grywają pod tym względem pewne własności iskry, od których zależy i jej postać zewnętrzna. Przy małej odległości pomiędzy kulkami trudno otrzymać białą, wyraźnie zarysowaną iskrę; nawet zaraz po wyczyszczeniu kulek iskra jest słabo fioletową, posiada rozgałęzienia i t. p. Tymczasem iskra dłuższa przez czas dłuższy zachowuje swój kształt prostoliniowy, trzask i jaskrawość. Jeszcze Hertz podał, jako niezbędny warunek udania się jego pięknych doświadczeń, by iskra pierwotna była wyraźna i jaskrawa. Teraz, sądzę, można łatwo zrozumieć, dla czego to zachodzi. Otóż iskra o takich własnościach posiada, jak wykazują nasze badania, opór mniejszy, niż iskra fioletowa, ze słabym trzaskiem, jaka otrzymuje się przy niedość czystej powierzchni kulek i niewielkiej odległości pomiędzy nimi; lepiej przeto czyni zadość warunkowi, od którego zależy możność powstania wahań elektrycznych.

Można przeprowadzić szereg badań nieco odmiennych. Mianowicie, pozostawiając opór w wibratorze wtórnym bez zmiany, można zmieniać długość iskry w wibratorze pierwotnym. W takim razie przy pewnej długości iskry, gdy opór jej równa się oporowi w wibratorze wtórnym, otrzymamy również najmniejsze wychylenie w galwanometrze. Szereg podobnych doświadczeń, wprawdzie niezupełny, znajdujemy u Bjerknesa[1]). Przy swych badaniach Bjerknes zauważył, że przy stopniowem powiększaniu długości iskry pierwotnej, wychylenia elektrometru zmniejszały się. Warunki jego doświadczeń były odmienne od tych, dla jakich przeprowadziłem me badania, wskutek tego i zależność pomiędzy oporem iskry i oporem we wtórnym wibratorze przy najmniejszości natężenia wahań będzie inna, niż wmych doświadczeniach. Poważam się jednak sądzić, że tak ten objaw, którego Bjerknes dokładnie objaśnić nie jest w stanie, jak i zaobserwowane przez niego coraz znaczniejsze zmniejszanie się amplitudy wahań przy powiększaniu długości iskry, które on sam objaśnia powiększaniem się oporu iskry wraz z jej długością, można zadawalniająco wytłómaczyć, przyjąwszy pod uwagę zjawisko interferencyi dwóch wahań w wibratorze wtórnym. Aby jednak można było coś stanowczego w tej kwestyi powiedzieć, należałoby rozważyć ją dokładniej teoretycznie i posiadać wyniki większej ilości doświadczeń, niż ja tymczasowo podać jestem w stanie.

Warszawa, w styczniu 1894 r.
Pracownia fizyczna Uniwersytetu Warszawskiego.

---

[1]) l. c. na str. 90.

O METODZIE NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

NAPISAŁ

W. GOSIEWSKI.

Zadaniem pracy niniejszej jest uzasadnienie metody najmniejszych kwadratów, oparte na tem jedynie założeniu, że prawdopodobieństwo błędu jest funkcyą tegoż błędu. Inne założenia Gaussa, a mianowicie: że błąd najprawdopodobniejszy, albo raczej prawdopodobny błąd systematyczny jest zerem, oraz że wartość niewiadomej najprawdopodobniejsza równa się średniej arytmetycznej jej miar dostrzegalnych, w dowodzeniu tem są pominięte. Natomiast przyjmuje się jako zasadę oczywistą, że wartość niewiadomej najprawdopodobniejsza powinna odtwarzać niewiadomą, o ile można, najlepiej; bez tego bowiem, wartość niewiadomej najprawdopodobniejsza nieprzedstawiała by żadnego pożytku.

§ 1.

Oznaczmy przez $\varphi(\Delta)$ prawdopodobieństwo błędu Δ, i starajmy się wyznaczyć naturę funkcyi $\varphi(\Delta)$, nie czyniąc przy tem żadnych szczególnych założeń.

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ogólnie x_i, wyobrażają wartości niewiadomej x, dostrzeżone w tych samych warunkach, i godne jednakowego zaufania.

