icm©

O PRZESTĘPNOŚCI LICZB e i π *)

PODAŁ

D. HILBERT.

Przyjmijmy, że liczba e czyni zadość równaniu stopnia n-go:

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0,$$

którego współczynniki $a, a_1, \ldots, a_n$ są liczbami całkowitemi wymiernemi. Mnożąc stronę lewą tego równania przez całkę

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [(z-1)(z-2)\ldots(z-n)]^{\varrho+1} e^{-z} dz,$$

w której ϱ oznacza liczbę całkowitą dodatnią, otrzymujemy wyrażenie

$$a\int_0^\infty + a_1 e \int_0^\infty + a_2 e^2 \int_0^\infty + \ldots + a_n e^n \int_0^\infty,$$

które rozpada się na sumę dwóch następujących wyrażeń:

*[1]) Praca ta ogłoszona została w Nr 2 wydawnictwa „Göttinger Nachrichten" z r. 1893 Wiadomo, że pierwszy Ch. Hermite w sławnej rozprawie: „Sur la fonction exponentielle" dał dowód przestępności liczby e i zarazem stworzył podstawę do tych rozważań, za pomocą których Lindemann dowiódł przestępności liczby π. (*Przyp. autora*).

*[2]) Prof. Hilbert z całą uprzejmością upoważnił nas do ogłoszenia przekładu jego pracy, pomieszczonej także w t. 43 dziennika: „Mathematische Annalen" (str. 216—219). *S. D.*

icm©

$$\mathsf{P}_1 = a\int_0^\infty + a_1\, e\int_0^\infty + a_2\, e^2\int_0^\infty + \ldots + a_n\, e^n\int_n^\infty,$$

$$\mathsf{P}_2 = \qquad a_1\, e\int_0^1 + a_2\, e^2\int_0^2 + \ldots + a_n\, e^n\int_0^n.$$

Wzór

$$\int_0^\infty z^\varrho\, e^{-z}\, dz = \varrho!$$

wskazuje, że całka $\int_0^\infty$ jest liczbą całkowitą wymierną podzielną przez $\varrho!$ a także widzieć łatwo, po zastosowaniu odpowiednio podstawień $z = z' + 1$, $z = z' + 2, \ldots, z = z' + n$, że

$$e\int_1^\infty,\quad e^2\int_2^\infty \ldots\, e^n\int_n^\infty$$

są liczbami całkowitemi wymiernemi, podzielnemi przez $(\varrho + 1)!$ Jest przeto też P_1 liczbą całkowitą podzielną przez $\varrho!$, i zachodzi, jak widać, kongruencya

$$\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!} \equiv \pm\, a\, (n!)^{\varrho+1}. \qquad (\text{mod. } \varrho + 1)$$

Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez K i odpowiednio przez k wartości bezwzględnie największe, jakie przyjmują funkcye

$$z\,(z-1)\,(z-2)\,\ldots\,(z-n),$$
$$(z-1)\,(z-2)\,\ldots\,(z-n)\, e^{-z}$$

w przedziale od $z = 0$ do $z = n$, będzie:

$$\left|\int_0^1\right| < k\, K^\varrho,\quad \left|\int_0^2\right| < 2\, k\, K^\varrho, \ldots \quad \left|\int_0^n\right| < n\, k\, K^\varrho,$$

a stąd, jeżeli napiszemy dla skrócenia

$$\varkappa = \{|a_1\, e| + 2\, |a_2\, e^2| + \ldots + n\, |a_n\, e^n|\}\, k,$$

wynika nierówność

$$|\mathsf{P}_2| < \varkappa\, K^\varrho.$$

Wyznaczmy teraz liczbę całkowitą ϱ tak, aby *popierwsze* była podzielna przez liczbę całkowitą $a\,.\,n!$, i aby *po drugie* było $n\,\frac{K^\varrho}{\varrho!} < 1$. Wtedy, na zasadzie kongruencyi (1), jest $\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!}$ liczbą całkowitą niepodzielną przez $\varrho + 1$, a więc koniecznie od zera różną, a ponieważ, prócz tego, skutkiem nierówności (2), jest $\frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!}$, bezwzględnie biorąc, od jedności mniejsze, przeto równanie

$$\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!} + \frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!} = 0$$

jest niemożliwe.

Przyjmijmy, że liczba π jest algebraiczną i że mianowicie $\alpha_1 = i\,\pi$ czyni zadość równaniu stopnia n-go ze współczynnikami całkowitemi. Oznaczmy przez $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pozostałe pierwiastki równania; ponieważ $1 + e^{i\pi}$ ma wartość równą zeru, przeto i wyrażenie

$$(1 + e^{\alpha_1})\,(1 + e^{\alpha_2})\ldots(1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_N}$$

musi być równe zeru; wykładniki $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ są, jak łatwo widzieć, pierwiastkami równania stopnia N-go ze współczynnikami całkowitemi. Jeżeli M wykładników $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M$ ma wartości różne od zera a pozostałe znikają, wtedy te wykładniki $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M$ są pierwiastkami równania postaci

$$f(z) = b\, z^M + b_1\, z^{M-1} + \ldots + b_M = 0,$$

którego współczynniki są również liczbami całkowitemi, ostatni zaś współczynnik b_M jest od zera różny. Powyższe wyrażenie otrzymuje wtedy postać:

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_M}$$

gdzie a jest liczbą całkowitą dodatnią.

