cette détermination sera unique si l'on donne *a priori* la valeur limite supérieure de la fonction I en un point de la droite OP. Connaissant les valeurs limites supérieures de la fonction I sur la droite OP, on obtiendra la fonction I dans le domaine Ω' d'après la première des équations (1):

$$RI = -\frac{\partial U}{\partial s} - L\frac{\partial I}{\partial t} \tag{23}$$

U étant connue. Les fonctions obtenues U et I vérifient aussi la seconde des équations (1) dans le domaine Ω'. En effet, les équations (12) et (23) étant remplies, nous en déduisons

$$R\left(\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU\right) + L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU\right) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU = \left(\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU\right)_{t_0 = s\sqrt{LC}} \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$$

Mais les valeurs limites remplissent la seconde des équations (1) pour $t = t_0$, donc la seconde équation est vérifiée dans le domaine Ω'.

Les valeurs limites supérieures de la fonction U sur la caractéristique OP peuvent être données arbitrairement, donc il existe une infinité des solutions des équations (1) discontinues sur OP et remplissant les mêmes conditions limites (2) et (3) sur les droites Os et Ot.

Dans le cas particulier où $E(t) \to 0$ si $t \to 0$ il existe une solution (U, I) dans Ω' dont les valeurs limites supérieures sont nulles sur OP, donc il existe une solution (U, I) continue dans $\Omega + \Omega'$ satisfaisant aux conditions limites (2) et (3) et il n'existe aucune autre solution continue.

Les dérivées de cette solution peuvent être en général discontinues sur OP.

Remarquons maintenant que le saut brusque de la solution (6) et (7) pour $t = \frac{s}{w}$ tend vite vers zéro si $s \to \infty$ et que dans les applications le potentiel $E(t)$ atteint sa valeur U_0 d'une façon continue à partir de zéro; nous en concluons que la solution (6) et (7) fournie par le calcul opérationnel est voisine de la solution continue, unique pour s suffisamment grand. Donc cette solution peut être utilisée dans les applications pour les points suffisamment éloignés de l'origine d'une ligne télégraphique, ce qui est important puisque cette solution a la forme commode pour le calcul effectif.

Le problème aux limites de H. Poincaré pour le système de fonctions

Zagadnienie brzegowe H. Poincarégo dla układu funkcyj

Par

J. WOLSKA (Varsovie)

En 1910, dans le tome III de son ouvrage „Mécanique Céleste", H. Poincaré a proposé un problème aux limites, consistant en la recherche d'une fonction harmonique u dans le domaine D qui au bord C de ce domaine remplit la relation linéaire suivante:

$$\frac{du}{dn} + a(s)u + b(s)\frac{du}{ds} = f(s)$$

entre la dérivée suivant la normale $\frac{du}{dn}$ et la dérivée tangentielle $\frac{du}{ds}$; a, b, f sont les fonctions données de l'arc s sur la courbe C. La résolution fort intéressante de ce problème, donnée par H. Poincaré, est basée sur la théorie des résidus et la théorie de Fredholm, mais elle n'est pas complète.

Le problème précédant était traité ensuite par E. Gevrey (Journal de Mathématiques, 1930) et W. Pogorzelski (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Techniques à Varsovie, 1935; Mathematische Zeitschrift, 1939).

Récemment les mathématiciens géorgiens J. Vécoua et B. Chvedelidze ont traité le problème de H. Poincaré d'un façon très complète dans le cas du contour non analytique (Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. de l'Union Soviétique 1940, 1941, 1947); on trouve aussi la bibliographie complète du problème dans l'ouvrage récent de Mouschelichvili: „Les équations intégrales singulières (Moscou, 1946)".

