w tym względzie do prac Maxwella (*Philosophical Transactions*, 1866), Watsona (*A Treatise on the kinetic Theory of Gases*; Oxford, 1876, 1893), Lorentza (*Wien. Sitz. Berichte*, 1887) a zwłaszcza Boltzmanna (tamże, 1872—1887, w wielu miejscach).

Nie uważamy bynajmniej powyższego przedstawienia rzeczy za *dowód* prawa Maxwella; pragnęliśmy tylko wykazać stopień pokrewieństwa, które je łączy z prawem Gibbsa, z prawem równowagi chemicznej w mięszaninach gazowych.

Kraków, w lutym 1894 r.

O „PRAWIE NAJWYŻSZEM" HOENE-WROŃSKIEGO W MATEMATYCE. [1]

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

Artykuł drugi.

1. Zastosowanie „prawa najwyższego" do określania natury funkcyj opiera Wroński na następujących rozważaniach.

Określić naturę funkcyj F, danej za pomocą równania zwykłego lub różniczkowego, lub za pomocą układu takich równań, jest to znaleźć takie wyrażenie F_ω, które zdolne jest przybierać kolejne, według pewnego prawa wytworzyć się dające postaci lub stopnie $F_1, F_2, F_3 \ldots F_\omega \ldots$, takie, że różnice $F - F_\omega$ $(\omega = 1, 2, \ldots)$ są blizkiemi zera i to tem bardziej, im liczba ω jest większa. Dla $\omega = \infty$ powinno być ściśle $F = F_\omega$, t. j. $F - F_\omega = 0$. Oznaczenie funkcyi F_ω oraz różnicy odpowiedniej $F - F_\omega$ stanowi przedmiot metody, nazwanej przez Wrońskiego „metodą najwyższą" (méthode suprême).

Pomysł Wrońskiego należy uważać za uogólnienie metody kolejnych przybliżeń, znanych w rozmaitych gałęziach analizy, a mianowicie: metody wyciągania pierwiastków, obliczania pierwiastków równań, teoryi przybliżeń ułamków ciągłych i t. d. Lecz gdy metody te mają na celu głównie

[1] Patrz „Prace mat.-fiz.", t. II, str. 145—168.

obliczanie wartości liczbowych, Wroński metodę swoją stosuje do otrzymywania wyrażeń ogólnych, przedstawiających funkcye szukane. Sposób przedstawiania funkcyj za pomocą szeregów z wyrazami dopełniającemi ma pewną analogią z metodą Wrońskiego; zachodzi jednak, jak to zobaczymy, między obu sposobami przedstawiania ta różnica, że wyrażenia Wrońskiego nie są szeregami zwykłemi, bo współczynniki ich są funkcyami zmiennej niezależnej.

Oczywiście, że do metody „najwyższej" należy zastosować zastrzeżenia, jakie poczyniliśmy o „prawie najwyższem"; musimy wszakże przyznać, że metoda ta uzupełnia pewne braki, jakie zaznaczyliśmy w teoryi tego prawa. Gdy bowiem w tem ostatniem szło Wrońskiemu jedynie o samą formę rozwinięcia bez względu na jej stosowalność, tu o warunkach zbieżności mówi on już wyraźnie.

2. Zasada „metody najwyższej", jak ją Wroński przedstawił jeszcze w r. 1815 w tomie I-ym swojej „Filozofii Technii" (str. 168 i t. d.), jest następująca:

Niechaj funkcya $F(x)$, której przedstawienia szukamy, wyraża się za pomocą prawa najwyższego tak:

$$F(x) = A_0 + A_1\,\Omega_1 + A_2\,\Omega_2 + A_3\,\Omega_3 + \ldots,$$

gdzie $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ są funkcye tworzące dowolne; $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ współczynniki, które otrzymać można za pomocą wzorów (a), podanych w artykule I-ym.

Z powodu zupełnej dowolności funkcyj tworzących, możemy pewną liczbę tych funkcyj poddać umówionym warunkom. Niechaj niemi będą funkcye $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\omega$ $(\omega = 1, 2, 3 \ldots)$; pozostałym zaś funkcyom $\Omega_{\omega+1}, \Omega_{\omega+2}, \ldots$ nadajmy postać

$$\Omega_{\omega+\lambda} = [\varphi(x)]^{\omega+\lambda\,|\,\xi},$$

t. j.

$$\Omega_{\omega+\lambda} = \varphi(x)\,.\,\varphi(x+\xi)\,\ldots\,\varphi(x+(\omega+\lambda-1)\,\xi)\,.$$

Tym sposobem będzie

$$\begin{aligned} F(x) &= A_0\,\Omega + A_1\,\Omega_1 + A_2\,\Omega_4 + \ldots + A_\omega\,\Omega_\omega \\ &+ \varphi(x)^{\omega+1\,|\,\xi}\,\{A_{\omega+1} + A_{\omega+2}\,\varphi(x+(\omega+1)\,\xi) + \ldots\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Z teoryi wyłożonej w artykule I-ym wiemy, że w wyrażeniach współczynników $A_{\omega+1}, A_{\omega+2}, \ldots$ zachodzą różnice $\Delta^m\,\varphi(x)^{n|\xi}$ lub różniczki $d^m\,\varphi(x)^{n|\xi}$, przy pewnej szczególnej wartości zmiennej x. Jeżeli za tę wartość szczególną wybierzemy pierwiastek równania $\varphi(x) = 0$, to wszystkie

różnice lub różniczki, których rząd m jest mniejszy od wykładnika n, będą zerami, współczynniki przeto $A_{\omega+1}, A_{\omega+2} \ldots$ sprowadzą się do postaci prostszych: $\Xi_{\omega+1}, \Xi_{\omega+2}, \ldots$ z których każda jest ilorazem dwóch wrońskianów. Będzie tedy według przyjętego przez nas znakowania:

$$\begin{aligned} A_{\omega+1} = \Xi_{\omega+1} &= \frac{W(D\Omega_1, D\Omega_2, \ldots, D\Omega_\omega, DF)}{W(D\Omega_1, D\Omega_2, \ldots, D\Omega_\omega, D\Omega_{\omega+1})} \\ A_{\omega+2} = \Xi_{\omega+2} &= \frac{W(D\Omega_1, D\Omega_2, \ldots, D\Omega_\omega, D\Omega_{\omega+1}, DF)}{W(D\Omega_1, D\Omega_2, \ldots, D\Omega_\omega, D\Omega_{\omega+1}, D\Omega_{\omega+2})} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie D jest znakiem pochodnej. Współczynniki zaś poprzedzające $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\omega$, według wzorów (a), wyrażają się w ten sposób:

$$A_\mu = \Xi_\mu + \Psi(\mu)_1\,\Xi_{\mu+1} + \Psi(\mu)_2\,\Xi_{\mu+2} + \ldots + \Psi(\mu)_{\omega-\mu}\,\Xi_\omega\,. \tag{3}$$

Uwzględniając (2) i (3) we wzorze (1), otrzymamy:

$$\begin{aligned} F(x) = \Omega_0\,&\{\Xi_0 + \Psi(0)_1\,\Xi_1 + \Psi(0)_2\,\Xi_2 + \ldots + \Psi(0)_\omega\,\Xi_\omega\} \\ &+ \Omega_1\,\{\Xi_1 + \Psi(1)_1\,\Xi_2 + \Psi(1)_2\,\Xi_2 + \ldots + \Psi(1)_{\omega-1}\,\Xi_\omega\} \\ &+ \Omega_2\,\{\Xi_2 + \Psi(2)_1\,\Xi_3 + \Psi(2)_2\,\Xi_3 + \ldots + \Psi(2)_{\omega-2}\,\Xi_\omega\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \Omega_{\omega-1}\,\{\Xi_{\omega-1} + \Psi(\omega-1)_1\,\Xi_\omega\} \\ &+ \Omega_\omega\,\Xi_\omega \\ &+ \Xi_{\omega+1}\,\varphi x^{\omega+1|\xi} + \Xi_{\omega+2}\,\varphi x^{\omega+2|\xi} + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Należy pamiętać, że ilości Ξ i Ψ, zawarte w tych wzorach, są wzięte dla szczególnej wartości x, która jest pierwiastkiem równania $\varphi(x) = 0$.