Pomnóżmy to wyrażenie przez całkę

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho\, [g(z)]^{\varrho+1}\, e^{-z}\, dz,$$

gdzie ϱ jest znów liczbą całkowitą dodatnią i gdzie dla skrócenia napisano $g(z)$ zamiast $b^M f(z)$. Wtedy wyrażenie

$$a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_0^\infty + e^{\beta_2}\int_0^\infty + \ldots + e^{\beta_M}\int_0^\infty$$

rozkłada się na sumę dwóch następujących wyrażeń

icm©

$$\mathsf{P}_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty + \ldots + e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty,$$

$$\mathsf{P}_2 = \qquad e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}\int_0^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M},$$

gdzie ogólnie całka $\int_{\beta_i}^\infty$ rozciąga się w płaszczyznie zmiennej zespolonej z od punktu $z = \beta_i$ do $z = \infty$, wzdłuż prostej równoległej do osi liczb rzeczywistych; całka zaś $\int_0^{\beta_i}$ rozciąga się w tejże płaszczyznie od punktu $z = 0$ do $z = \beta_i$, wzdłuż prostej, oba te punkta łączącej.

Całka $\int_0^\infty$ jest znowu równą liczbą całkowitej wymiernej podzielnej przez $\varrho!$ i zachodzi, jak łatwo widzieć, kongruencya

$$\frac{1}{\varrho!}\int_0^\infty \equiv b^{\varrho M+M}\, b_M^{\varrho+1}. \qquad (\text{mod. } \varrho + 1)$$

Za pomocą podstawienia $z = z' + \beta_i$ i ze względu na równość $g(\beta_i) = 0$, otrzymujemy

$$e^{\beta_i}\int_0^\infty = \int_0^\infty (z' + \beta_i)^\varrho\, [g(z' + \beta_i)]^{\varrho+1}\, e^{-z'}\, dz' = (\varrho + 1)!\; G(\beta_i)$$

gdzie $G(\beta_i)$ jest funkcyą całkowitą zmiennej β_i stopnia niższego od liczby $\varrho M + M$, o współczynnikach całkowitych, wszystkich podzielnych przez $b^{\varrho M+M}$. Ponieważ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M$ są pierwiastkami równania $f(z) = 0$ o współczynnikach całkowitych, więc przez pomnożenie przez pierwszy współczynnik b stają się liczbami *całkowitemi algebraicznemi*; przeto

$$G(\beta_1) + G(\beta_2) + \ldots + G(\beta_M)$$

jest koniecznie liczbą *całkowitą wymierną*. Wynika stąd, że wyrażenie P_1 jest liczbą całkowitą wymierną podzielną przez $\varrho!$ i że zachodzi kongruencya

$$\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!} \equiv a\, b^{\varrho M+M}\, b_M^{\varrho+1}. \qquad (\text{mod } \varrho + 1)$$

Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez K i k wartości bezwzględnie największe, jakie przyjmują funkcye $z\,g(z)$ i $g(z)\,e^{-z}$ na drogach prostolinijnych od $z = 0$ do $z = \beta_i$, to:

$$\left|\int_0^{\beta_i}\right| < |\beta_i|\, k\, K^\varrho; \qquad (i = 1, 2, \ldots, M)$$

a stąd, jeżeli napiszemy dla skrócenia

$$\varkappa = \{|\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \ldots + \beta_M e^{\beta_M}|\}\, k,$$

wynika nierówność

$$|\mathsf{P}_2| < \varkappa\, K^\varrho.$$

Wyznaczmy teraz liczbę całkowitą ϱ tak, aby *po pierwsze* była podzielną przez $a\, b\, b_M$, i aby *po drugie* $\varkappa \frac{K^\varrho}{\varrho!}$ było mniejsze od jedności. Wtedy $\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!}$, na zasadzie kongruencyi (3), będzie liczbą całkowitą niepodzielną przez $\varrho+1$, a więc koniecznie od zera różną, a ponieważ prócz tego $\frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!}$, skutkiem nierówności (4), jest bezwzględnie od 1 mniejsze, przeto równanie

$$\frac{\mathsf{P}_1}{\varrho!} + \frac{\mathsf{P}_2}{\varrho!} = 0$$

jest niemożliwe.

Łatwo spostrzedz, że wskazaną tu drogą daje się dowieść w sposób równie prosty najogólniejsze twierdzenie L i n d e m a n n a o funkcyi wykładniczej.

Królewiec, d. 5 stycznia 1893.