Dans ce travail nous nous proposons de trouver le système de fonctions $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, ... $u_m(x,y)$, qui dans l'intérieur du domaine D limité par la courbe analytique C (ne possédant pas de points singuliers) satisfont aux équations de *Laplace*, c'est-à-dire:

$$\Delta u_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots m) \tag{1}$$

et sur le contour C du domaine D satisfont aux conditions limites suivantes:

$$\frac{du_\alpha}{dn} + \sum_{\beta=1}^{n} \left(a_{\alpha\beta}(s) u_\beta + b_{\alpha\beta}(s) \frac{du_\beta}{ds} \right) + f_\alpha(s) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots m) \tag{2}$$

où $\frac{du_\beta}{dn}$ désignent les dérivées des fonctions u_β suivant la normale au point P sur la courbe C; $\frac{du_\beta}{ds}$ sont les dérivées des fonctions u_β par rapport à l'arc s de la courbe C au point P; $a_{\alpha\beta}(s)$, $b_{\alpha\beta}(s)$, $f_\alpha(s)$ sont les fonctions données de l'arc s entre le point P et le point initial P_0 de la courbe C.

Nous allons chercher les fonctions $u_\alpha(M)$ du point $M(x,y)$ du domaine D sous la forme du potentiel logarithmique de simple couche, c'est-à-dire sous la forme des intégrales

$$u_\alpha(M) = \int_C \log \frac{1}{r_{M\sigma}} \mu_\alpha(\sigma)\, d\sigma \qquad (\alpha = 1, 2, \dots m) \tag{3}$$

les fonctions $\mu_\alpha(\sigma)$ étant les densités de la couche; $r_{M\sigma}$ désignant la distance entre le point intérieur $M(x,y)$ et le point Q du contour C.

Si le point $M(x,y)$ tend vers le point du contour P (à qui correspond l'arc s) les expressions désignant le potentiel et ses dérivées tendent vers les valeurs limites:

$$\left\{ \begin{aligned} (u_\alpha)_P &= \int_C \log \frac{1}{r_{s\sigma}} \mu_\alpha(\sigma)\, d\sigma \\ \left(\frac{du_\alpha}{dn}\right)_P &= -\pi \mu_\alpha(s) + \int_C \frac{\cos\varphi}{r_{s\sigma}} \mu_\alpha(\sigma)\, d\sigma \\ \left(\frac{du_\alpha}{ds}\right)_P &= \int_C \frac{\cos\psi}{r_{s\sigma}} \mu_\alpha(\sigma)\, d\sigma \end{aligned} \right. \tag{4}$$

où $r_{s\sigma}$ désigne la distance du point $P(s)$ et $Q(\sigma)$ (sur la courbe C); ψ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et la direction positive de la tangente au point P; φ l'angle entre le vecteur normale intérieur au point P et le vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

Pour assurer l'existence des valeurs limites $(u_\alpha)_P$, $\left(\frac{du_\alpha}{dn}\right)_P$ il suffit d'admettre la continuité des fonctions $\mu_\alpha(\sigma)$.

L'existence des valeurs limites des dérivées $\left(\frac{du_\alpha}{ds}\right)_P$ résulte de la dérivabilité des fonctions $\mu_\alpha(\sigma)$ et de l'existence de la courbure C au point P.

La fonction $\frac{\cos\varphi}{r_{s\sigma}}$ dans l'expression des dérivées $\left(\frac{du_\alpha}{dn}\right)_P$ reste bornée même si le point Q tend vers P c'est-à-dire $\sigma \to s$.

La fonction $\frac{\cos\psi}{r_{s\sigma}}$ dans l'expression des dérivées $\left(\frac{du_\alpha}{ds}\right)$ augmente comme $\frac{1}{s-\sigma}$ et n'est pas bornée si $\sigma \to s$.

L'intégrale dans le troisième des expressions (4) a la valeur principale de Cauchy.