Jak wiadomo, prawdopodobieństwo popełnienia błędów ewentualnych:

$$\Delta_1 = x - x_1, \quad \Delta_2 = x - x_2, \; \ldots, \; \Delta_n = x - x_n,$$

jako zdarzeń niezależnych, równa się iloczynowi

$$P = \varphi(\Delta_1)\, \varphi(\Delta_2) \ldots \varphi(\Delta_n).$$

Skoro jednak wartości x_i już są dostrzeżone, P wyobraża prawdopodobieństwo popełnienia tych samych błędów Δ_i, przy powtórnem dokonywaniu szeregu n dostrzeżeń. Zdarzenia tego spodziewać się więc należy tem snadniej, im P większe, a najsnadniej wtedy, gdy niewiadoma x przywodzi P do największości. Będzie to wartość niewiadomej *najprawdopodobniejsza*. Oznaczmy ją przez $\bar{x}$ i załóżmy odpowiednio $\bar{\Delta}_i = \bar{x} - x_i$. Wówczas na wyznaczenie $\bar{x}$ posiadamy równanie

$$\sum_i \frac{d \lg \varphi(\bar{\Delta}_i)}{d\, \bar{\Delta}_i} = 0. \tag{1}$$

Z równania (1) wypływa, że $\bar{x}$ jest funkcyą argumentów x_i, zamieniającą to równanie na tożsamość. Różniczkując tę tożsamość względem x_i, otrzymamy

$$\frac{d^2 \lg \varphi(\bar{\Delta}_i)}{d\, \bar{\Delta}^2_i} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \sum_i \frac{d^2 \lg \varphi(\bar{\Delta}_i)}{d\, \bar{\Delta}^2_i}, \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

skąd łatwo także wynika

$$\sum_i \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} = 1. \tag{3}$$

Jest to równanie zauważone przez Bertranda.

Ale nie dość równania (3) na wyznaczenie funkcyi $\bar{x}$; potrzeba na to jeszcze jednego warunku, któremu by ta funkcya, jako całka równania (3), zadość czyniła.

Zauważmy, że wartości dostrzeżone x_i przyjmujemy, jako dane odpowiednie do wyznaczenia niewiadomej x, na tej jedynie zasadzie, że w razie ewentualnego powtórzenia szeregu n dostrzeżeń, należy się spodziewać pojawienia się tych samych, a nie innych wartości x_i (względnie błędów Δ_i); aby zaś warunkowi temu stało się zadość, o ile można najsnadniej, funkcya $\bar{x}$ powinna odtwarzać niewiadomą x, o ile można najlepiej.

Owóż, jedyną, wiadomą własnością niewiadomej x jest to, że od argumentów x_i wcale nie zależy, t. j. że

$$dx = \sum_i \frac{\partial x}{\partial x_i}\, dx_i = 0$$

przy wszelkich wartościach dx_i, podczas gdy

$$d\bar{x} = \sum_i \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\, dx_i \gtrless 0.$$

Aby więc funkcya $\bar{x}$ odtwarzała niewiadomą x, jak można najlepiej, powinna ona być taką, iżby średnia arytmetyczna kwadratów różniczki $d\bar{x}$, odpowiadających wszystkim układom wartości przyrostów dx_i była możliwie najmniejszą; wtedy bowiem każde wogóle $d\bar{x}$ będzie najbliższe zera, a tem samem i najbliższe dx.

Przyjmując r^2 za wartość największą sumy $\sum_i dx_i^2$, t. j. kładąc

$$\sum_i dx_i^2 \leq r^2,$$

znajdziemy łatwo, że

$$\text{śr. arytm. } d\bar{x}^2 = \frac{r^2}{n+2} \sum_i \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2; \tag{4}$$

że zatem być powinno

$$\sum_i \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 = \textit{minimum}. \tag{5}$$

Chcąc teraz sprawdzić równanie (3) i warunek (5), załóżmy

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i + \varepsilon. \tag{6}$$

Wtedy ε zadość czyni równaniu

$$\sum_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = 0, \tag{7}$$

a warunek (5) daje

$$\frac{1}{n} + \sum_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 = \textit{minimum}. \tag{8}$$

Mamy tedy jednocześnie (7) i (8), skąd oczywiście wynika, że ε jest ilością stałą.

A zatem wyrażenie (6), w którem ε oznacza stałą, wyobraża wartość niewiadomej x najprawdopodobniejszą. Uwzględniając to wyrażenie w równaniu (4), otrzymujemy

$$\text{śr. arytm. } d\bar{x}^2 = r^2 / n\,(n+2),$$

skąd widoczna, że $\bar{x}$ odtwarza niewiadomą x tem lepiej, im n większe, a odtwarza ją w zupełności, gdy $n = \infty$.