Weźmy na początek $\omega = 1$, wtedy z (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(x) &= (\Xi_0 + \Psi(0)_1\,\Xi_1) + \Xi_1\,\Omega_1 \\ &+ \Xi_2\,\varphi(x)^{2|\xi} + \Xi_3\,\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Funkcyą Ω_1 poddajmy warunkowi, aby sprawdzała równanie

$$\Xi_2 = 0\,, \tag{6}$$

t. j. równanie

$$W\,(D\Omega_1\,,\,DF\,(x)) = 0\,,$$

lub

$$D\Omega_1\; D^2F\,(x) - D^2\Omega_1\; DF\,(x) = 0\,. \tag{6'}$$

Oczywiście równaniu temu czyni zadość $\Omega_1 = F\,(x)$; lecz funkcya $F\,(x)$ jest szukaną, założenie to zresztą, po podstawieniu w (5), doprowadziłoby tylko do nic nie mówiącej tożsamości. Warunek (6) lub (6′) należy przeto rozumieć w ten sposób, że wyznaczamy funkcyą Ω_1, która możliwie dokładnie czyni zadość temu równaniu. Gdy taką funkcyą znajdziemy, wtedy współczynnik Ξ_2 będzie można przyjąć za zero, współczynniki następne Ξ_3, Ξ_4, będą miały małe wartości liczebne, a gdy jeszcze funkcyą $\varphi\,(x)$ dobierzemy w ten sposób, aby szereg

$$\Xi_3\;\varphi\;(x)^{3/\xi} + \ldots\ldots$$

był zbieżny w granicach dobranych, to można będzie wyrażenie

$$\Xi_0 + \Psi\,(0)_1\;\Xi_1 + \Xi_1\;\Omega_1$$

uważać za pierwszy stopień przybliżenia, t. j. napisać

$$F_1 = \Xi_0 + \Psi\,(0)_1\;\Xi_1 + \Xi_1\;\Omega_1\,,$$

szereg zaś nieskończony

$$\Xi_3\;\varphi\;(x)^{3/\xi} + \Xi\;\varphi\;(x)^{4/\xi} + \ldots$$

przedstawiać będzie wyraz dopełniający, t. j. $F - F_1$.

Weźmy teraz $\omega = 2$ t. j. napiszmy

$$\begin{aligned} Fx = &= (\Xi_0 + \Psi(0)_1\,\Xi_1 + \Psi(0)_2\,\Xi_2) + (\Xi_1 + \Psi(1)_1\,\Xi_2)\,\Omega_1 + \Xi_2\,\Omega_2 \\ &+ \Xi_3\;\varphi\,(x)^{3/\xi} + \Xi_4\;\varphi\,(x)^{4/\xi} + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Tu mamy dwie funkcye nieoznaczone Ω_1 i Ω_2; poddajemy je warunkowi

$$\Xi_3 = 0\,, \tag{8}$$

t. j. staramy się oznaczyć je tak, aby czyniły zadość przybliżenie równaniu

$$W\,(D\Omega_1\,,\; D\Omega_2\,,\; DF) = 0$$

lub równaniu

$$\begin{vmatrix} D\Omega_1, & D\Omega_2, & DF \\ D^2\Omega_1, & D^2\Omega_2, & D^2F \\ D^3\Omega_1, & D^3\Omega_2, & D^3F \end{vmatrix} = 0 \tag{8'}$$

Temu równaniu czynią oczywiście zadość funkcye Ω_1, Ω_2 takie, dla których $M\Omega_1 + N\Omega_2 = F\,(x)$, gdzie M i N są stałe dowolne; lecz to założenie nie prowadzi oczywiście do żadnego rezultatu. Trzeba tedy znaleźć dwie funkcye Ω_1, Ω_2 różne od siebie i takie, aby możliwie dokładnie równanie to sprawdzały: Gdy takie funkcye znajdziemy, wtedy będzie można otrzymać drugi stopień przybliżenia

$$F_2 = \Xi_0 + \Psi(0)_1\,\Xi_1 + \Psi(0)_2\,\Xi_2 + (\Xi_1 + \Psi(1)\,\Xi_2)\,\Omega_1 + \Xi_2\,\Omega_2\,,$$

dla którego wyrazem dopełniającym będzie szereg

$$\Xi_4\;\varphi\;(x)^{4/\xi} + \Xi_5\;\varphi\;(x)^{5/\xi} + \ldots\,;$$

ten zaś przez dobór funkcyj $\varphi\,(x)$ można będzie uczynić zbieżnym w granicach oznaczonych.

Łatwo już rozumieć, w jaki sposób według tej metody otrzymują się stopnie następujące: dla $\omega = 4$, $\omega = 5, \ldots$

3. W teoryi metoda ta jest prostą, w zastosowaniu wszakże nastręczają się trudności, a najważniejszą z nich jest całkowanie przybliżone równań (6), (8) i t. p. I dlatego sam W r o ń s k i do zastosowań zalecał nie metodę najwyższą w całej jej ogólności, lecz jej szczególny przypadek lub raczej modyfikacyą, którą nazwał „metodą pierwszorzędną“ (méthode primordiale). Oto na czem polega ta metoda.

Funkcye Ω_1, Ω_2, $\ldots$ Ω_ω dane są w postaci:

$$\Omega_1 = \frac{x-a}{n_1+x},\quad \Omega_2 = \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)\,(n_2+x)},\quad \Omega_3 = \frac{(x-a)^3}{(n_1+x)\;n_2+x)\;(n_3+x)}\;\ldots$$

$$\Omega_\omega = \frac{(x-a)^\omega}{(n_1+x)\;(n_2+x)\;(n_3+x)\;\ldots\;(n_\omega+x)}\,,$$

gdzie n_1, n_2, $\ldots$, n_ω są parametry, które przy pomocy warunku analogicznego do (6) lub (8) wyznaczyć mamy.

Przy takiem założeniu kolejne stopnie otrzymują się w sposób następujący:

Przybliżenie 1-e. Mamy

$$\Omega_1 = \frac{x-a}{n_1+x}.$$

Pochodne pierwsza i druga tej funkcyi są:

$$D\Omega_1 = \frac{n_1+a}{(n_1+x)^2}, \quad D^2\Omega_1 = -2\,\frac{n_1+a}{(n_1+x)^3};$$

Równanie różniczkowe (6) zamienia się na następujące:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2F}{dx^2}(n_1+x) + \frac{dF}{dx} = 0,$$

stąd

$$n_1 + x = -2\,\frac{DF(x)}{D^2F(x)}. \tag{9}$$

Funkcya Ω_1 będzie małe wyrażenie

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{D^2F(x)}{DF(x)}(x-a).$$

Współczynnik A_0 (przy przyjęciu $\Omega_0 = 1$) będzie równy $F(a)$, współczynnik A_1 jako równy ilorazowi $\dfrac{DF}{D\Omega_1}$ przy wartości $x = a$, stanie się równy

$$(n+a)\,D_a F,$$

gdzie D_aF oznacza wartość pochodnej $DF(x)$ dla $x = a$. Przy uwzględnieniu równania (9), będziemy mieli.

$$A_1 = D_a F\left\{-2\,\frac{D^2F(x)}{DF(x)} - (x-a)\right\};$$

stąd więc na przybliżenie pierwsze otrzymujemy:

$$F(x) = F(a) + D_a F\left\{1 + (x-a)\,\frac{D^2F(x)}{2\,DF(x)}\right\}(x-a) \tag{10}$$

Szereg dopełniający będzie:

$$\Xi_3\,\varphi(x)^{3/\xi} + \Xi_4\,\varphi(x)^{4/\xi} + \ldots,$$

gdzie

$$\Xi_3 = \frac{W(D\Omega_1,\, D\varphi(x)^{2/\xi},\, DF)}{W(D\Omega_1\, D\varphi(x)^{2/\xi},\, D\varphi(x)^{3/\xi})},$$

$$\Xi_4 = \frac{W(D\Omega_1,\, D\varphi(x)^{2/\xi},\, D\varphi(x)^{3/\xi},\, DF)}{W(D\Omega_1,\, D\varphi(x)^{2/\xi},\, D\varphi(x)^{3/\xi},\, D\varphi(x)^{4/\xi})},$$

. . . .