Si nous substituons les expressions (4) aux conditions limites (2), nous concluons que les potentiels logarithmiques de simple couche (3) vérifieront les conditions (2) si les fonctions $\mu_\alpha(s)$ satisfont aux équations suivantes:

$$\begin{aligned} &-\pi \mu_\alpha(s) + f_\alpha(s) + \\ &+ \sum_{\beta=1}^{m} \left\{ \int_C \left[\frac{\cos\varphi}{r_{s\sigma}} \cdot \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}(s) \log \frac{1}{r_{s\sigma}} + b_{\alpha\beta}(s) \frac{\cos\psi}{r_{s\sigma}} \right] \mu_\beta(\sigma)\, d\sigma \right\} = 0 \\ &(\alpha = 1, 2, \dots m) \end{aligned} \tag{5}$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker.

Nous sommes donc amenés à trouver la solution

$$\mu_1(s),\ \mu_2(s) \dots \mu_m(s)$$

du système d'équations de Fredholm de seconde espèce avec les noyaux singuliers (la singularité polaire et logarithmique).

Nous savons que la courbe C est analytique sans points singuliers. Les fonctions données $a_{\alpha\beta}(s)$, $b_{\alpha\beta}(s)$, $f_\alpha(s)$ sont également analytiques et possèdent la période a égale à la longueur de la courbe C. En outre les

fonctions citées sont réelles pour les valeurs réelles s et ne possèdent de singularités dans la bande infinie contenant l'axe réel.

D'après ces suppositions le système d'équations (5) se transforme en le système suivant:

$$(6)\qquad \mu_\alpha(s)=\frac{1}{\pi}f_\alpha(s)+\frac{1}{\pi}\sum_{\beta=1}^{m}\left\{\int_0^a [N_{\alpha\beta}(s,\sigma)+L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)]\,\mu_\beta(\sigma)\,d\sigma\right\}$$

$$(\alpha=1,2,\dots m)$$

où

$$N_{\alpha\beta}(s,\sigma)=\frac{\cos\varphi}{r_{s\sigma}}\cdot\delta_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta}(s)\frac{\cos\psi}{r_{s\sigma}}\quad\text{(la singularité polaire pour } s=\sigma)$$

$$L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)=a_{\alpha\beta}(s)\log\frac{1}{r_{s\sigma}}\quad\text{(la singularité logarithmique pour } s=\sigma).$$

Les fonctions $N_{\alpha\beta}$ et $L_{\alpha\beta}$ ont les propriétés suivantes:

a) $N_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ sont les fonctions analytiques de deux variables s et σ avec la singularité polaire pour $s=\sigma$ c'est à dire une singularité telle que la fonction $\frac{1}{s-\sigma}$;

b) $L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ sont les parties réelles des fonctions $L_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ de la forme:

$$L_{\alpha\beta}(s,\sigma)=a_{\alpha\beta}(s)\cdot\log R_{\alpha\beta}(s,\sigma)$$

où $a_{\alpha\beta}(s)$ et $R_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ sont des fonctions holomorphes si les points s et σ sont situés dans une bande du plan de la variable complexe, contenant l'axe réel à son intérieur, en outre les fonctions $R_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ s'annulent pour $s=\sigma$ et si $s-\sigma$ tend vers zéro, elles ont la valeur principale $(s-\sigma)$.

c) Les fonctions $N_{\alpha\beta}(s,\sigma)$, $a_{\alpha\beta}(s)$, $R_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ sont réelles pour les valeurs réelles des variables s et σ.

d) Les fonctions $N_{\alpha\beta}(s,\sigma)$; $a_{\alpha\beta}(s)$; $R_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ ont une période réelle a par rapport aux variables s et σ.

e) $N_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ et $L_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ n'ont d'autres singularités que la singularité $s=\sigma$, en négligeant les multiples de la période a (s et σ sont situés dans la bande, contenant l'axe réel).