§ 2.

Z równań (6) i (2) wynika, że pochodna $d^2 \lg \varphi(\Delta) / d\Delta^2$ jest stałą, a z warunku, że $\bar{x}$ przywodzi P do największości, przekonywamy się, że ta stała jest ujemną. Załóżmy tedy $d^2 \lg \varphi(\Delta) / d\Delta^2 = -2h^2$, a tem samem

$$\frac{d \lg \varphi(\Delta)}{d\Delta} = -2h^2 \Delta + b,$$

rozumiejąc przez b nową stałą.

Przy pomocy tego, z równań (1) i (6) otrzymujemy $b = 2h^2\varepsilon$, zatem także

$$\frac{d \lg \varphi(\Delta)}{d\Delta} = -2h^2 (\Delta - \varepsilon).$$

Stąd okazuje się, że $\varphi(\varepsilon)$ jest największością $\varphi(\Delta)$, t. j. że ε jest *błędem najprawdopodobniejszym*, i że

$$\varphi(\Delta) = \varphi(\varepsilon)\, e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}.$$

Stałą $\varphi(\varepsilon)$ wyznaczymy wreszcie z wiadomego warunku

$$\frac{\varphi(\varepsilon)}{d\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}\, d\Delta = \frac{\varphi(\varepsilon)\sqrt{\pi}}{h d\Delta} = 1,$$

i będzie ostatecznie

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(\Delta-\varepsilon)^2}\, d\Delta. \tag{9}$$

Widzimy zatem, że prawdopodobieństwo $\varphi(\Delta)$ zależy od dwóch stałych, z których jedną — jest błąd najprawdopodobniejszy ε, a drugą — jest prawdopodobieństwo tego błędu $\varphi(\varepsilon) = h\, d\,\Delta / \sqrt{\pi}$. Zamiast jednak tej drugiej, możemy uważać tylko stałą h, albowiem czynnik $d\Delta/\sqrt{\pi}$ jest wiadomy.

§ 3.

Zastosujmy teraz formułę (9) do zadania następującego.

Chcemy oznaczyć niewiadome x_μ, $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, gdy znane są z bezpośrednich dostrzeżeń wartości ich funkcyj liniowych $\sum_\mu a_{i\mu} x_\mu$, $(i = 1, 2, \ldots, n > m)$, które oznaczać będziemy przez l_i.

Na mocy tych danych, posiadamy n równań, postaci

$$\sum_\mu a_{i\mu} x_\mu - l_i = \Delta_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

w których błędy Δ_i są również niewiadomemi.

Na zasadzie formuły (9), prawdopodobieństwo popełnienia układu błędów Δ_i, przy dostrzeganiu wartości l_i, równa się

$$Q = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}\, e^{-h^2 \sum_i (\Delta_i - \varepsilon)^2}\, d\Delta_1\, d\Delta_2 \ldots d\Delta_n. \tag{11}$$

Oznaczając przeto wartości najprawdopodobniejsze niewiadomych x_μ przez $\bar{x}_\mu$, a odpowiednie wartości błędów Δ_i, (10), przez

$$\bar{\Delta}_i = \sum_\mu a_{i\mu} \bar{x}_\mu - l_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

będziemy mieli $\sum_i (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2 = \min. \sum_i (\Delta_i - \varepsilon)^2$, skąd wynikają równania

$$\sum_i a_{i\mu} (\bar{\Delta}_i - \varepsilon) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{13}$$

w liczbie wystarczającej do wyznaczenia m niewiadomych $\bar{x}_\mu$.

Załóżmy teraz

$$x_\mu = \bar{x}_\mu + \xi_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

gdzie ξ_μ wyobrażają błędy popełnione wówczas, gdy za niewiadome x_μ przyjmujemy ich wartości najprawdopodobniejsze $\bar{x}_\mu$. Wtedy, na mocy równań (10) i (12), otrzymujemy

$$\Delta_i = \sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu + \bar{\Delta}_i, \tag{14}$$

a stąd, na mocy równań (13):

$$\sum_i (\Delta_i - \varepsilon)^2 = \sum_i \Big(\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu\Big)^2 + \sum_i (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2. \tag{15}$$

W skutek tego związku, prawdopodobieństwo Q zawiera czynnik

$$e^{-h^2 \sum_i (\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu)^2},$$

do którego jest proporcyonalne prawdopodobieństwo popełnienia błędów ξ_μ, gdy za niewiadome x_μ przyjmiemy wartości $\bar{x}_\mu$. Oznaczmy to prawdopodobieństwo przez R; wtedy będzie

$$R = C\, e^{-h^2 \sum_i (\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu)^2},$$

gdzie stała C zadość czyni warunkowi

$$\frac{C}{d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \sum_i (\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu)^2}\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_m = 1,$$

wyrażającemu, że jeden z możliwych układów błędów ξ_μ jest konieczny.

Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \sum_i (\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu)^2}\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_m = \frac{\sqrt{\pi^m}}{h^m \sqrt{n^m D}},$$

gdzie

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \dots, & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \dots, & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1}, & \alpha_{m2}, & \dots, & \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

a

$$n\alpha_{\mu\nu} = \sum_i a_{i\mu}\, a_{i\nu}, \tag{16}$$

przeto ostatecznie

$$R = \frac{\sqrt{n^m D}\,.\,h^m}{\sqrt{\pi^m}}\, e^{-h^2 \sum_i (\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu)^2}\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_m. \tag{17}$$

Z formuły tej wynika, że wartości

$$max.\ R = \frac{\sqrt{n^m D}\,.\,h^m\,.\,d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_m}{\sqrt{\pi^m}}$$

odpowiadają warunki:

$$\xi_\mu = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \dots m);$$

że zatem $\bar{x}_\mu$ są najprawdopodobniej wartościami prawdziwemi niewiadomych x_μ. A że prócz tego $max.\ R$ rośnie wraz z liczbą n, a dla $n = \infty$ można dobrać $d\xi_\mu$ takie, aby było $lim.\ max.\ R = 1$, przeto $\bar{x}_\mu$ są wartościami prawdziwemi niewiadomych x_μ tem prawdopodobniej, im n większe, a są niemi z pewnością, gdy $n = \infty$.

Aby jednak za pośrednictwem danych l_i, można było rzeczywiście wyznaczyć wartości $\bar{x}_\mu$ oraz błędy prawdopodobne, popełnione na niewiadomych x_μ gdy $\bar{x}_\mu$ bierzemy za x_μ, niezbędną jest znajomość stałych ε, h, których oznaczeniem teraz się właśnie zajmiemy.

§ 4.

Z formuł (11) i (17) wynikają tożsamości następujące:

$$\frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \sum_i (\Delta_i - \varepsilon)^2}\, d\Delta_1\, d\Delta_2 \dots d\Delta_n = 1 \tag{18}$$

$$\frac{\sqrt{n^m D}\,.\,h^m}{\sqrt{\pi^m}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \sum_i (\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu)^2}\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_m = 1 \tag{19}$$

Różniczkując te tożsamości względem h^2 i oznaczając nadzieje matematyczne sum: $\sum_i (\Delta_i - \varepsilon)^2$ i $\sum_i (\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu)^2$ przez poprzedzenie ich znakiem EM, otrzymamy odpowiednio:

$$\frac{n}{2h^2} = EM \sum_i (\Delta_i - \varepsilon)^2.$$

$$\frac{m}{2h^2} = EM\,.\sum_i \Big(\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu\Big)^2,$$

skąd, na zasadzie równania (15), wynika

$$\frac{n-m}{2h^2} = EM\,.\sum_i (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2\,. \tag{20}$$

Różniczkując znowu równania (18) i (19) względem ε i opuszczając czynnik $-h^2$, znajdziemy odpowiednio:

$$EM\frac{d}{d\varepsilon}\sum_i (\Delta_i - \varepsilon)^2 = 0\,, \qquad EM\frac{d}{d\varepsilon}\sum_i\left(\sum_\mu a_{i\mu}\,\xi_\mu\right)^2 = 0\,,$$

a stąd na mocy równania (15):

$$EM\frac{d}{d\varepsilon}\sum_i (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2 = 0\,. \tag{21}$$

Z równań (20) i (21) czytamy, że jak gdyby h było funkcyą ε, a zadanie oznaczenia wartości ε, h przywodziło się do oznaczenia maximum tej funkcyi.

§ 5.

