mières de la fonction $U_2(A)$ existent et sont continues. Ecrivons donc l'équation (61) sous la forme:

$$(62)\quad U_2(A) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A,B)\left[\frac{\Delta\sqrt{l(B)}}{\sqrt{l(B)}}\cdot U_2(B) + \frac{\operatorname{div} l(B)\cdot\overrightarrow{E(B)}}{\sqrt{l(B)}}\right] d\,\omega_B .$$

La fonction $U_2(B)$ étant continue, il résulte des propriétés de la fonction de Green que le second membre de la formule (62) est la somme d'un potentiel de volume de densité continue, égale à

$$\frac{\Delta\sqrt{l}}{\sqrt{l}}U_2 + \frac{\operatorname{div}(l\vec{E})}{\sqrt{l}}$$

et d'une intégrale de la forme:

$$\iiint\limits_{\Omega} g(A,B)\left[\frac{\Delta\sqrt{l}}{\sqrt{l}}U_2 + \frac{\operatorname{div} l\vec{E}}{\sqrt{l}}\right] d\,\omega_B$$

où la fonction $g(A,B)$, d'après la démonstration de M. Pogorzelski dans le travail mentionné plus haut, a des dérivées partielles continues par rapport aux coordonnées du point A remplissant la condition:

$$\left|D^A g(A,B)\right| < \frac{a}{AB^2}$$

(a est une constante positive determinée).

La fonction U_2 satisfait donc à l'équation différentielle (56).

La démonstration que la fonction U_2 remplit la condition aux limites (61[1]) est identique a celle donnée dans le probléme premier.

Dans le cas $\frac{\Delta\sqrt{l}}{\sqrt{l}} > 0$ le noyau de l'équation intégrale (61) est du type de Schmidt et peut être ramené a la forme symétrique $G(A,B)\cdot\tau(A)\cdot\tau(B)$ par la multiplication par l'expression:

$$\tau(A) = \sqrt{\frac{\Delta\sqrt{l(A)}}{\sqrt{l(A)}}}$$

et l'introduction d'une nouvelle variable $t(A) = u(A)\cdot\tau(A)$.

En s'appuyant sur le théorème de Green, il est facile de démontrer que dans ce cas toutes les valeurs caractéristiques qui sont réelles et en nombre infini sont négatives; on a donc pour $\lambda = 1$ toujours une solution unique.

Un théorème de M. Knebelman

O twierdzeniu Knebelmana

Par

Z. SZMYDT (Cracovie)

Supposons que l'on ait dans un espace à n dimensions deux métriques de Finsler, dont l'une est définie au moyen de la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \tag{1}$$

et l'autre au moyen de la fonction

$$\overline{F}(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n). \tag{2}$$

Si les fonctions F et $\overline{F}$ sont deux fois dérivables par rapport aux variables p_i, on peut définir les deux tenseurs métriques correspondants

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial p_i \partial p_j}, \quad \overline{g}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{F}^2}{\partial p_i \partial p_j} \qquad (i,j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

qui sont en général des fonctions du point (x_i) et de l'élément d'appui (p_i).

M. Knebelman[1]) a démontré que si l'on suppose que

$$\overline{g}_{ij} = \rho\, g_{ij} \qquad (i,j = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

le facteur ρ ne dépend plus des variables p_i.

La démonstration de Knebelman exige la supposition que les fonctions F et $\overline{F}$ possèdent les dérivées continues du 3-ième ordre par rapport aux variables p_i. En outre, comme l'a remarqué M. A Nazim[2]),

[1]) M. S. Knebelman, Conformal geometry of generalized metric spaces, Proc. Nat. Ac. Sc. 15 (1929), 376—379.

[2]) A. Nazim, Über Finslersche Räume, Dissertation München, 1936, p. 30, 31, 45.

(qui sans citer M. Knebelman réproduit sa démonstration), cette démonstration fait défaut dans le cas de $n=2$. M. St. Gołąb [3]) a demontré le théorème de Knebelman en supposant que les fonctions F et $\overline{F}$ possèdent les dérivées continues du second ordre par rapport aux p_i, en se bornant d'ailleurs au cas de $n=2$.

Le but de la présente note est de donner la démonstration du théorème de Knebelman-Gołąb dans le cas général de n arbitraire, dans l'hypothèse de la continuité des dérivées du second ordre des fonctios F de $\overline{F}$ par rapport aux p_i. Elle est plus simple que la démonstration citée (l. c. [3])).

Nous supposons que la métrique définie par la fonction F ne possède aucunes directions singulières, c'est-à-dire que l'on a

$$F>0. \tag{5}$$

Dans nos hypothèses l'identité d'Euler est remplie (puisque F et $\overline{F}$ sont positivement homogènes du prémier ordre)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i F_i = F \qquad \left(F_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}\right) \tag{6}$$

ainsi que les relations qui s'en déduisent

$$\sum_{i=1}^{n} p_i F_{ij} = 0 \qquad (j=1,\dots,n) \qquad \left(F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_i}\right). \tag{7}$$

Il résulte immédiatement de la définition (3) que

$$g_{ij} = F_i F_j + F F_{ij} \qquad (i,j=1,\dots,n). \tag{8}$$

Multiplions les deux membres de (8) par p_i et sommons les relations ainsi obtenues par rapport à l'indice i. En vertu de (6) et (7) on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g_{ij} = F F_j \qquad (j=1,\dots,n). \tag{9}$$

[3]) S. Gołąb, Contribution à un théorème de M. M. S. Knebelman, Prace Mat. Fiz. 41 (1933), 97—100.

D'une manière analogue on déduit les relations

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \overline{g}_{ij} = \overline{F}\,\overline{F}_j \qquad (j=1,\dots,n). \tag{10}$$

De la supposition (4) et des relations (9) et (10) nous avons

$$\overline{F}\,\overline{F}_j = \rho F F_j \qquad (j=1,\dots,n). \tag{11}$$

En tenant compte de (5), de la relation (6), de la relation analogue pour $\overline{F}$ et enfin de ce que F et $\overline{F}$ possèdent les dérivées continues du second ordre par rapport aux p_i, il résulte de (11), que la fonction ρ possède les dérivées continues par rapport aux p_i. (Cette conclusion ne peut être déduite directement de la relation (4), car nous n'avons pas supposé que les fonctions g_{ij} et $\overline{g}_{ij}$ doivent être dérivables par rapport aux p_i). En différentiant les deux membres de (11) par rapport a p_i, on obtient

$$\overline{F}_i \overline{F}_j + \overline{F}\,\overline{F}_{ij} = \frac{\partial \rho}{\partial p_i} F F_j + \rho (F_i F_j + F F_{ij}) \qquad (i,j=1,\dots,n). \tag{12}$$

Si l'on tient compte des identités (8) et des identités analogues pour $\overline{g}_{ij}$ dans la relation (12), on aura en utilisant l'hypothèse (4) que

$$F F_j \frac{\partial \rho}{\partial p_i} = 0 \qquad (i,j=1,\dots,n). \tag{13}$$

De la en vertu de (5) nous avons

$$F_j \frac{\partial \rho}{\partial p_i} = 0 \qquad (i,j=1,\dots,n). \tag{14}$$

En raison de (6) on aura pour un certain j, $F_j \neq 0$, d'où il s'ensuit que

$$\frac{\partial \rho}{\partial p_i} = 0 \qquad (i,=1,\dots,n). \tag{15}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.