D'après la méthode d'itération nous pouvons transformer le système d'équations intégrales (6) avec la singularité polaire et logarithmique en système avec les noyaux bornés. Nous remarquons, que les fonctions $\mu_\alpha(s)$, qui satisferont au système (6) satisferont aussi au système suivant (dans l'intervalle $0,a$):

$$(7)\qquad \mu_\alpha(s)=\frac{1}{\pi}f_\alpha(s)+\frac{1}{\pi}\sum_{\beta=1}^{m}\left\{\int_0^a [N_{\alpha\beta}(s,\sigma)+L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)]\,f_\beta(\sigma)\,d\sigma\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{\beta\gamma}^{m}\int_0^a [N_{\alpha\beta}(s,\sigma)+L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)]\left\{\int_0^a [N_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)+L^r_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)]\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right\}d\sigma$$

$$(\alpha=1,2,\dots m).$$

Nous désignons par $\overline{f}_\alpha(s)$ la fonction connue:

$$\overline{f}_\alpha(s)=\frac{1}{\pi}f_\alpha(s)+\frac{1}{\pi}\sum_{\beta=1}^{m}\left\{\int_0^a [N_{\alpha\beta}(s,\sigma)+L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)]\,f_\beta(\sigma)\,d\sigma\right\}$$

et nous obtenons, d'après la transformation évidente, le système d'équations:

$$(8)\qquad \mu_\alpha(s)=\overline{f}_\alpha(s)+\frac{1}{\pi^2}\sum_{\beta\gamma}^{m}\int_0^a N_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^a N_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{\beta\gamma}^{m}\int_0^a N_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^a L^r_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{\beta\gamma}^{m}\int_0^a L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^a N_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{\beta\gamma}^{m}\int_0^a L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^a L^r_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma$$

$$(\alpha=1,2,\dots m).$$

Nous pouvons maintenant transformer les intégrales itérées dans le système (8) d'après les formules données par H. Poincaré (loc. cit.) et par W. Pogorzelski (loc. cit.). La transformation de H. Poincaré d'une intégrale itérée est exprimée par la relation suivante:

$$(9)\quad \int_0^a N_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^a N_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma = \int_0^a F(s,\tau)\mu_\gamma(\tau)\,d\tau - \pi^2 R_{\alpha\beta}(s)R_{\beta\gamma}(s)\mu_\gamma(s)$$

où $R_{\alpha\beta}(s)$ et $R_{\beta\gamma}(s)$ désignent les résidus des fonctions $N_{\alpha\beta}(s,\sigma)$ et $N_{\beta\gamma}(s,\sigma)$ considerées comme fonctions de la variable σ pour le pôle $s=\sigma$. La fonction $F(s,\tau)$ est holomorphe au voisinage du segment $(0,a)$ et égale à la valeur principale de Cauchy

$$F(s,\tau) = \int_0^a N_{\alpha\beta}(s,\sigma)\,N_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,d\sigma$$

aux points d'intervalle réel $(0,a)$.

Les transformations des intégrales itérées données par W. Pogorzelski concernent la singularité polaire et logarithmique.

La première transformation est la suivante:

$$(10)\quad \int_0^a N_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^a L^r_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma =$$

$$= \int_0^a F_1(s,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau - \pi^2\int_s^a R_{\alpha\beta}(s)\,a_{\beta\gamma}(s)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau$$

où $R_{\alpha\beta}(s)$ désigne le résidu de fonction $N_{\alpha\beta}(s,\sigma)$. La fonction $F_1(s,\tau)$ est holomorphe au voisinage du segment $(0,a)$ et égale à la valeur principale de Cauchy

$$F_1(s,\tau) = \int_0^a N_{\alpha\beta}(s,\sigma)L^r_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,d\sigma$$

aux points d'intervalle réel $(0,a)$.

La seconde transformation est donnée par la relation:

$$(11)\quad \int_0^a L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^a N_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma =$$

$$= \int_0^a F_2(s,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau - \pi^2\int_s^a a_{\alpha\beta}(s)\,R_{\beta\gamma}(\sigma)\,\mu_\gamma(\sigma)\,d\sigma$$

où $R_{\beta\gamma}(\sigma)$ désigne le résidu de fonction $N_{\beta\gamma}(s,\sigma)$ et la fonction $F_2(s,\tau)$ est holomorphe au voisinage du segment $(0,a)$ est égale à la valeur principale de Cauchy

$$F_2(s,\tau) = \int_0^a L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)\,N_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,d\sigma$$

aux points d'intervalle réel $(0,a)$.