Podzielmy równanie (20) przez $n-m$, a w równaniu (21) wykonajmy różniczkowanie; otrzymamy

$$\frac{1}{2h^2} = EM\,.\,\Sigma\,(\bar{\Delta}_i - \varepsilon)^2 / (n-m) \tag{22}$$

$$EM\,.\sum_i (\bar{\Delta}_i - \varepsilon)\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon} - 1\right) = 0\,. \tag{23}$$

Z równań (13) widoczna, że $\bar{\Delta}_i$ zależy od ε liniowo; oznaczając więc przez $(\bar{\Delta}_i)$ część $\bar{\Delta}_i$ niezależną od ε, będzie

$$\bar{\Delta}_i = (\bar{\Delta}_i) + \frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon}\,\varepsilon\,. \tag{24}$$

Założmy nadto

$$\cos\,\Theta = \frac{EM\,.\sum_i(\bar{\Delta}_i)\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon} - 1\right)}{\sqrt{EM\,.\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2\,.\sum_i\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon} - 1\right)^2}}\,; \tag{25}$$

wtedy, uwzględniając (24) i (25), znajdziemy odpowiednio:

$$\varepsilon = -\cos\,\Theta\,.\sqrt{\frac{EM\,.\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2}{\sum_i\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon} - 1\right)^2}}\,, \tag{26}$$

$$h = \sqrt{\frac{n-m}{2}}\,.\,\frac{1}{\sin\,\Theta\sqrt{EM.\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2}}\,. \tag{27}$$

Z formuł (25), (26) i (27) wynika, że stałe ε, h wyrażają się w funkcyi nadziei matematycznych sum

$$\sum_i(\bar{\Delta}_i)\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon} - 1\right) \quad \text{i} \quad \sum_i(\bar{\Delta}_i)^2\,. \tag{28}$$

Gdybyśmy teraz szereg n dostrzeżeń powtórzyli bardzo wielką liczbę razy, i dla każdej próby oddzielnie obliczyli sumy (28), wówczas średnie arytmetyczne tych sum wyobrażałyby odnośne wartości ich nadziei matematycznych, tem dokładniejsze, im liczba prób była większa. Owóż, wartości stałych ε, h, odpowiadające tak otrzymanym nadziejom matematycznym sum (28), uważać będziemy jako *prawdziwe*. Określają one *sprawność* obserwatora i *dokładność* narzędzia, którem się posługuje.

§ 6.

Przypuśćmy, że stałe prawdziwe ε, h są wiadome, i że, jak wyżej, na wyznaczenie m niewiadomych x_μ posiadamy $n > m$ wartości l_i funkcyj $\sum_i a_{i\mu}\,x_\mu$, dostrzeżonych przez tego samego obserwatora i tem samem narzędziem, którym odpowiadają pomienione stałe ε, h.

Wtedy, na mocy równań (12) i (13), wartości najprawdopodobniejsze $\bar{x}_\mu$ otrzymują się z m równań postaci

$$\sum_i a_{i\mu}\left(\sum_\mu a_{i\mu}\,\bar{x}_\mu - l_i - \varepsilon\right) = 0\,. \tag{29}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

Z przyczyny jednak, że liczba n jest skończoną, różnice $x_\mu - \bar{x}_\mu = \xi_\mu$ są zerami tylko prawdopodobnie, jakkolwiek zresztą najprawdopodobniej. Ważną przeto jest rzeczą obliczyć wartości prawdopodobne błędów ξ_μ (ich wartości najprawdopodobniejsze, jak dopiero co przytoczyliśmy, są zerami), które oznaczać będziemy przez $\bar\xi_\mu$ i nazywać *błędami prawdopodobnemi.*

Uwzględniając założenie (16), otrzymujemy

$$\sum_i \Big(\sum_\mu a_{i\mu}\, \xi_\mu\Big)^2 = n \sum_\mu \sum_\nu \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\mu\, \xi_\nu\,,$$

a w skutek tego tożsamość (19) przyjmuje postać następującą:

$$\frac{\sqrt{n^m D}\,.\,h^m}{\sqrt{\pi^m}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n h^2 \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\mu\, \xi_\nu}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m = 1\,.$$

Stąd, przez różniczkowanie względem $\alpha_{\mu\nu}$, w założeniu $\alpha_{\mu\nu} \neq \alpha_{\nu\mu}$, znajdziemy łatwo

$$EM\,.\,(\xi_\mu\, \xi_\nu) = \frac{1}{2\, n\, h^2\, D}\, \frac{\partial D}{\partial \alpha_{\mu\nu}}$$

