nieskończenie małemi. Tak ze wzoru (16), gdy w nim założymy $\Delta x=dx$ oraz zatrzymamy tylko nieskończenie małe rzędu m-go, otrzymujemy wzór

$$g_m\,(Fx^{fx})=g_m\, Fx\,.\,g_0\, e^{fx}+\frac{m}{1}\,g_{m-1}\, Fx\,.\,g_1\, e^{fx}+\frac{m^{2/-1}}{1^{2/1}}\,g_{m-2}\, Fx\,.\,g_2\, e^{fx}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m^{m/-1}}{1^{m/1}}\,g_m\, e^{fx}\,. \tag{19}$$

który podaje Montferrier (Tom III § 812) jednak bez udowodnienia. Wzór ten możemy otrzymać niezależnie od (16), biorąc

$$g_m\,(Fx^{fx})=\frac{1}{fx\,\log\, Fx}\,d^m\,(fx\,\log\, Fx)$$

i rozwijając $d^m\,(fx\,\log\, Fx)$.

Dla $\Delta x=dx$ wzór (17) będzie

$$g_m\,(Fx\,.\,fx)=\frac{\log\, Fx\,.\,g_m\, Fx+\log\, fx\,.\,g_m\, fx}{\log\, Fx+\log\, fx}\,. \tag{20}$$

Co się tyczy różniczki wykładniczej m-go rzędu summy $Fx+fx$ znajdziemy ją, jeżeli mieć będziemy $g_m\,\varphi x$ wyrażone za pomocą $g_m\, e^{\varphi x}$.

W tym celu weźmiemy

$$d\varphi x=\varphi x\,.\,d\log\,\varphi x$$

i zróżniczkujemy $(m-1)$-razy; tym sposobem otrzymamy m równań, w których zamiast $d^k\,\varphi x$ podstawimy $\varphi x\,.\,g_k\, e^{\varphi x}$, a zamiast $d^k\log\,\varphi x$ — $\log\,\varphi x\,.\,g_k\,\varphi x$.

$$g e^{\varphi x}=\log\,\varphi x\,.\,g\varphi x\,,$$

$$g_2\, e^{\varphi x}=\log\,\varphi x\,.\,g e^{\varphi x}\,.\,g\varphi x+\log\,\varphi x\,.\,g_2\,\varphi x$$

$$g_3\, e^{\varphi x}=\log\,\varphi x\,.\,g_2\, e^{\varphi x}\,.\,g\varphi x+2\,\log\,\varphi x\,.\,g e^{\varphi x}\,.\,g_2\,\varphi x+\log\,\varphi x\,.\,g_3\,\varphi x$$

. . . .

$$g_m\, e^{\varphi x}=\log\,\varphi x.g_{m-1}\, e^{\varphi x}\,.\,g\varphi x+\frac{m-1}{1}\log\varphi x.g_{m-2}\, e^{\varphi x}.g_2\varphi x+\ldots+\log\varphi x.g_m\varphi x.$$

Rozwiązawszy te równania, znajdziemy $g_m \varphi x$ w funkcyi różniczek wykładniczych $e^{\varphi x}$ różnych rzędów:

$$g_m \varphi x = \frac{1}{\log \varphi x} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & 0, & g e^{\varphi x} \\ g e^{\varphi x}, & 1, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & 0, & g_2 e^{\varphi x} \\ g_2 e^{\varphi x}, & 2 g e^{\varphi x}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & 0, & g_3 e^{\varphi x} \\ \vdots & & & & \\ g_{m-1} e^{\varphi x}, & \frac{m-1}{1} g_{m-2} e^{\varphi x}, & \ldots, & \frac{m-1}{1} g e^{\varphi x}, & g_m e^{\varphi x} \end{vmatrix} \quad (21)$$

Weźmy teraz $g_\mu (e^{Fx+fx})$; na mocy (10) otrzymujemy

$$g_m (e^{Fx+fx}) = \frac{1}{Fx+fx} (d^m Fx + d^m fx) = \frac{Fx \cdot g_m e^{Fx} + fx\, g_m e^{fx}}{Fx+fx} \quad (22)$$

dostatecznie więc w (21) założyć $\varphi x = Fx + fx$, a potem w wyznaczniku po prawej stronie tego wzoru podstawić wyrażenia z (22), by otrzymać $g_m (Fx+fx)$ w funkcyi różnego rzędu różniczek wykładniczych funkcyj e^{Fx} i e^{fx}. Zamiast ge^{Fx} i ge^{fx} różnych rzędów możemy potem podstawić ich wyrażenia za pomocą różnych rzędów gFx i gfx i otrzymać ostateczny wzór na $g_m (Fx+fx)$, którego tu nie pomieszczam, ponieważ jest nader złożony. Całą teoryą różnic i różniczek wykładniczych wyprowadził W r o ń s k i à priori, na mocy badań filozoficznych nad różnymi niezbędnemi gałęziami algorytmii. Czy teorya ta będzie kiedykolwiek w matematyce stosowana, przesądzać trudno, z powodu jej blizkiego związku z rachunkiem różniczkowym. Co prawda, autor jej twierdzi, że dwie te teorye istnieją niezależnie jedna od drugiej; nie jestem jednak pewny, czy możnaby wszystkie powyżej podane wzory wyprowadzić bez pomocy rachunku różniczkowego.

Pozostaje jeszcze zbadać różnice i różniczki wykładnicze o skaźniku odjemnym, które odpowiadają całkom w rachunku różniczkowym; postaram się je rozpatrzyć w artykule późniejszym.

Z WROŃSKIEGO TEORYI STOPNI SKOŃCZONYCH I NIESKOŃCZENIE MAŁYCH.

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

1. Zasady teoryi *stopni skończonych i nieskończenie małych*, (grades et gradules) [1]) podał W r o ń s k i w dziele swem „Introduction à la philosophie des mathématiques et technie d'algorithmie" [2]), skąd ją M o n t f e r r i e r bez zmiany prawie, tylko w skróceniu, wniósł do swojej „Encyklopedyi" [3]). Teorya ta pozostała dotąd bez zastosowań. Próba W r o ń s k i e g o zastosowania jej do odkrycia formy ogólnej pierwiastków równania algebraicznego nie może być uważana za doskonałą [4]). W rękopisach po W r o ń s k i m znalazłem notatki, z których okazuje się, że pomysł swój stosował do badań

[1]) Wprowadzamy tymczasowo tę nazwę w miejsce nazwy „różnic i różniczek wykładniczych" użytej przez p. K r a u z e g o; mimo, że wyraz stopień ma i inne znaczenie, sądzimy, że nie da to powodu do dwuznaczności.

[2]) Rok 1811, str. 48—61, 82—90.

[3]) Encyclopédie mathématique, T. III, p. 96—103.

[4]) Introduction p 82—90. Za pomocą rachunku stopni, zastosowanego do wyrażenia

$$X = (a_1+x)(a_2+x)\ldots(a_n+x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_\omega x^\omega,$$

stara się W r o ń s k i wykazać, że pierwiastki równania $X=0$ są zawsze postaci

$$a = \psi \left\{ \sqrt[\lambda]{} \left(\sqrt[\varkappa]{} \ldots \left(\sqrt[a]{A} + B \right) + C \right) \ldots \right\}$$

gdzie $A, B, C\ldots$ są funkcye współczynników równania, ψ zaś jest znakiem funkcyi, złożonej z wartości różnych, jakie przybierać może jej argument.