Enfin la troisième transformation est la suivante:

$$(12)\quad \int_0^a L^r_{\alpha\beta}(s,\sigma)\left[\int_0^s L^r_{\beta\gamma}(\sigma,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau\right]d\sigma =$$

$$= \int_0^s F_3(s,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau - \pi^2\int_s^a\left[\int_s^\tau a_{\alpha\beta}(\sigma)\,a_{\beta\gamma}(s)\,d\sigma\right]\mu_\gamma(\tau)\,d\tau$$

où la fonction $F_3(s,\tau)$ est holomorphe au voisinage du segment $(0,a)$ et égale à la valeur principale de Cauchy

$$F_3(s,\tau) = \int_0^a L^r(s,\sigma)L^r_1(\sigma,\tau)\,d\sigma$$

aux points d'intervalle réel $(0,a)$.

Nous constatons, que si les fonctions $\mu_\alpha(s)$ satisfont au système d'équations (8), elles satisferont aussi au système transformé:

$$(13)\quad \mu_\alpha(s) + \sum_{\beta\gamma}^m R_{\alpha\beta}(s)\,R_{\beta\gamma}(s)\,\mu_\gamma(s) = \bar{f}_\alpha(s) +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_\gamma^m\int_0^a\left[F_{\alpha\gamma}(s,\tau) + F^{(1)}_{\alpha\gamma}(s,\tau) + F^{(2)}_{\alpha\gamma}(s,\tau) + F^{(3)}_{\alpha\gamma}(s,\tau)\right]\mu_\gamma(\tau)\,d\tau -$$

$$-\sum_{\beta\gamma}^{m}\int_{s}^{a} a_{\beta\gamma}(s)\left[R_{\alpha\beta}(s)+R_{\alpha\beta}(\tau)+\int_{s}^{\tau} a_{\alpha\beta}(\sigma)\,d\sigma\right]\mu_{\gamma}(\tau)\,d\tau$$

$$(\alpha=1,2\ldots m)$$

Nous avons à résoudre le système d'équations

$$\mu_{\alpha}(s)+\sum_{\gamma}^{m}\overline{R}_{\alpha\gamma}(s)\,\mu_{\gamma}(s)=C_{\alpha} \tag{14}$$

où par C_{α} nous avons désigné les expressions à droite du système (13) et par $\overline{R}_{\alpha\gamma}(s)$ l'expression suivante:

$$\overline{R}_{\alpha\gamma}(s)=\sum_{\beta=1}^{m}R_{\alpha\beta}(s)\,R_{\beta\gamma}(s)$$

Du système (14) on tire les relations:

$$\mu_{\alpha}(s)=\frac{D_{\alpha}}{D}$$

ou D désigne le déterminant connu du système (14) que nous supposons différent de zéro:

$$D=\begin{vmatrix} 1+\overline{R}_{11}(s) & \ldots\ldots & \overline{R}_{\alpha 1}(s) & \ldots\ldots & \overline{R}_{m1}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{R}_{1\alpha}(s) & \ldots\ldots & 1+\overline{R}_{\alpha\alpha}(s) & \ldots\ldots & \overline{R}_{m\alpha}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{R}_{1m}(s) & \ldots\ldots & \overline{R}_{m\alpha}(s) & \ldots\ldots & 1+\overline{R}_{mm}(s) \end{vmatrix}\neq 0$$

et D_{α} désigne la valeur du déterminant, qu'on obtient en substituant à la place de la colonne α du déterminant D la colonne C_1, C_2, ... C_m, c'est à dire:

$$D_{\alpha}=\sum_{i=1}^{m}D_{\alpha i}\,C_i$$

ou $D_{\alpha i}$ désignent les sous-déterminants relatives correspondant aux éléments C_i.