Ale według dopiero co przyjętego oznaczenia błędów prawdopodobnych, $_\mu\bar\xi_\nu = EM\,.\,(\xi_\mu\, \xi_\nu)$; zatem widocznie

$$\bar\xi_\mu\, \bar\xi_\nu = \frac{1}{2\, n\, h^2\, D}\, \frac{\partial D}{\partial \alpha_{\mu\nu}} \tag{30}$$

$$(\mu\nu = 11,\, 22,\, \ldots,\, mm\,; \quad 12,\, 13,\, \ldots,\, m{-}1\; m)$$

Aby wreszcie spożytkować wszystkie równania (30), dla wyznaczenia błędów $\bar\xi_\mu$, postąpimy tak.

Z równań (30) otrzymujemy łatwo

$$\sum_\mu \sum_\nu \bar\xi_\mu\, \bar\xi_\nu = \Big(\sum_\nu \bar\xi_\nu\Big)^2 = \frac{1}{2\, n\, h^2\, D} \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial D}{\partial \alpha_{\mu\nu}}\,,$$

jak również

$$\bar\xi_\mu \sum_\nu \bar\xi_\nu = \frac{1}{2\, n\, h^2\, D} \sum_\nu \frac{\partial D}{\partial \alpha_{\mu\nu}}\,.$$

Stąd oczywiście wynika

$$\bar\xi_\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{2\, n\, D}\,.\,h} \sum_\nu \frac{\partial D}{\partial \alpha_{\mu\nu}} \Big/ \sqrt{\sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial D}{\partial \alpha_{\mu\nu}}}\,,$$

gdzie dla wszystkich $\bar\xi_\mu$ należy wziąć: albo tylko znak $+$, albo tylko znak $-$.

§ 7.

Najczęściej jednak zdarza się, że przed dokonaniem dostrzeżeń, wartości stałych ε, h nie mamy, tak, że z jedynych tylko danych l_i, należy wyznaczyć i niewiadome $\bar x_\mu$ i stałe ε, h.

W tym celu rozpoczynamy od rozwiązania równań (29), z których wyznaczymy $\bar x_\mu$ w funkcyi ε, a następnie $\bar\Delta_i = \sum\limits_\mu a_{i\mu}\, \bar x_\mu - l_i$.

Przeto iloraz z Q, (11), przez R, (17), w którym też uwzględniono równanie (15), a mianowicie:

$$\frac{Q}{R} = \frac{h^{n-m}\, e^{-h^2 \sum\limits_i (\bar\Delta_i - \varepsilon)^2}}{\sqrt{n^m\, \pi^{n-m}\, D}}\; \frac{d\Delta_1\, d\Delta_2 \ldots d\Delta_n}{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m}$$

zależy tylko od wartości l_i i stałych ε, h.

Iloraz ten wyobraża prawdopodobieństwo zdarzenia, że powtarzając szereg n dostrzeżeń raz jeszcze, otrzymalibyśmy na nowo ten sam układ wartości l_i, w założeniu, że przyczyną tego zdarzenia, są tylko stałe ε, h. Według zatem twierdzenia B a y e s' a, stosunek ilorazu Q/R do sumy ich wszystkich, odpowiadających wszystkim możliwym układom wartości ε, h jest prawdopodobieństwem przyczyny ε, h. Mamy tedy, na prawdopodobieństwo stałych ε, h, wzór następujący:

$$T = C\, h^{n-m}\, e^{-h^2 \sum\limits_i (\bar\Delta_i - \varepsilon)^2}\,,$$

w którym C zadość czyni warunkowi

$$\frac{C}{dh\, d\varepsilon} \int_0^{+\infty} h^{n-m}\, dh \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \sum\limits_i (\bar\Delta_i - \varepsilon)^2}\, d\varepsilon = 1\,,$$

albowiem stała ε zawiera się między $-\infty$ i $+\infty$, a stała h — między 0 i $+\infty$.