Przybliżenie 2-ie. Mamy

$$\Omega_1 = \frac{x-a}{n_1+x}, \quad \Omega_2 = \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)}.$$

Równanie różniczkowe (8′), któremu te funkcye mają czynić zadość, po podstawieniu w niem wartości pochodnych $D\Omega_1$, $D^2\Omega_1$, $D^4\Omega_1$, $D\Omega_2$, $D^2\Omega_2$, $D^3\Omega_2$ i po uskutecznieniu uproszczeń, sprowadzi się do postaci następującej:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^3F}{dx^3}(n_1+x)(n_2+x) + \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2F}{dx^2}\{(n_1+x)+(n_2+x)\}\\ + \frac{1}{1}\cdot\frac{dF}{dx} = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Różniczkując to równanie, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2.3.4}\,\frac{d^4F}{dx^4}(n_1+x)(n_2+x) + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^3F}{dx^3}\{(n_1+x)+(n_2+x)\}\\ + \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2F}{dx^2} = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Z dwóch tych równań możemy oznaczyć n_1 i n_2. Przedewszystkiem można z nich oznaczyć z łatwością sumę $(n_1+x)+(n_2+x)$ oraz iloczyn $(n_1+x)(n_2+x)$; a mianowicie:

$$(n_1+x)+(n_2+x) = -\frac{6\,DF(x)\,D^4F(x) - 2\,D^2F(x)\,D^3F(x)}{3\,D^2F(x)\,D^4F(x) - 4\,(D^3F(x))^2},$$

$$(n_1+x)(n_2+x) = +\frac{12\,[2\,DF(x)\,D^3F(x) - 3\,(D^2F(x))^2]}{3\,D^2F(x)\,D^4F(x) - 4\,(D^3F(x))^2}.$$

lub:

$$(n_1+x)(n_2+x) = -\frac{6Y}{Z}, \quad (n_1+x)(n_2+x) = \frac{12\,X}{Z}, \tag{13}$$

gdzie:

$$
\left.
\begin{aligned}
X &= 2\,\frac{dF}{dx}\,\frac{d^3F}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)^2, \\
Y &= \frac{dF}{dx}\,\frac{d^4F}{dx^4} - 2\,\frac{d^2F}{dx^2}\,\frac{d^3F}{dx^3}, \\
Z &= 3\,\frac{d^2F}{dx}\,\frac{d^4F}{dx^4} - 4\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)^2.
\end{aligned}
\right\} \tag{14}
$$

Oznaczywszy w ten sposób sumę i iloczyn ilości n_1+x i n_2+x znajdziemy je same, rozwiązując równanie stopnia drugiego, a znalazłszy je, podstawiamy w wyrażenia na Ω_1 i Ω_2. Ale możemy obyć się bez rozwiązania tego równania, gdyż, jak to zaraz się pokaże, wzór na rozwinięcie funkcyi $F(x)$ będzie miał taką postać, iż zachodzić w nim będą tylko suma i iloczyn ilości n_1+x i n_2+x.

W samej rzeczy współczynniki A_1, A_2 będą w tym przypadku:

$$
A_1 = \left(\frac{DF}{D\Omega_1}\right)_{x=a}, \qquad A_2 = \frac{W(D\Omega_1, DF)_{x=a}}{W(D\Omega_1, D\Omega_2)_{x=a}},
$$

t. j.

$$
A_1 = (n_1+a)\,D_a F,
$$

$$
A_2 = (n_1+a)(n_2+a)\,\frac{D^2_a F}{2} + (n_2+a)\,\frac{D_a F}{1}.
$$

Będzie tedy:

$$
F(x) = F(a) + (n_1+a)\,D_a F \cdot \frac{x-a}{n+x}
$$

$$
+\left\{(n_1+a)(n_2+a)\,\frac{D^2_a F}{2} + (n_2+a)\,\frac{D_a F}{1}\right\}\frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} + \dots
$$

$$
= F(a) + D_a F\left\{\frac{n_1+a}{n_1+x} + \frac{(n_2+a)(x-a)}{(n_1+x)(n_2+x)}\right\}(x-a)
$$

$$
+ (n_1+a)(n_2+a)\,\frac{D^2_a F}{2}\cdot\frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} + \dots
$$

Ponieważ jest tożsamościowo:

$$
\frac{n_1+a}{n_1+x} + \frac{(n_2+a)(x-a)}{(n_1+x)(n_2+x)} = 1 - (x-a)^2\cdot\frac{1}{(n_1+x)(n_2+x)},
$$

$$
(n_1+a)(n_2+a)\,\frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} = 1 - (x-a)\cdot\frac{n_1+x+n_2+x}{(n_1+x)(n_2+x)}
$$

$$
+ (x-a)^2\cdot\frac{1}{(n_1+x)(n_2+x)},
$$

po uwzględnieniu więc tych równości, możemy napisać:

$$
F(x) = F(a) + D_a F\left\{1 - (x-a)^2\,\frac{1}{(n_1+x)(n_2+x)}\right\}(x-a)
$$

$$
+ \frac{D^2_a F}{1.2}\left\{1 - (x-a)^2\,\frac{n_1+x+n_2+x}{(n_1+x)\;n_2+x)} + (x-a)^3\frac{1}{(n_1+x)(n_2+x)}\right\}(x-a)^2;
$$

$$
+ \dots\dots\dots\dots\dots
$$

lub, przy uwzględnieniu równań (13):

$$
\left.
\begin{aligned}
F(x) &= F(a) + D_a F\left\{1 - (x-a)^2\,\frac{Z}{12X}\right\}(x-a) \\
&+ \frac{D^2_a F}{1.2}\left\{1 + (x-a)^2\,\frac{Y}{2X} + (x-a)^3\,\frac{Z}{12X}\right\}(x-a)^3 \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right\} \tag{15}
$$

Szereg dopełniający jest

$$
\Xi_4\,\varphi x^{4/\xi} + \Xi_5\,\varphi x^{5/\xi} + \dots
$$

Przybliżenie 3-cie. Aby otrzymać przybliżenie trzecie, należy oznaczyć parametry n_1, n_2, n_3 tak, aby funkcye

$$
\Omega_1 = \frac{x-a}{n_1+x}, \quad \Omega_2 = \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)}, \quad \Omega_3 = \frac{(x-a)^3}{(n_1+x)(n_2+x)(n_3+x)}
$$

czyniły zadość równaniu różniczkowemu

$$
W(D\Omega_1, D\Omega_2, D\Omega_3, DF) = 0.
$$

Wprowadziwszy tu wyrażenia pochodnych funkcyj Ω_1, Ω_2, Ω_3 i uskuteczniwszy uproszczenia, dojdziemy do równania postaci następującej:

$$\frac{1}{1.2.3.4} D^4 F(x) . u + \frac{1}{1.2.3} D^3 F(x) . v + \frac{1}{1.2} D^2 F(x) . w + \frac{1}{1} D F(x),$$

gdzie

$$u = (n_1+x)(n_2+x)(n_3+x),$$

$$v = (n_1+x)(n_2+x) + (n_1+x)(n_3+x) + (n_2+x)(n_3+x),$$

$$w = (n_1+x) + (n_2+x) + (n_3+x).$$

Różniczkując powyższe równanie dwa razy, otrzymamy wraz z niem układ trzech równań, z których możemy oznaczyć ilości u, v, w, a następnie napisać równanie trzeciego stopnia, którego pierwiastkami będą $n_1 + x$, $n_2 + x$, $n_3 + x$. Znalazłszy te pierwiastki, będziemy mogli oznaczyć parametry n_1, n_2, n_3.