$$\mu_{\alpha}(s)=\frac{\sum_{i}^{m}D_{\alpha i}\,C_i}{D}$$

$$(\alpha=1,2\ldots m)$$

et nous transformons le système (13) en système d'équations équivalents:

$$\mu_{\alpha}(s)=\overline{\overline{f}}_{\alpha}(s)+\frac{1}{\pi^2}\sum_{\gamma}^{m}\int_{0}^{a}\Phi_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\mu_{\gamma}(\tau)\,d\tau+\sum_{\gamma}^{m}\int_{s}^{a}\Psi_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\mu_{\gamma}(\tau)\,d\tau \tag{15}$$

$$(\alpha=1,2\ldots m)$$

où nous avons posé

$$\overline{\overline{f}}_{\alpha}(s)=\frac{\sum_{i}^{m}D_{\alpha i}\,f_i(s)}{D}$$

$$\Phi_{\alpha\gamma}(s,\tau)=\frac{\sum_{i}^{m}D_{\alpha i}\left(F_{i\gamma}(s,\tau)+F_{i\gamma}^{(1)}(s,\tau)+F_{i\gamma}^{(2)}(s,\tau)+F_{i\gamma}^{(3)}(s,\tau)\right.}{D}$$

$$\Psi_{\alpha\gamma}(s,\tau)=\frac{-\sum_{\beta i}^{m}D_{\alpha i}\,a_{\beta\gamma}(s)\left[R_{i\beta}(s)+R_{i\beta}(\tau)+\int_{s}^{\tau}a_{i\beta}(\sigma)\,d\sigma\right]}{D}$$

Les fonctions $F_{\alpha\gamma}(s,\tau)$, $F_{\alpha\gamma}^{(1)}(s,\tau)$, $F_{\alpha\gamma}^{(2)}(s,\tau)$, $F_{\alpha\gamma}^{(3)}(s,\tau)$ sont holomorphes au voisinage d'axe réel et les fonctions $R_{\alpha\beta}(s)$ ont les valeurs réelles sur l'axe réel. Il en résulte, que les noyaux $\Phi_{\alpha\gamma}$ et $\Psi_{\alpha\gamma}$ du système d'équations intégrales transformées (15) sont bornés et holomorphes, si les points s et τ sont situés au voisinage de l'intervalle $(0, a)$. Les fonctions $\overline{\overline{f}}_{\alpha}(s)$ ont la même propriété. Les équations (15) sont linéaires, mais du type mixte, puisqu'elles contiennent les intégrales aux limites variables et les intégrales aux limites fixes.

On pourra amener le système (15) au système d'équations de Fredholm, en résolvant le système d'équations de Volterra

$$\mu_{\alpha}(s)=\varphi_{\alpha}(s)+\sum_{\gamma}^{m}\int_{s}^{a}\Psi_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\mu_{\gamma}(\tau)\,d\tau \tag{16}$$

$$(\alpha=1,2\ldots m)$$

$\varphi_{\alpha}(s)$ étant les fonctions données.

Nous pouvons résoudre le système (16) par la méthode des approximations successives comme dans le cas d'une seule équation de Volterra.

Nous posons $\mu_{\gamma}^{(0)}(\tau)=\varphi_{\gamma}(\tau)$ et obtenons le système des approximations:

$$
(17)\quad \begin{cases}
\mu_\alpha^{(1)}(s) = \varphi_\alpha(s) + \sum\limits_{\gamma}^{m} \int\limits_s^a \Psi_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\varphi_\gamma(\tau)\,d\tau \\[2ex]
\mu_\alpha^{(2)}(s) = \varphi_\alpha(s) + \sum\limits_{\gamma}^{m} \int\limits_s^a \Psi_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\mu_\gamma^{(1)}(\tau)\,d\tau \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
\mu_\alpha^{(n)}(s) = \varphi_\alpha(s) + \sum\limits_{\gamma}^{m} \int\limits_s^a \Psi_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\mu_\gamma^{(n-1)}(\tau)\,d\tau \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Si la suite des fonctions (17) est convergente, les limites

$$\lim_{n\to\infty} \mu_\alpha^{(n)}(s) = \mu_\alpha(s); \qquad (\alpha = 1, 2 \dots m)$$

présenteront la solution du système (16).

