La solution (8) est évidemment unique, puisque s'il existait l'autre solution H_0' remplissant les équations (6) et la condition limite à la surface S, on aurait pour la différence:

$$\vec{R} = \vec{H}_0 - \vec{H}_0'$$

les équations

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{R} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{R} = 0 \end{cases}$$

à l'intérieur du domaine Ω et $R_n = 0$ à la surface S, d'où résulte immédiatement que $\vec{R} = \vec{H}_0 - \vec{H}_0' = 0$ dans le domaine Ω.

En substituant le champ magnétique initial obtenu $H_0(x, y, z)$ dans l'expression (3), on aura la solution unique du problème proposé.

Państwowy Instytut Matematyczny.

Remarques sur un problème mixte concernant l'équation des télégraphistes

Uwagi o zagadnieniu mieszanym dotyczącym równania telegrafijnego

Par

W. POGORZELSKI (Varsovie)

D'après les simples hypothèses physiques, l'intensité du courant I et le potentiel U satisfont à tout le moment t et en tout point d'une ligne télégraphique à l'abscisse s au système d'équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \begin{cases} RI = -\dfrac{\partial U}{\partial s} - L\dfrac{\partial I}{\partial t} \\ GU = -\dfrac{\partial I}{\partial s} - C\dfrac{\partial U}{\partial t} \end{cases}$$

R, G, L, C étant les constantes positives.

Le problème mixte que nous voulons discuter consiste en la recherche d'une solution du système (1) qui vérifie la condition initiale

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} I(s,t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} U(s,t) = 0 \end{cases}$$

pour tout $s > 0$ et la condition au bord:

$$(3) \qquad \lim_{s\to 0} U(s,t) = E(t)$$

pour tout $t > 0$, $E(t)$ étant une fonction donnée, définie, continue et bornée pour tout $t \geqslant 0$.

En outre on admet la condition à l'infini

$$\lim_{s\to\infty} U(s,t) = 0 \tag{4}$$

pour $t \geqslant 0$.

Nous voulons discuter la solution du problème cité que fournit *le calcul operationnel* moderne.

On sait que dans ce calcul on utilise la transformation de Laplace [1]) et l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} U(s,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} u(s,z)\, e^{zt}\, dz \\ I(s,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} j(s,z)\, e^{zt}\, dz \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$u(s,z)$ et $j(s,z)$ étant les fonctions de la variable complexe $z = x + iy$, holomorphes pour $x > x_0$.

Les fonctions (5) satisferont au système (1) si les fonctions $u(s,z)$, $j(s,z)$ remplissent le système d'équations différentielles ordinaires

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= -(R+Lz)\, j \\ \frac{dj}{ds} &= -(G+Cz)\, u \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$z = x + iy$ étant un *paramètre* complexe.

Remarque faite de la condition (3) on admet pour la fonction $u(s,z)$ la condition

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} u(s,z) = \int_0^\infty E(t)\, e^{-zt}\, dt = u_0(z) \\ &\lim_{s\to\infty} u(s,z) = 0 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

[1]) G. Doetsch. Laplace — Transformation (1943).
W. Wagner. Operatorenrechnung (Leipzig, 1940).

et l'on arrive à la solution

$$\left\{\begin{aligned} u(s,z) &= u_0(z)\, e^{-\sqrt{(R+Lz)(G+Cz)}\,.\,s} \\ j(s,z) &= u_0(z)\sqrt{\frac{G+Cz}{R+Lz}}\, e^{-\sqrt{(R+Lz)(G+Cz)}\,.\,s} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

du système (6).

En substituant les expressions (8) dans les formules (5), on aura la solution du système (1), qui vérifie les conditions (2), (3) et (4).