Lecz tu, jak i w poprzednim przypadku, niema potrzeby rozwiązywania równania stopnia trzeciego; można bowiem, po oznaczeniu współczynników A_1, A_2, A_3, przekształcić otrzymane rozwinięcie

$$A_1 \frac{x-a}{n_1+x} + A_2 \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} + A_3 \frac{(x-a)^3}{(n_1+x)(n_2+x)(n_3+x)}$$

w ten sposób, że nowe współczynniki zawierać będą nie same ilości $n_1 + x$, $n_2 + x$, $n_3 + x$ lecz ich kombinacye u, v, w.

Przeprowadziwszy ten rachunek, dojdziemy do rozwinięcia postaci:

$$\begin{aligned} F(x) = F(a) &+ D_a F\left\{1 - (x-a)^3 \frac{U}{120X}\right\}(x-a) \\ &+ \frac{1}{1.2} D^2_a F\left\{1 - (x-a)^2 \frac{Z}{10X} + 2(x-a)^3 . \frac{U}{120X}\right\}(x-a)^2 \qquad (16) \\ &+ \frac{1}{1.2.3} D^3_a F\left\{1 - (x-a)\frac{Y}{2X} + (x-a)^2 \frac{Z}{10X} - (x-a)^3 \frac{U}{120X}\right\}(x-a)^3 \\ &+ S, \end{aligned}$$

gdzie S oznacza szereg dopełniający

$$\Xi_5 \, \varphi x^{5/\xi} + \Xi_6 (\varphi x)^{6/\xi} + \dots .$$

Ilości X, Y, Z, U mają tu znaczenia następujące:

$$\begin{aligned} X = 12 \frac{dF(x)}{dx}\frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{d^5F(x)}{dx^5} - 15 \frac{dF(x)}{dx}\left(\frac{d^4F(x)}{dx^4}\right)^2 \\ + 60 \frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{d^4F(x)}{dx^4} - 18\left(\frac{d^2F(x)}{dx^2}\right)^2\frac{d^5F(x)}{dx^5} - 40\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = 6 \frac{dF(x)}{dx}\frac{d^4F(x)}{dx^4}\frac{d^5F(x)}{dx^5} - 4\frac{dF(x)}{dx}\frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{d^6F(x)}{dx^6} \\ + 6\left(\frac{d^2F(x)}{dx^2}\right)^2\frac{d^6F(x)}{dx^6} - 12\frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{d^5F(x)}{dx^5} \\ + 20\left(\frac{d^3F(x)}{dx^3}\right)^2\frac{d^4F(x)}{dx^4} - 15\frac{d^2F(x)}{dx^2}\left(\frac{d^4F(x)}{dx^2}\right)^2, \end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} Z = 5 \frac{dF(x)}{dx}\frac{d^4F(x)}{dx^4}\frac{d^6F(x)}{dx^6} - 6\frac{dF(x)}{dx}\left(\frac{d^5F(x)}{dx^5}\right)^2 \\ + 15\frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{d^4F(x)}{dx^4}\frac{d^5F(x)}{dx^5} - 10\frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{d^6F(x)}{dx^6} \\ + 20\left(\frac{d^3F(x)}{dx^3}\right)^2\frac{d^5F(x)}{dx^5} - 25\frac{d^3F(x)}{dx^3}\left(\frac{d^4F(x)}{dx^4}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = 36\frac{d^2F(x)}{dx^2}\left(\frac{d^5F(x)}{dx^5}\right)^2 - 120\frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{d^4F(x)}{dx^4}\frac{d^5F(x)}{dx^5} \\ + 40\left(\frac{d^3F(x)}{dx^3}\right)^2\frac{d^6F(x)}{dx^6} - 30\frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{d^4F(x)}{dx^4}\frac{d^6F(x)}{dx^6} + 75\left(\frac{d^4F(x)}{dx^4}\right)^3. \end{aligned}$$

Jest tedy:

$$u = \frac{120X}{U}, \quad v = \frac{60Y}{U}, \quad w = \frac{12Z}{U}.$$

Wzory te, według wskazówek Wrońskiego, obliczył Durutte [1]).

4. Poprzedni opis postępowania w trzech pierwszych przypadkach wskazuje już, w jaki sposób przedstawia się metoda pierwszorzędna, gdy idzie o oznaczenie przybliżenia stopnia dowolnego ω-go. Wtedy mamy funkcye tworzące

[1]) Hoëné-Wroński, Accomplissement de la réforme de la mécanique céleste. Supplément, str. 63—66, (1851 r.)

$$\Omega_1 = \frac{x-a}{n_1+x},\ \Omega_2 = \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} \dots \Omega_\omega = \frac{(x-a)^\omega}{(n_1+x)(n_2+x)\dots(n_\omega+x)},$$

w których należy parametry $n_1, n_2, n_3 \dots n_\omega$ oznaczyć z warunku

$$W(D\Omega_1, D\Omega_2, D\Omega_3 \dots D\Omega_\omega, DF) = 0.$$

To doprowadza do równania różniczkowego

$$F^{(\omega+1)}(x)\, u_\omega + F^{(\omega)}(x)\, u_{\omega-1} + \dots + F^{(2)}(x)\, u_1 + F^{(1)}(x),$$

w którem

$$F^{(i)}(x) = \frac{1}{i!}\frac{d^i F}{dx_i};$$

ilości zaś $u_\omega, u_{\omega-1}, \dots$ są sumami iloczynów czynników

$$n_1 + x,\ n_2 + x, \dots, n_\omega + x,$$

wziętych odpowiednio po ω, po $\omega-1$, i t. d.

Różniczkując to równanie $\omega-1$, razy otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}
&F^{(\omega+1)}(x)\, u_\omega + F^{(\omega)}(x)\, u_{\omega-1} + \dots + F^{(2)}(x)\, u_1 + F^{(1)}(x) = 0\\
&F^{(\omega+2)}(x)\, u_\omega + F^{(\omega+1)}(x)\, u_{\omega-1} + \dots + F^{(3)}(x)\, u_1 + F^{(2)}(x) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F^{(2\omega)}(x)\, u_\omega + F^{(2\omega-1)}(x)\, u_{\omega-1} + \dots + F^{(\omega+1)}(x)\, u_1 + F^{(\omega)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Z tego układu ω równań znajdziemy wartości na $u_\omega, u_{\omega-1}, \dots$. Oznaczając wrońskian

$$\begin{vmatrix}
F^{(\omega+1)}(x), & F^{(\omega)}(x) & \dots & F^{(2)}(x)\\
F^{(\omega+1)}(x), & F^{(\omega+1)}(x) & \dots & F^{(3)}(x)\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
F^{(2\omega)}(x), & F^{(2\omega-1)}(x) & \dots & F^{(\omega+1)}(x)
\end{vmatrix}$$

przez V, wrońskian zaś, otrzymamy z poprzedniego przez zastąpienie elementów kolumny λ-ej elementami: $-F'x, -F''(x) \dots - F^\omega(x)$, przez V_λ, otrzymamy

$$u_\omega = \frac{V}{V_1},\quad u_{\omega-1} = \frac{V}{V_2} \dots u_1 = \frac{V}{V_\omega}. \tag{18}$$