Par induction nous arrivons aux relations:

$$(19)\quad \mu_\alpha^{(n+1)}(s) = \varphi_\alpha'(s) + \sum_{\rho=1}^{m} \int\limits_s^a [\Psi_{\alpha\rho}(s,\tau) + \Psi_{\alpha\rho}^{(1)}(s,\tau) + \dots + \Psi_{\alpha\rho}^{(n)}(s,\tau)]\,\varphi_\rho(\tau)\,d\tau$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots m)$$

Les noyaux itérés $\Psi_{\alpha\rho}^{(n)}(s,\tau)$ sont donnés par les expressions:

$$(20)\quad \Psi_{\alpha\rho}^{(n)}(s,\tau) = \sum_{\gamma=1}^{m^n} \int\limits_s^\tau \Psi_{\alpha\gamma}(s,\sigma)\,\Psi_{\gamma\rho}^{(n-1)}(\sigma,\tau)\,d\tau$$

$$(\alpha, \rho = 1, 2 \dots m)$$

Nous pouvons prouver que les noyaux $\Psi_{\alpha\rho}^{(n)}(s,\tau)$ vérifient pour toute la valeur n vérifient les inégalités suivantes:

$$(21)\quad |\Psi_{\alpha\rho}^{(n)}(s,\tau)| < km^n \frac{(s-\tau)^n}{n!}$$

où k désigne la plus grande des bornes supérieures des modules des noyaux $|\Psi_{\alpha\rho}|$.

Les noyaux diminuent comme les termes d'une série exponentielle; nous en concluons que la série

$$(22)\quad \Gamma_{\alpha\rho}(s,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\alpha\rho}^{(n)}(s,\tau)$$

est uniformément convergente.

La solution unique du système (18) aura donc la forme:

$$(23)\quad \mu_\alpha(s) = \varphi_\alpha(s) + \sum_{\rho=1}^{m} \int\limits_s^a \Gamma_{\alpha\rho}(s,\tau)\,\varphi_\rho(\tau)\,d\tau$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots m)$$

En substituant dans les formules (23) les expressions

$$\varphi_\alpha(s) = \overline{\overline{f}}_\alpha(s) + \frac{1}{\pi^2} \sum_{\gamma=1}^{m} \int\limits_0^a \Phi_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau$$

nous sommes donc amenés à résoudre le système d'équations de Fredholm suivant:

$$(24)\quad \mu_\alpha(s) = \lambda \sum_{\gamma=1}^{m} \int\limits_0^a K_{\alpha\gamma}(s,\tau)\,\mu_\gamma(\tau)\,d\tau + F_\alpha(s)$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi^2} \qquad \alpha = 1, 2 \dots m$$

où par $K_{\alpha\gamma}(s,\tau)$ et $F_\alpha(s)$ nous avons désigné:

$$K_{\alpha\gamma}(s,\tau) = \sum_{\rho=1}^{m} \int\limits_0^a \Gamma_{\alpha\rho}(s,\sigma)\,\Phi_{\rho\gamma}(\sigma,\tau)\,d\sigma + \Phi_{\alpha\gamma}(s,\tau)$$

$$F_\alpha(s) = \sum_{\rho=1}^{m} \int\limits_0^a \Gamma_{\alpha\rho}(s,\sigma)\,\overline{\overline{f}}_\alpha(\tau)\,d\tau + \overline{\overline{f}}_\alpha(s)$$

Le système (24) peut être amené à une équation de Fredholm avec une fonction inconnue.