La solution obtenue est en général discontinue suivant la ligne $t = s\sqrt{LC}$, ce qu'on voit nettement dans le cas particulier

$$E(t) = \text{const.} = U_0\,.$$

On obtient dans ce cas

$$I(s,t) = \frac{U_0}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\left(C+\frac{G}{z}\right)\frac{e^{-s\sqrt{(R+Lz)(G+Cz)}}}{\sqrt{(R+Lz)(G+Cz)}}\, e^{zt}\, dz = \tag{9}$$

$$= U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\left[e^{-\gamma t} J_0\left(i\mu\sqrt{t^2-\frac{s^2}{v^2}}\right) + \frac{G}{C}\int_{\frac{s}{v}}^{t} e^{-\gamma t} J_0\left(i\mu\sqrt{\tau^2-\frac{s^2}{v^2}}\right) d\tau\right]$$

si $t > \frac{s}{v}$ et $I = 0$, si $t < \frac{s}{v}$; en outre

$$U(s,t) = U_0\, e^{-\frac{\gamma}{v}s} - \frac{U_0\,\mu\, s i}{v}\int_{\frac{s}{v}}^{t} e^{-\gamma\tau}\frac{J_1\left(i\mu\sqrt{\tau^2-\frac{s^2}{v^2}}\right)}{\sqrt{\tau^2-\frac{s^2}{v^2}}}\, d\tau \tag{10}$$

si $t > \frac{s}{v}$ et $U = 0$, si $t < \frac{s}{v}$; on a posé

$$w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(11) $$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right).$$

On voit donc qu'au point s d'une ligne le potentiel U est égal à zéro pour $t < \frac{s}{w}$ et atteint brusquement la valeur

$$U_1 = U_0 e^{-\frac{\gamma}{w} s}$$

au moment $t = \frac{s}{w}$.

Dans cette note nous voulons montrer que *la solution discontinue* fournie par le calcul opérationnel *n'est pas unique* et nous allons indiquer les autres solutions qui remplissent les mêmes conditions limites.

A cet effet nous utiliserons les méthodes générales d'Analyse mathématique connues dans la théorie des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique à deux variables indépendantes [1]).

En éliminant la fonction I entre les équations (1) on arrive à l'équation des télégraphistes pour la fonction U:

(12) $$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} - LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (RC + GL)\frac{\partial U}{\partial t} - GRU = 0.$$

D'après les conditions (2) et (3), on cherche la solution U de l'équation (12) qui remplit la condition

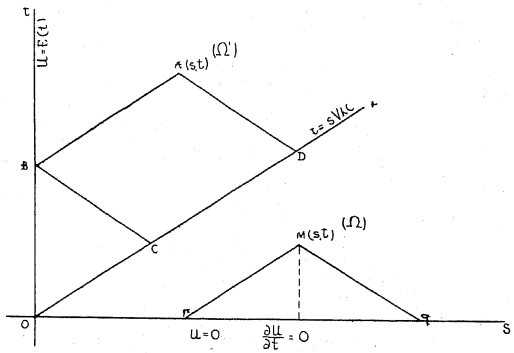
(13) $$U = 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

si $t \to 0$ $(s > 0)$ et la condition

(14) $$\lim_{s \to 0} U(s, t) = E(t); \quad (t > 0)$$

sur l'axe Ot.

[1]) Voir par exemple: E. Goursat, Cours d'Analyse (tome III).



Pour trouver la solution U, considérons le plan des coordonnées rectangulaires (s, t).

Soit OP la caractéristique

$$t = s\sqrt{LC}$$

de l'équation (13) qui passe par l'origine O.

La valeur de la fonction U au point $M(s, t)$ du domaine Ω située entre la caractéristique OP et l'axe Os dépend des valeurs de cette fonction U et de $\frac{\partial U}{\partial t}$ sur le segment pq de l'axe Os embrassé par les caractéristiques Mp et Mq passant par le point M. D'après la théorie bien connue de Riemann il est facile d'en conclure qu'on aura $U = 0$ en tout le point M du domaine Ω.