Stąd już moglibyśmy otrzymać same ilości $n_1 + x, n_2 + x, \dots n_\omega + x$, rozwiązując równanie stopnia ω-go, którego współczynnikami są $-\frac{V}{V_\omega}$, $+\frac{V}{V_{\omega-1}}, \dots$ i t. d. Lecz nie ma potrzeby rozwiązywania tego równania. W samej rzeczy szukana część rozwinięcia jest:

$$A_1 \frac{x-a}{n_1+x} + A_2 \frac{(x-a)}{(n_1+x)(n_2+x)} + \dots + A_\omega \frac{(x-a)^\omega}{(n_1+x)(n_2+x)\dots(n_\omega+x)},$$

gdzie współczynnik

$$A_\mu = \frac{W(D_a\Omega_1, D_a\Omega_2, \dots D_a\Omega_{\mu-1}, D_a F)}{W(D_a\Omega_1, D_a\Omega_2, \dots D_a\Omega_{\mu-1}, D_a\Omega_\mu)}.$$
$$(\mu = 1, 2 \dots \omega)$$

Zważywszy, że

$$D_a^s \Omega_\lambda \begin{cases} = 0, \text{ jeżeli } s < \lambda;\\[4pt] = 1.2\dots\lambda \dfrac{1}{(n_1+a)(n_2+a)\dots(n_\lambda+a)}, \text{ jeżeli } s = \lambda;\\[8pt] = s(s-1)\dots(s-\lambda+1)\dfrac{1}{(n_1+a)(n_2+a)\dots(n_\lambda+a)} \text{ jeżeli } s > \lambda, \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$W(D_a\Omega_1\, D_a\Omega_2 \dots D_a\Omega_\mu)$$
$$= 1!\,2!\dots\mu!\ \frac{1}{(n_1+a)} \cdot \frac{1}{(n_1+a)(n_2+a)} \dots \frac{1}{(n_1+a)(n_2+a)\dots(n_\mu+a)}.$$

Rozkładając licznik według elementów ostatniej kolumny i uwzględniając dopieroco napisaną wartość mianownika, otrzymamy następujące wyrażenie współczynnika A_μ:

$$\begin{aligned}
A_\mu = (n_1+a)(n_2+a)\dots(n_\mu+a)\Big\{&\frac{D_a^\mu F}{1.2\dots\mu} + \frac{D_a^{\mu-1}F}{1.2\dots(\mu-1)}(n_1+a+n_2+a\dots+n_{\mu-1}+a)\\
&+ \frac{D_a^{\mu-1}F}{1.2\dots(\mu-2)}((n_1+a)(n_2+a) + (n_1+a)(n_3+a)\dots + (n_{\mu-2}+a)(n_{\mu-1}+a))\\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+ \frac{D_a F}{1}(n_1+a)(n_2+a)\dots(n_{\mu-1}+a)\Big\}.
\end{aligned}$$

Pojedyńczy wyraz rozwinięcia

$$A_\mu \frac{(x-a)^\mu}{(n_1+x)\,(n_2+x)\ldots(n_\mu+x)}$$

przy uwzględnieniu wartości współczynnika, daje się przedstawić pod postacią wielomianu

$$M_\mu \frac{D_a^\mu F}{1.2\ldots\mu}(x-a)^\mu + M_{\mu-1}\frac{D_a^{\mu-1} F}{1.2\ldots\mu-1}(x-a)^{\mu-1} + \ldots + M_1 \frac{D_a F}{1}(x-a),$$

gdzie współczynniki $M_\mu, M_{\mu-1}, \ldots, M_1$ mają następujące wartości:

$$M_\mu = (n_\mu+a)\,(n_1+a)\,(n_2+a)\,.\,(n_{\mu-1}+a)\frac{1}{(n_1+x)\,(n_2+x)\,.\,(n_\mu+x)}$$

$$M_{\mu-1} = (n_\mu+a)\,\{(n_1+a)\ldots(n_{\mu-2}+a) + (n_2+a)\ldots(n_{\mu-1}+a) + \}\ldots$$
$$\cdot\frac{(x-a)}{(n_1+x)\,(n_2+x)\,.\,(n_\mu+x)}$$

. . . .

$$M_1 = (n_\mu+a)\frac{(x-a)^{\mu-1}}{(n_1+x)(n_2+x)\ldots(n_\mu+x)}.$$

Po wprowadzeniu tych wartości i uporządkowaniu sumy według $D_a^\omega F, D_a^{\omega-1}, \ldots, D_a F$, otrzymamy następujące rozwinięcie funkcyi $F(x)$:

$$\begin{aligned}F(x) = F(a) &+ \frac{D_a F}{1} P_1 . (x-a) + \frac{D_a^2 F}{1\,.\,2} P_2 \,.\, (x-a)^2 \\ &+ \frac{D_a^3 F}{1.2.3} P_3 \,.\, (x-a)^3 + \ldots + \frac{D_a^\omega F}{1\,.\,2\ldots\omega} P_\omega \,.\, (x-a)^\omega;\end{aligned} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= 1-(x-a)^\omega \frac{1}{u_\omega}\\
P_2 &= 1-(x-a)^{\omega-1}\frac{u_1}{u_\omega} + \frac{\omega-1}{1}(x-a)^\omega \frac{1}{u_\omega}\\
P_3 &= 1-(x-a)^{\omega-2}\frac{u_2}{u_\omega} + \frac{\omega-2}{1}(x-a)^{\omega-1}\frac{u_1}{u_\omega} - \frac{(\omega-2)(\omega-1)}{1\,.\,2}(x-a)^\omega \frac{1}{u_\omega}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_\omega &= 1-(x-a)\frac{u_{\omega-1}}{u_\omega} + (x-a)^2\frac{u_{\omega-2}}{u_0} + \ldots + (-1)^\omega (x-a)^\omega \frac{1}{u_\omega}
\end{aligned}\right\} (20)$$

gdzie $u_\omega, u_{\omega-1}, \ldots, u$, są funkcyami pochodnych funkcyi danej, określonemi za pomocą równań (18).

Wzory (19) i (20) są ogólnemi wzorami metody „pierwszorzędnej" i przedstawiają przybliżenie stopnia ω-go.

5. Szereg dopełniający, odpowiadający temu przybliżeniu, przy uwzględnieniu równania warunkowego, będzie następujący:

$$\Xi_{\omega+2}\,\varphi(x)^{\omega+2/\xi} + \Xi_{\omega+3}\,\varphi(x)^{\omega+3/\xi} + \ldots$$

Dajmy, że $\xi = 0$, t. j. że funkcye tworzące szeregu dopełniającego są kolejnemi potęgami $\varphi(x)^{\omega+2}, \varphi(x)^{\omega+3}\ldots$ funkcyi $\varphi(x)$; niechaj jeszcze

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{n+x},$$

gdzie n jest stałą taką, że wartość funkcyi $\varphi(x)$ pozostaje mniejsza od jedności w granicach badania.

Na podstawie wzorów (2) otrzymamy wyrażenie współczynnika tego szeregu:

$$\Xi_{\omega+\varrho} = \frac{W\,(D\Omega_1\, D\Omega_2\ldots D\Omega_\omega\, D\varphi(x)^{\omega+1}\ldots D\varphi(x)^{\omega+\varrho-1}\;D\,F(x))}{W\,(D\Omega_1\, D\Omega_2\ldots D\Omega_\omega\, D\varphi(x)^{\omega+1}\ldots D\varphi(x)^{\omega+\varrho-1}\;D\varphi(x)^{\omega+\varrho})},$$
$$\varrho = 2, 3\ldots$$

gdzie wszystkie pochodne są wzięte przy wartości $x = a$.