Owóż kładąc, obok (24),

$$\cos\Theta = \frac{\sum\limits_i (\bar\Delta_i) \left(\dfrac{d\bar\Delta_i}{d\varepsilon} - 1\right)}{\sqrt{\sum\limits_i (\bar\Delta_i)^2 \,.\, \sum\limits_i \left(\dfrac{d\bar\Delta_i}{d\varepsilon} - 1\right)^2}}\,, \tag{31}$$

znajdziemy bez wielkich trudności

$$\int_0^{+\infty} h^{n-m}\,dh \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\sum_i(\bar{\Delta}_i-\varepsilon)^2}\,d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sum_i\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon}-1\right)^2}}\;\frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{\left(\sin^2\bar{\Theta}\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2\right)^{\frac{n-m}{2}}},$$

i następnie

$$T = \frac{2\sqrt{\sum_i\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon}-1\right)^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\sin\bar{\Theta}\,.\,\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2\right)^{\frac{n-m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\; h^{n-m}\, e^{-h^2\sum_i(\bar{\Delta}_i-\varepsilon)^2}\,dh\,d\varepsilon\,. \quad (32)$$

Takie jest prawdopodobieństwo stałych ε, h, jako przyczyny pojawienia się wartości l_i.

§ 8.

Skoro już prawdopodobieństwo T wiadome, stałe ε, h wyznaczymy, biorąc za nie ich wartości najprawdopodobniejsze: $\bar{\varepsilon}$, $\bar{h}$, t. j. wartości zadość czyniące warunkowi $T = maximum$, któremu odpowiada

$$h^{n-m}\, e^{-h^2\sum_i(\bar{\Delta}_i-\varepsilon)^2} = maximum\,.$$

W ten sposób znajdujemy:

$$\bar{\varepsilon} = -\cos\bar{\Theta}\,.\,\sqrt{\frac{\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2}{\sum_i\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon}-1\right)^2}}\,, \quad (33)$$

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{n-m}{2}}\;\frac{1}{\sin\bar{\Theta}\,.\,\sqrt{\Sigma(\bar{\Delta}_i)^2}}\,, \quad (34)$$

przy czem

$$max.\ T = \frac{2\sqrt{\sum_i\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon}-1\right)^2}}{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\left(\frac{n-m}{2e}\right)^{\frac{n-m}{2}} d\varepsilon\ dh \quad (35)$$

jest prawdopodobieństwem równań

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}\,, \qquad h = \bar{h}\,. \quad (36)$$

Załóżmy teraz

$$\sum_i\left(\frac{d\bar{\Delta}_i}{d\varepsilon}-1\right)^2 = nk^2\,,$$

gdzie k ma wartość skończoną, choćby n było nieskończenie wielkiem i zauważmy, że, jak wiadomo:

$$\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n-m}}\left(\frac{n-m}{2e}\right)^{\frac{n-m}{2}} e^{\tilde{\omega}}\,,$$

gdzie

$$\tilde{\omega} = \frac{2\,B_1}{1\,.\,2\,.\,(n-m)} - \frac{2^3\,B_2}{3\,.\,4\,.\,(n-m)^3} + \ldots + \frac{(-1)^p\,\lambda\,.\,2^{2p+1}\,B_{p+1}}{(2p+1)\,(2p+2)\,.\,(n-m)^{2p+1}}\,,$$

B oznaczają liczby Bernoulli'ego, a λ — ułamek właściwy, dodatni.

Na zasadzie tych oznaczeń, zamiast (35), otrzymujemy

$$max.\ T = \frac{k\sqrt{n\,(n-m)}\ d\varepsilon\ dh}{\pi\,.\,e^{\tilde{\omega}}}\,,$$

skąd wynika, że równania (36) są tem prawdopodobniejsze, im n większe, i że stają się prawdziwemi dla $n = \infty$, albowiem stałe nieskończenie małe $d\varepsilon$, dh można tak dobrać, aby wtedy było $lim.\ max.\ T = 1$,

Taki posiadają charakter równania (36), rozważane ze względu na ich prawdopodobieństwo.

Porównywając znowu formuły (31), (33) i (34) z odpowiedniemi (25), (26) i (27), spostrzegamy, że aby z wartości ε, h najprawdopodobniejszych — otrzymać prawdziwe, należy sumy aktualne (28) zastąpić odnośnemi nadziejami matematycznemi. Ale że dla obserwatora i narzędzia, którym odpowiadają dane l_i, sumy aktualne (28) są najprawdopodobniejsze, przeto sumy te, przy obliczaniu odnośnych nadziei matematycznych, powtórzą się najczęściej, i z tego względu należy je uważać jako wartości przybliżone tychże nadziei matematycznych, a, co za tem idzie, równania (36) — jako przybliżone równań ścisłych (26) i (27).