Cherchons maintenant la valeur de la fonction $U(s, t)$ aux points $A(s, t)$ du domaine Ω' situés entre OP et Ot. Nous montrons que cette fonction sera déterminée dans Ω' si l'on donne *a priori* arbitrairement les valeurs limites *supérieures* de cette fonction sur la droite OP qui peuvent être différentes de valeur limite *inférieure* $U = 0$.

En posant

(15) $$U = Ve^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)t} = Ve^{-\gamma t}$$

et en introduisant les nouvelles variables:

$$(16)\qquad \begin{cases} x = s - \dfrac{t}{\sqrt{LC}} \\ y = s + \dfrac{t}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

on aura l'équation plus simple

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{4}\alpha V = 0$$

où la constante α a la valeur

$$\alpha = GR - \frac{1}{4}\frac{(RC+GL)^2}{LC}.$$

Soit maintenant le quadrilatère $ABCD$ dont les côtés sont parallèles aux caractéristiques, le point B étant sur l'axe Ot et le segment CD sur la caractéristique OP.

Considérons d'abord l'équation

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = F(x, y)$$

$F(x, y)$ étant une fonction déterminée dans le domaine Ω'.

En intégrant les deux membres de l'équation (18) sur le domaine du quadrilatère $ABCD$, on a

$$(19)\qquad \iint\limits_{ABCD} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial \eta}\, d\sigma\, d\tau = \iint\limits_{ABCD} F(\xi, \eta)\, d\sigma\, d\tau$$

(σ, τ) étant les coordonnées du point d'intégration liées avec les coordonnées (ξ, η) par les relations

$$\begin{cases} \xi = \sigma - \dfrac{\tau}{\sqrt{LC}} \\ \eta = \sigma + \dfrac{\tau}{\sqrt{LC}}. \end{cases}$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$(20)\qquad V(A) = V(B) + V(D) - V(C) + \int\limits_{-x}^{y}\left[\int\limits_{0}^{x} F(\xi, \eta)\, d\xi\right] d\eta.$$

La fonction V qui satisfait à l'équation (18) prend dans le domaine Ω' les valeurs (20) et inversement l'expression (20) présente la solution unique de l'équation (18) qui prend les valeurs limites données *a priori* sur les droites OP et Ot:

$$(21)\qquad \begin{aligned} V(B) &= E(t - s\sqrt{LC})\, e^{\gamma(t - s\sqrt{LC})} \\ V(D) &= U(D)\, e^{\frac{1}{2}\gamma(t + s\sqrt{LC})} \\ V(C) &= U(C)\, e^{\frac{1}{2}\gamma(t - s\sqrt{LC})} \end{aligned}$$

supposition faite que $U(B)$ et $U(C)$ tendent *vers la même limite* $E(O)$ si A tend vers D et en outre que les fonctions limites $E(t)$, $U(D)$, $U(C)$ soint dérivables.

Il en résulte que la fonction $V(x, y)$ qui satisfait à l'équation (17), satisfait aussi à l'équation intégrale:

$$(22)\qquad V(x, y) = V(B) + V(D) - V(C) + \frac{1}{4}\alpha \int\limits_{-x}^{y}\left[\int\limits_{0}^{x} V(\xi, \eta)\, d\xi\right] d\eta$$

et inversement la solution de cette équation intégrale satisfait à l'équation (17) dans le domaine Ω' et prend les valeurs limites données sur les droites Ot et OP.

Or, l'équation (22) est du type bien connu de Volterra et admet la solution unique dans le domaine Ω'.

L'existence de la fonction $U(s, t)$ dans le domaine prenant les valeurs limites données sur Ot et OP est donc démontrée.

Connaissant la fonction $U(s, t)$, on peut déterminer la fonction $I(s, t)$ dans le domaine Ω et Ω' d'après les équations (1).

Dans le domaine Ω on a évidemment $I = 0$.