Funkcye $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\omega$ możemy napisać pod postacią

$$\Omega_1 = P_1\,.\,(x-a) \quad \Omega_2 = P_2\,(x-a)^2\ldots, \Omega_\omega = P_\omega\,.\,(x-a)^\omega;$$

w dalszym ciągu jest

$$\Omega_{\omega+1} = \varphi(x)^{\omega+1},\ \Omega_{\omega+2} = \varphi(x)^{\omega+2}, \ldots$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\varphi_\mu(x) = (x-a)\sqrt[\mu]{P_\mu};$$
$$\mu = 1, 2\ldots\omega,$$

wtedy oczywiście będzie

$$\Omega_1 = \varphi_1(x),\ \Omega_2 = \varphi_2(x)^2\ldots\Omega_\omega = \varphi_\omega(x)^\omega.$$

$$\Xi_{\omega+\varrho}=\frac{W\,(D\varphi_1(x)\,D\varphi_2(x)^2\ldots D\varphi_\omega(x)^\omega\,D\varphi(x)^{\omega+1}\ldots D\varphi(x)^{\omega+\varrho-1}\,DF(x))}{W\,(D\varphi_1(x)\,D\varphi_2(x)^2\ldots D\varphi_\omega(x)^\omega\,D\varphi(x)^{\omega+1}\ldots D\varphi(x)^{\omega+\varrho-1}\,D\varphi(x)^{\omega+\varrho})}\,.$$

Do obliczenia tych współczynników możemy zastosować postępowanie wskazane w № 3. [1])

Wroński podał w tym celu wzory następujące:

$$\Xi_{\omega+\varrho}=(n+a)^{\omega+\varrho}\left\{\frac{D^{\omega+\varrho}\,F\,(x)}{(\omega+\varrho)\,!}+A_{\omega,\varrho}\right\}+\Xi_{\omega,\varrho}\,, \tag{21}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_{\omega,\varrho}=&D_a\,F\,.\,T_{0,\varrho-1}\\ &+\frac{D^2{}_a\,F}{1.2}\left\{T_{1,\varrho-1}-\frac{\varrho-1}{1}\,T_{0,\varrho-2}\right\}\\ &+\frac{D^3{}_a\,F}{1.2.3}\left\{T_{2,\varrho-1}-\frac{\varrho-2}{1}\,T_{1,\varrho-2}+\frac{(\varrho-2)\,(\varrho-1)}{1.2}\,T_{0,\varrho-3}\right\}\\ &+\frac{D^4{}_a\,F}{1.2.3.4}\left\{T_{3,\varrho-1}-\frac{\varrho-3}{1}\,T_{2,\varrho-2}+\frac{(\varrho-3)\,(\varrho-2)}{1.2}\,T_{1,\varrho-3}\right.\\ &\qquad\qquad\left.-\frac{(\varrho-3)\,(\varrho-2)\,(\varrho-1)}{1.2.3.}\,T_{0,\varrho-4}\right\}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{D_a^\omega\,F}{1.2.3\ldots\omega}\left\{T_{\omega-1,\varrho-1}-T_{\omega-2,\varrho-2}+T_{\omega-3,\varrho-3}+\ldots+(-1)^\omega\,T_{0,\varrho-\omega}\right\}; \end{aligned} \tag{22}$$

$$T_{\lambda,\varrho-\mu}=\frac{1}{(\varrho-\mu)!}\,D^{\varrho-\mu}\left(\frac{u_\lambda}{u_\omega}\right); \tag{23}$$

u_λ, u_ω mają znaczenie określone wzorami (18);

$$\begin{aligned} \Xi_{\omega,\varrho}=&\frac{\omega+\varrho-1}{1}\,\Xi_{\omega+\varrho-1}-\frac{(\omega+\varrho-1)^{2|-1}}{1.2}\,\Xi_{\omega+\varrho-2}\\ &+\frac{(\omega+\varrho-1)^{3|-1}}{1.2.3}\,\Xi_{\omega+\varrho-3}\ldots+(-1)^\mu\,\frac{(\omega+\varrho-1)^{\varrho-1|-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\mu-1}\,\Xi_{\omega+1}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Wzorów tych dowieść można najłatwiej za pomocą sposobu, podanego przez Hanegraeffa [2]).

[1]) Hoëne-Wroński, Réforme des mathématiques pp. 314, 315.
[2]) Hanegraeff. Méthode générale d'intégration, Paryż, 1856.

Oznaczmy we wzorze (19) sumę wyrazów, począwszy od drugiego, przez $\boldsymbol{\Sigma}_\omega$, szereg zaś dopełniający przez $S_{\omega+1}$; będzie tedy

$$F\,(x)=F\,(a)+\boldsymbol{\Sigma}_\omega+S_{\omega+1}\,, \tag{25}$$

gdzie

$$\begin{aligned} S_{\omega+1}=&\,\Xi_{\omega+1}\,\varphi\,(x)^{\omega+1}+\Xi_{\omega+2}\,\varphi\,(x)^{\omega+2}+\ldots\,\Xi_{\omega+\varrho}\,\varphi\,(x)^{\omega+\varrho}\\ &+\Xi_{\omega+\varrho+1}\,\varphi\,(x)^{\omega+\varrho+1}+\ldots\ldots \end{aligned} \tag{26}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} &\Xi_{\omega+\varrho}+\Xi_{\omega+\varrho+1}\,\varphi\,(x)+\Xi_{\omega+\varrho+2}\,\varphi\,(x)^2+\ldots\\ &=\frac{F\,(x)-[F\,(a)+\boldsymbol{\Sigma}_\omega]-[S_{\omega+1}-\Xi_{\omega+\varrho}\,\varphi\,(x)^{\omega+\varrho}+\ldots]}{\varphi\,(x)^{\omega+\varrho}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Przy $x=a$ pierwsza strona tej tożsamości staje się równą $\Xi_{\omega+\varrho}$, druga przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$; otrzymamy przeto wartość szukaną współczynnika $\Xi_{\omega+\varrho}$, biorąc stosunek pochodnej rzędu $(\omega+\varrho)$-go licznika do pochodnej tegoż rzędu mianownika strony drugiej przy wartości $x=a$.

Z wzoru (19) otrzymujemy przy pomocy wzoru Leibniza na pochodną iloczynu:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\omega+\varrho}\,[Fa+\boldsymbol{\Sigma}_\omega]}{dx^{\omega+\varrho}}=&(\omega+\varrho)D_aF.\frac{d^{\omega+\varrho-1}\,P_1}{dx^{\omega+\varrho-1}}+\frac{(\omega+\varrho)(\omega+\varrho-1)}{1\,.\,2}\,D_a^2\,F.\frac{d^{\omega+\varrho-2}\,P_2}{dx^{\omega+\varrho-2}}\\ &+\frac{(\omega+\varrho)\,(\omega+\varrho-1)\,(\omega+\varrho-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,D_a^3\,F\,.\,\frac{d^{\omega+\varrho-3}\,P_3}{dx^{\omega+\varrho-3}}+\ldots\\ &+\frac{(\omega+\varrho)\,(\omega+\varrho-1)\ldots(\varrho+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\omega}\,D_a^\omega\,F\,.\,\frac{d^\varrho\,P_\omega}{dx^\varrho}\,, \end{aligned} \tag{28}$$

gdzie pochodną po stronie pierwszej, jako też pochodne funkcyj $P_1, P_2, \ldots P_\omega$ po drugiej stronie, należy rozumieć przy wartości $x=a$.