Soit l'ensemble Ω des m intervalles $I_1, I_2, \ldots I_m$ n'ayant ancuns points communs et obtenus par déplacement d'intervalle $(0, a)$ le long de l'axe réel.

Considérons les fonctions suivantes déterminées dans l'ensemble Ω:

$M(s_\alpha) = F_\alpha(s)$ (si s_α est situé dans l'intervalle I_α et correspond au poin s d'intervalle $0, a$)

$X(s_\alpha, \tau_\gamma) = K_{\alpha\gamma}(s, \tau)$ (si s_α est dans l'intervalle I_α et τ_γ dans I_γ).

Soit $P(s)$ la fonction inconnue sur Ω liée avec μ_α par les relations

$P(s_\alpha) = \mu_\alpha(s)$ (si s est dans l'intervalle I_α).

Nous en obtenons une seule équation de Fredholm

$$P(s) = M(s) + \lambda \int_\Omega X(s, \tau) P(\tau) d\tau \tag{25}$$

D'après la formuie connue de Fredholm la solution de l'equation (25) aura la forme suivante:

$$P(s) = M(s) + \lambda \int_\Omega \frac{D(s, \tau, \lambda)}{D(\lambda)} M(\tau) d\tau \tag{26}$$

sous la condition que la valeur $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ n'est pas la valeur caractéristique du noyau $X(s, \tau)$.

Les valeurs de la fonction P aux points s_α situés dans les intervalles particuliers I_α $(\alpha = 1, 2 \ldots m)$ nous donnent les valeurs des fonctions $\mu_\alpha(s)$ $(\alpha = 1, 2 \ldots m)$.

Les fonctions $\Gamma_{\alpha\rho}(s, \tau)$ comme les sommes des séries uniformément convergentes (22) sont holomorphes dans le voisinage du segment $(0, a)$. Il en résulte que les fonctions $K_{\alpha\gamma}(s, \tau)$ et $F_\alpha(s)$ sont aussi holomorphes au voisinage du segment $(0, a)$.

Nous en concluons donc, que les fonctions obtenues

$$\mu_1(s), \mu_2(s) \ldots \mu_m(s)$$

sont également holomorphes au voisinage du segment $(0, a)$.

D'après les transformations (9), (10), (11), (12), vraies pour toutes les fonctions holomorphes $\mu_\alpha(s)$, la solution de l'équatton (24) vérifie le système (15), donc aussi le système (13), (7) et le système donné (5).

En substituant les fonctions $\mu_1(s), \mu_2(s) \ldots \mu_m(s)$ dans les intégrales (3), nous obtenons la solution $u_1, u_2, \ldots u_m$ du problème aux limites proposé.

Państwowy Instytut Matematyczny

Quelques applications des équations intégrales dans la théorie d'électricité

O pewnych zastosowaniach równań całkowych w teorii elektryczności

Par

R. HAMPEL (Varsovie)

Considérations préliminaires:

Dans ce travail j'étudie deux problèmes aux limites concernant les équations aux dérivées partielles du type elliptique.

J'obtiens les solutions des problèmes en m'appuyant sur la théorie des équations intégrales de Fredholm.

I. Le problème de la perturbation du champ électrique produite par l'introduction d'un diélectrique.

A. Mise en équation.

Considérons un champ électrostatique

$$K_0(x_1, x_2, x_3) = -\operatorname{grad} V_0(x_1, x_2, x_3)$$

défini dans un domaine spatial Λ; le potentiel $V_0(x_1, x_2, x_3)$ est donc une fonction harmonique de coordonnées x_1, x_2, x_3 définie dans le domaine Λ. Nous introduisons à l'intérieur du champ un diélectrique non homogène mais isotrope qui remplit un domaine borné Ω limité par une surface S.

Je suppose donnée la perméabilité électrique

$$\varepsilon(x_1, x_2, x_3) \geqslant 1$$

en fonction du point $M(x_1, x_2, x_3)$ du domaine Ω. Il faut déterminer la perturbation du champ causée par la polarisation du diélectrique introduit.