Pour déterminer I dans le domaine Ω', remarquons d'abord qu'on peut déterminer les valeurs limites supérieures de la fonction I au point de la caractéristique OP de telle façon que les valeurs limites supérieures des dérivées des fonctions U et I au point OP satisfassent aux équations (1);

cette détermination sera unique si l'on donne *a priori* la valeur limite supérieure de la fonction I en un point de la droite OP. Connaissant les valeurs limites supérieures de la fonction I sur la droite OP, on obtiendra la fonction I dans le domaine Ω' d'après la première des équations (1):

$$RI = -\frac{\partial U}{\partial s} - L\frac{\partial I}{\partial t} \tag{23}$$

U étant connue. Les fonctions obtenues U et I vérifient aussi la seconde des équations (1) dans le domaine Ω'. En effet, les équations (12) et (23) étant remplies, nous en déduisons

$$R\left(\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU\right) + L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU\right) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU = \left(\frac{\partial I}{\partial s} + C\frac{\partial U}{\partial t} + GU\right)_{t_0 = s\sqrt{LC}} \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$$

Mais les valeurs limites remplissent la seconde des équations (1) pour $t = t_0$, donc la seconde équation est vérifiée dans le domaine Ω'.

Les valeurs limites supérieures de la fonction U sur la caractéristique OP peuvent être données arbitrairement, donc il existe une infinité des solutions des équations (1) discontinues sur OP et remplissant les mêmes conditions limites (2) et (3) sur les droites Os et Ot.

Dans le cas particulier où $E(t) \to 0$ si $t \to 0$ il existe une solution (U, I) dans Ω' dont les valeurs limites supérieures sont nulles sur OP, donc il existe une solution (U, I) continue dans $\Omega + \Omega'$ satisfaisant aux conditions limites (2) et (3) et il n'existe aucune autre solution continue.

Les dérivées de cette solution peuvent être en général discontinues sur OP.

Remarquons maintenant que le saut brusque de la solution (6) et (7) pour $t = \frac{s}{w}$ tend vite vers zéro si $s \to \infty$ et que dans les applications le potentiel $E(t)$ atteint sa valeur U_0 d'une façon continue à partir de zéro; nous en concluons que la solution (6) et (7) fournie par le calcul opérationnel est voisine de la solution continue, unique pour s suffisamment grand. Donc cette solution peut être utilisée dans les applications pour les points suffisamment éloignés de l'origine d'une ligne télégraphique, ce qui est important puisque cette solution a la forme commode pour le calcul effectif.

Le problème aux limites de H. Poincaré pour le système de fonctions

Zagadnienie brzegowe H. Poincarégo dla układu funkcyj

Par

J. WOLSKA (Varsovie)

En 1910, dans le tome III de son ouvrage „Mécanique Céleste", H. Poincaré a proposé un problème aux limites, consistant en la recherche d'une fonction harmonique u dans le domaine D qui au bord C de ce domaine remplit la relation linéaire suivante:

$$\frac{du}{dn} + a(s)u + b(s)\frac{du}{ds} = f(s)$$

entre la dérivée suivant la normale $\frac{du}{dn}$ et la dérivée tangentielle $\frac{du}{ds}$; a, b, f sont les fonctions données de l'arc s sur la courbe C. La résolution fort intéressante de ce problème, donnée par H. Poincaré, est basée sur la théorie des résidus et la théorie de Fredholm, mais elle n'est pas complète.

Le problème précédant était traité ensuite par E. Gevrey (Journal de Mathématiques, 1930) et W. Pogorzelski (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Techniques à Varsovie, 1935; Mathematische Zeitschrift, 1939).

Récemment les mathématiciens géorgiens J. Vécoua et B. Chvedelidze ont traité le problème de H. Poincaré d'un façon très complète dans le cas du contour non analytique (Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. de l'Union Soviétique 1940, 1941, 1947); on trouve aussi la bibliographie complète du problème dans l'ouvrage récent de Mouschelichvili: „Les équations intégrales singulières (Moscou, 1946)".