Pochodne funkcyj P_1, P_2, ... P_ω przy wartości $x=a$ znajdziemy z wzorów (20), stosując również wzór Leibniza. Przy uwzględnieniu związku (23), dochodzimy tym sposobem bezpośrednio do równań:

$$\frac{d^{\omega+\varrho-1}\,P_1}{dx^{\omega+\varrho-1}}=-(\omega+\varrho-1)!\;T_{0,\varrho-1}\,,$$

$$\frac{d^{\omega+\varrho-2}\,P_2}{dx^{\omega+\varrho-2}}=-(\omega+\varrho-2)!\left\{T_{1,\varrho-1}-\frac{(\omega-1)}{1}\,T_{0,\varrho-2}\right\},$$

$$\frac{d^{\omega+\varrho-3}P_3}{dx^{\omega+\varrho-3}} = -(\omega+\varrho-3)!\left\{T_{2,\varrho-1} - \frac{\omega-2}{1}T_{1,\varrho-2} + \frac{(\omega-2)(\omega-1)}{1\,.\,2}T_{1,\varrho-3}\right\},$$

. . . .

$$\frac{d^{\varrho}P_{\omega}}{dx^{\varrho}} = -\varrho!\,\{T_{\omega-1,\varrho-1} - T_{\omega-2,\varrho-2} + T_{\omega-3,\varrho-3} - \ldots + (-1)^{\omega-1}T_{0,\varrho-\omega}\}.$$

Podstawiając te wartości w równaniu (28), otrzymujemy, przy uwzględnieniu wzoru (22):

$$\frac{d^{\omega+\varrho}[F(a)+\Sigma_{\omega}]}{dx^{\omega+\varrho}} = -(\omega+\varrho)!\,A_{\omega,\varrho}. \tag{29}$$

Z kolei oznaczmy wartość pochodnej

$$\frac{d^{\omega+\varrho}}{dx^{\omega+\varrho}}\{S_{\omega+1} - (\Xi_{\omega+\varrho}\,\varphi(x)^{\omega+\varrho} + \Xi_{\omega+\varrho}\,\varphi(x)^{\omega+\varrho+1} + \ldots)\}. \tag{30}$$

Przy wartości $x=a$ jest:

$$S_{\omega+1} - (\Xi_{\omega+\varrho}\,\varphi(x)^{\omega+\varrho} + \Xi_{\omega+\varrho}\,\varphi(x)^{\omega+\varrho+1} + \ldots)$$
$$= \Xi_{\omega+1}\,\varphi(x)^{\omega+1} + \Xi_{\omega+2}\,\varphi(x)^{\omega+2} + \ldots + \Xi_{\omega+\varrho-1}\,\varphi(x)^{\omega+\varrho-1},$$

gdzie

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{n+x}.$$

Pochodna rzędu $(\omega+\varrho)$-go funkcyi

$$\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^{\omega+\lambda}, \qquad (\lambda=1,2,3\ldots\varrho-1)$$

przy $x=a$, sprowadza się do jednego wyrazu

$$(-1)^{\varrho-\lambda}.\,\frac{(\omega+\varrho)!\,(\omega+\lambda)\,.\,(\omega+\lambda+1)\ldots(\omega+\varrho+1)}{(\varrho-\lambda)!\,(n+a)^{\omega+\varrho}}.$$

Kładąc tu kolejno $\lambda=1,2,3\ldots\varrho-1$, otrzymujemy na wartość pochodnej (30), po uwzględnieniu równania (24), wyrażenie

$$-\frac{(\omega+\varrho)!}{(n+a)^{\omega+\varrho}}\,\Xi_{\omega,\varrho}$$

Ponieważ pochodna

$$\frac{d^{\omega+\varrho}\,\varphi(x)^{\omega+\varrho}}{dx^{\omega+\varrho}},$$

przy wartości $x=a$, jest równa

$$\frac{(\omega+\varrho)!}{(n+a)^{\omega+\varrho}},$$

więc ostatecznie szukana wartość nieoznaczona pochodnej rzędu $(\omega+\varrho)$-go drugiej strony wyrażenia (27) sprowadza się do

$$(n+a)^{\omega+\varrho}\left\{\frac{D_a^{\omega+\varrho}F(x)}{(\omega+\varrho)!} + A_{\omega,\varrho}\right\} + \Xi_{\omega,\varrho},$$

co stwierdza wzór (21), podany przez W r o ń s k i e g o.

6. Zastosujemy ten wzór ogólny do przybliżeń pierwszego, drugiego i trzeciego, podanych w № **3.**

Dla przybliżenia pierwszego $\omega=1$; wzór (21) daje

$$\Xi_{1+\varrho} = (n+a)^{\varrho+1}\left\{\frac{D^{\varrho+1}F}{(\varrho+1)!} + A_{1,\varrho}\right\} + \Xi_{1,\varrho};$$

z wzorów (22) i (23) otrzymujemy:

$$A_{1\,\varrho} = D_a\,F\,.\,T_{0,\varrho-1} = D_a\,F\,.\,\frac{1}{(\varrho-1)!}\,D^{\varrho-1}\left(\frac{1}{u_1}\right).$$

Dla pierwszego przybliżenia mieliśmy

$$u_1 = n_1 + x = -2\,\frac{D\,F(x)}{D^2\,F(x)}, \qquad \text{stąd}$$

$$A_{1,\varrho} = \frac{1}{2.(\varrho-1)!}\,D_a\,F\,.\,D_a^{\varrho-1}\left(\frac{D^2\,F}{DF}\right).$$

Z wzoru (24) otrzymujemy

$$\Xi_{1,\varrho} = \frac{\varrho}{1}\,\Xi_{\varrho} - \frac{\varrho(\varrho-1)}{1\,.\,2}\,\Xi_{\varrho-1} + \frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Xi_{\varrho-2} - \ldots + (-1)^{\varrho}\,\Xi_2.$$

Współczynnik $\Xi_{1+\varrho}$ szeregu dopełniającego w przybliżeniu pierwszem będzie miał wyrażenie następujące:

$$\Xi_{1+\varrho} = (n+a)^{\varrho+1} \left\{ \frac{D_a^{\varrho+1} F}{(\varrho+1)!} - \frac{1}{2 \,.\, (\varrho-1)!} D_a F \,.\, D_a^{\varrho-1} \left(\frac{D^2 F}{D F} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\varrho}{1} \Xi_\rho - \frac{\varrho(\varrho-1)}{1 \,.\, 2} \Xi_{\rho-1} + \frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \Xi_{\rho-2} - \ldots + (1)^\rho \Xi_2 \,. \tag{31}$$

W przybliżeniu drugiem jest $\omega=2$; przy tej wartości wzory (22), (23) i (24) dają następujące wyrażenie współczynnika szeregu dopełniającego:

$$\Xi_{2+\rho} = (n+a)^{\rho+2} \left\{ \frac{D_a^{\omega+2} F}{(\omega+2)!} + \frac{1}{(\varrho-1)!} D_a F \,.\, D_a^{\rho-1} \left(\frac{1}{u_2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2 \,.\, (\varrho-2)!} D^2{}_a F \left[\frac{1}{\varrho-1} D_a^{\rho-1} \left(\frac{u_1}{u_2} \right) - D_a^{\rho-2} \left(\frac{1}{u_2} \right) \right] \right\} \tag{32}$$

$$+ (\varrho+1) \Xi_{\rho+1} - \frac{(\varrho+1)\varrho}{1 \,.\, 2} \Xi_\rho + \ldots + (-1)^\rho \varrho (\varrho+1) \Xi_3 \,.$$

gdzie u_1, u_2 mają wartości, określone za pomocą równań (13).