Tak więc równania (36) są z jednej strony najprawdopodobniejsze, z drugiej — bliskie o ile można równań prawdziwych; budzą zatem podobne zaufanie, jak równania $x_\mu = \bar{x}_\mu$.

§ 9.

Oznaczając teraz przez $(\bar{x}_\mu)$ część $\bar{x}_\mu$ niezależną od ε, będzie

$$\bar{x}_\mu = (\bar{x}_\mu) + \frac{d\bar{x}_\mu}{d\varepsilon}\,\bar{\varepsilon}, \tag{37}$$

gdzie $\bar{\varepsilon}$ ma wartość (33).

Co się zaś tyczy błędów prawdopodobnych ξ_μ, te, jako proporcyonalne do $1/h$, (§ 6), stają się, na mocy formuły (34), proporcyonalnemi do

$$\frac{1}{h} = \sqrt{\frac{2}{n-m}}\,.\,\sin\bar{\Theta}\,.\,\sqrt{\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2}\,. \tag{38}$$

W ten sposób, na zasadzie jedynych danych l_i, jesteśmy w możności obliczenia niewiadomych x_μ, z uwzględnieniem prawdopodobnego błędu systematycznego ε, oraz oznaczeniem popełnionych błędów prawdopodobnych ξ_μ.

Tak by było istotnie, gdybyśmy wartości stałych ε, h, w powyższy sposób obliczonych, byli pewni. Ponieważ jednak są one tylko prawdopodobne, należy je przeto uwzględniać z możliwą ostrożnością, szczególniej zaś wtedy, gdy liczba n nie jest dostatecznie wielką.

Owóż zauważmy, że z formuły (38) wynika

$$\frac{1}{h} \geq \sqrt{\frac{2}{n-m}}\,.\,\sqrt{\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2};$$

że zatem, zamiast (38), najbezpieczniej będzie założyć

$$\frac{1}{h} = \sqrt{\frac{2}{n-m}}\,.\,\sqrt{\sum_i(\bar{\Delta}_i)^2}, \tag{39}$$

albowiem wówczas błędy prawdopodobne ξ_μ staną się bezwzględnie największemi. Lecz że założeniu temu odpowiada $\sin\bar{\Theta} = 1$, a tem samem $\cos\bar{\Theta} = 0$; więc, jak z formuły (33) widoczna powinno być jednocześnie

$$\bar{\varepsilon} = 0\,. \tag{40}$$

Otrzymujemy tedy regułę następującą:

Jeżeli dla otrzymania wartości niewiadomych x_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, *posiadamy tylko wartości dostrzegalne* l_i, $(i = 1, 2, \ldots, n > m)$, *wtedy najbezpieczniej stałą* ε *uczynić równą zeru, a stałą* $1/h$ *obliczyć z formuły* (39).

Jest to znana reguła Gaussa.

Możemy zatem obliczać niewiadome x_μ dwojako: sposobem najprawdopodobniejszym i sposobem Gaussa; a jakkolwiek w sposobie pierwszym obliczania błędy prawdopodobne są $1/\sin\bar{\Theta}$ razy mniejsze niż w drugim, za to jednak i właśnie dla tego sposób drugi jest bezpieczniejszy.

Twierdzenie § 1, zawarte w warunku (5):

$$\sum_i\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 = minimum,$$

udowodnić można ściślej i prościej, sposobem następującym.

Z uwagi na wyrażenie różniczki

$$d\bar{x} = \sum_i\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_i}\,dx_i,$$

jest tożsamościowo:

$$d\bar{x}^2 = \sum_i\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_i}\right)^2\sum_i dx^2_i - \sum_{ij}\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_i}\,dx_j - \frac{\partial\bar{x}}{\partial x_j}\,dx_i\right)^2.$$

Stąd oczywiście wynika, że

$$max.\ d\bar{x}^2 = \sum_i\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_i}\right)^2\sum dx^2_i\,,$$

jakąbykolwiek była funkcya $\bar{x}$.

Dobierając więc funkcyą $\bar{x}$ w ten sposób, aby się stało zadość warunkowi (5), uczynimy tem samem $max.\ d\bar{x}^2$ najbliższem zera. Tem więcej blizkiem zera będzie wtedy $d\bar{x} \leq max.\ d\bar{x}^2$, a przeto funkcya $\bar{x}$ odtworzy niewiadomą x możliwie najlepiej, c. b. d. o.

Warszawa, 1894.