Dla przybliżenia trzeciego przy $\omega=3$, wyrażenie współczynnika szeregu dopełniającego będzie [1]):

$$\Xi_{3+\rho} = (n+a)^{\rho-3} \left\{ \frac{D_a^{\rho+3} F}{(\varrho+3)!} + \frac{1}{(\varrho-1)!} D_a F \,.\, D_a^{\rho-1} \left(\frac{1}{w} \right) \right.$$

$$+ \frac{D_a^2 F}{2!} \left[\frac{D_a^{\rho-1} \left(\frac{u}{w} \right)}{(\varrho-1)!} - 2 \frac{D_a^{\rho-2} \left(\frac{1}{w} \right)}{(\varrho-2)!} \right] \tag{33}$$

$$\left. + \frac{D_a^3 F}{3!} \left[\frac{D_a^{\rho-1} \left(\frac{v}{w} \right)}{(\varrho-1)!} - \frac{D_a^{\rho-2} \left(\frac{u}{w} \right)}{(\varrho-2)!} + \frac{D_a^{\rho-3} \left(\frac{1}{w} \right)}{(\varrho-3)!} \right] \right\}$$

$$+ \frac{\varrho+2}{1} \Xi_{\rho+2} - \frac{(\varrho+2)(\varrho+1)}{1 \,.\, 2} \Xi_{\rho+1} + \ldots + (-1)^\rho (\varrho+1)(\varrho+2) \Xi_4 \,.$$

7. W r o ń s k i przypisywał wielką doniosłość metodzie „najwyższej“ i „pierwszorzędnej“, uważając je w pierwszym rzędzie za ogólną metodę całkowania funkcyj, danych za pomocą ich pochodnych lub różniczek. Jeżeli pochodna funkcyi wyraża się jako wielomian całkowity

[1]) H o ë n é - W r o ń s k i, Accomplissement de la réforme etc. l. c.

$$F'(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots + M x^m,$$

to metoda „pierwszorzędna“ daje w samej rzeczy wyrażenie samej funkcyi $F(x)$ jako wielomianu całkowitego, lecz stosowanie jej w przypadku tak prostym jest oczywiście zupełnie zbyteczne. Gdy zaś pochodna wyraża się za pomocą funkcyi wymiernej lub algebraicznej, której żadna z pochodnych nie znika, wtedy metoda „pierwszorzędna“ daje wyrażenia tej funkcyi, t. j. prowadzi do oznaczenia kolejnych jej postaci. Jako przykład podaje W r o ń s k i funkcyą, określoną za pomocą różniczki

$$dF(x) = \frac{dx}{x},$$

która to funkcya, jak wiadomo, jest logarytmem. Stosując wzory, podane w poprzednich numerach, do tego przypadku (wykonanie rachunków pozostawiamy czytelnikowi), otrzymujemy następujące trzy pierwsze przybliżenia funkcyi $\log x$ wraz z szeregami dopełniającemi:

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)\ (x-a)}{2\, a\, x}$$

$$- \frac{4}{1} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^5 + \frac{3}{7} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{4}{9} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \ldots \right\};$$

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)\ (x-a)}{12\, a^2\, x^2} \{8ax - (a^2+x^2)\}$$

$$+ \frac{16}{3} \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^5 + \frac{3}{7} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{6}{9} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \frac{10}{11} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{11} + \ldots \right\};$$

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)\ (x-a)}{60\, a^3\, x^3} \{(x-a)^4 + 5\, ax\, [8\, ax - (a^2+x^2)]\}$$

$$- \frac{32}{5} \left\{ \frac{1}{7} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{4}{9} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \frac{10}{11} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{11} + \frac{20}{13} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{13} + \ldots \right\}.$$

Wzory te wyprowadziliśmy na innej drodze w tomie IV-ym „Prac matematyczno-fizycznych“ [1]).

Następne postaci otrzymać można z łatwością. W miarę postępu, szeregi dopełniające zaczynać się będą od coraz wyższych potęg ułamka $\frac{x-a}{x+a}$, tak, że gdy ten ułamek jest niewielki, można wtedy ograniczyć się na

[1]) Str. 88—94.

samem przybliżeniu. Tak np. dla $\omega=6$ pierwszy wyraz szeregu dopełniającego zawierać będzie potęgę trzynastą ułamka $\frac{x-a}{x+a}$. Jeżeli za podstawę układu logarytmów przyjmiemy, jak to czyni Wroński [1]) liczbę 2, biorąc za kolejne wartości funkcyi $F(a)$ potęgi liczby 2, wtedy oczywiście w pierwszym wyrazie szeregu dopełniającego powyższy ułamek nie będzie większy od $\frac{1}{5}$, a więc dla szóstego stopnia przybliżenia wyraz pierwszy szeregu dopełniającego musi być mniejszy od

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{13} = 0{,}0000000008192\,.$$

Gdy więc zadowolnimy się siedmioma cyframi dziesiętnemi, to będziemy mogli pominąć zupełnie szereg dopełniający i zachować samo tylko przybliżenie. Tym sposobem za pomocą bardzo łatwego rachunku można będzie ułożyć tablicę logarytmów w układzie dwójkowym. Stąd zaś znanym sposobem przejść można do układu dziesiętnego logarytmów [2]).

Innego przykładu zastosowania swej metody Wroński, o ile wiem, nie podał; Hanegraeff, który metodę „najwyższą“ również za ogólną metodę całkowania uważa, powtórzył tylko przykład podany przez Wrońskiego [3]).

Jako najbliższe, nastręcza się tu zastosowanie do funkcyj, określonych za pomocą różniczek

$$\frac{dx}{1+x^2}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

które powinno dać kolejne przybliżenia funkcyj: arc tg x, arc sin x oraz całki eliptycznej.

Jeszcze w „Filozofii Technii“ wskazał Wroński zastosowanie metody „najwyższej“ do zagadnień mechaniki niebieskiej. W ruchu tak zwanym perturbarcyjnym elementy ciał niebieskich są funkcyami czasu; mając wyrażenia pochodnych tych funkcyj oraz ich wartości dla pewnej epoki, można za pomocą metody „najwyższej“ otrzymać kolejne przybliżenia wartości samego elementu. W „Reformie wiedzy ludzkiej“ powraca Wroński do tegoż przedmiotu. Jeżeli $F(x)$ jest jednym z elementów w funkcyi czasu, $F(a)$ wartością tego elementu w epoce, wtedy we wzorze (25) Σ_ω przedstawiać będzie ω—e przybliżenie, co stanowi *równanie peryodyczne*, szereg zaś dopełniający $S_{\omega+1}$ przedstawia *równanie wiekowe* dla tego ruchu. Z tego sposobu przedstawienia wynika, że równanie wiekowe zależy od stopnia ω przybliżenia, i że wraz z wzrostem liczby ω otrzymujemy coraz ściślejsze równania peryodyczne. Dla małych wartości ω szereg dopełniający może być mało zbieżnym a nawet rozbieżnym dla wartości odległych od epoki; dla wartości ω większych okoliczność ta usunąć się daje. Bliższe rozwinięcie tej metody oraz specyalne zastosowanie do mechaniki niebieskiej przekracza już zakres niniejszego artykułu.

1) Réforme des mathématiques, p. 340.

2) Wroński oblicza, że pracę tę może uskutecznić jeden człowiek w ciągu sześciu miesięcy. Oczywiście dziś, skoro tablice logarytmów są już gotowe, praca ta byłaby zbyteczną.

3) Hanegraeff, l. c.

8. Metoda najwyższa w postaci tu przedstawionej, jako „metoda pierwszorzędna“ nie odsłania nam istoty funkcyj badanych, ich własności zasadniczych i osobliwości; jest ona w gruncie rzeczy metodą rachunkową, nie zaś metodą badania natury funkcyj w znaczeniu nowoczesnem. Już w zastosowaniu do funkcyj, danych za pomocą różniczek, wymaga dość skomplikowanych rachunków, a w rozszerzeniu do funkcyj, określonych przez równania różniczkowe, wymagałaby, oczywiście, rachunków jeszcze bardziej złożonych.

Warszawa, w styczniu 1894.