Le cas particulier $n=1$.

Si l'on fait $n=1$, les formules générales obtenues prennent la forme très simple, comme suit:

$$u(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X_\nu(x)\int\limits_0^l f(x)\,X_\nu(x)\,dx}{\int\limits_0^l X_\nu^2(x)\,dx}\,e^{-a^2\varkappa_\nu^2 t},\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad t>0; \tag{21}$$

$$X_\nu(x)=\cos\varkappa_\nu x+\frac{h_0}{\varkappa_\nu}\sin\varkappa_\nu x,\quad \operatorname{tg}\varkappa_\nu l=\frac{\varkappa_\nu(h_0+h_1)}{\varkappa_\nu^2-h_0h_1}.$$

Posant, en outre, $h_0=h_1=h$, $f(x)=u_0$ (une constante quelconque), on déduit de (21) aisément

$$u(x,t)=4hu_0\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2h+l(h^2+\varkappa_\nu^2)}\,e^{-a^2\varkappa_\nu^2 t}\left(\cos\varkappa_\nu x+\frac{h}{\varkappa_\nu}\sin\varkappa_\nu x\right),$$

$$\operatorname{tg}\varkappa_\nu l=\frac{2h\varkappa_\nu}{\varkappa_\nu^2-h^2}, \tag{21,1}$$

un résultat bien connu et souvent cité dans la littérature sur la conduction de la chaleur.

Remarque: L'auteur de l'article précédent va bientôt donner des informations au sujet d'un travail qui se rattache aux problèmes des sphères et cylindres stratifiés. Les conditions seront beaucoup plus générales que celles dont on s'est servi plus haut.

Contribution à la théorie du champ électromagnétique

Przyczynek do teorii pola elektromagnetycznego

Par

W. POGORZELSKI (Varsovie)

Conformément à la théorie de Maxwell, le vecteur-intensité du champ électrique $\vec{K}(x,y,z,t)$ et le vecteur-intensité du champ magnétique $\vec{H}(x,y,z,t)$ remplissent en tout point (x,y,z) du domaine vide et pour tout le temps t les équations:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}=\operatorname{rot}\vec{H}; \qquad \operatorname{div}\vec{K}=0\\ &-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\vec{K}; \qquad \operatorname{div}\vec{H}=0\,. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Il en résulte, d'après le calcul bien connu, que ces fonctions $\vec{K}$ et $\vec{H}$ satisfont à l'équation des ondes [1]):

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\vec{K}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{K}}{\partial t^2}=0\\ &\Delta\vec{H}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

[1]) Δ désigne l'opérateur de *Laplace*.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant: *étant donnée l'intensité du champ électrique* $\vec{K}(x,y,z,t)$ *remplissant l'équation des ondes*

$$\Delta\vec{K}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{K}}{\partial t^2}=0 \tag{2'}$$

et l'équation

$$\operatorname{div}\vec{K}=0$$

en tout point (x,y,z) *du domaine* Ω *limité par la surface fermé* S *et pour tout le temps* $t\geqslant 0$, *trouver l'intensité du champ magnétique correspondant* $\vec{H}(x,y,z,t)$, *telle que les équations de Maxwell soient remplies en tout point intérieur du domaine* Ω *et pour tout le temps* $t\geqslant 0$.

Nous verrons que ce problème aura une solution déterminée, si l'on donne en outre quelque condition limite sur la surface S, que nous préciserons dans la suite.

Le champ $\vec{K}$ étant donné, on tire de la seconde équation de Maxwell la formule

$$\vec{H}(x,y,z,t)=-c\int_0^t \operatorname{rot}\vec{K}\cdot dt+\vec{H}_0(x,y,z) \tag{3}$$

pour $t\geqslant 0$ et pour le domaine Ω, $\vec{H}_0(x,y,z)$ désignant l'intensité du champ magnétique inconnu au moment initial $t=0$.

Pour déterminer le champ initial $\vec{H}_0$ remarquons qu'on a, d'après l'équation (2)

$$\operatorname{rot}\vec{H}=-c\int_0^t \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{K})\,dt+\operatorname{rot}\vec{H}_0=c\int_0^t\Delta\vec{K}\cdot dt+\operatorname{rot}\vec{H}_0= \tag{4}$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^t\frac{\partial^2\vec{K}}{\partial t^2}dt+\operatorname{rot}\vec{H}_0=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}\right)_0+\operatorname{rot}\vec{H}_0.$$

Pour que la première équation de Maxwell soit remplie à tout le moment $t\geqslant 0$, il faut donc et il suffit qu'on ait au moment initial:

$$\operatorname{rot}\vec{H}_0-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}\right)_0=0. \tag{5}$$

La formule (3) présentera par conséquent la solution du problème, si le champ magnétique initial $\vec{H}_0$ remplit les équations:

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{H}_0=\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial\vec{K}}{\partial t}\right)_0\\[2ex] \operatorname{div}\vec{H}_0=0\end{cases} \tag{6}$$

en tout point intérieur du domaine Ω.

Le champ électrique $\vec{K}$ étant donné, les équations (6) font connaître le tourbillon et la divergence du champ inconnu $\vec{H}_0$ à l'intérieur du domaine Ω.

Le champ $\vec{H}_0$ sera donc déterminé d'une façon unique, si l'on donne en outre la valeur de *la composante normale* (valeur limite intérieure) $H_0^{(n)}$ de l'intensité du champ magnétique initial en tout point de la surface S qui limite le domaine Ω.

Il est évident que cette composante doit remplir la condition nécéssaire:

$$\iint_S H_0^{(n)}\,d\sigma=0. \tag{7}$$

Nous rappellons brièvement le raisonnement qui donne le champ $\vec{H}_0$ d'après les équations (6).

Nous cherchons notamment le champ $\vec{H}_0$ sous la forme:

$$\vec{H}_0=\operatorname{rot}\vec{A}+\operatorname{grad}V \tag{8}$$

avec la condition supplémentaire

$$\operatorname{div}\vec{A}=0. \tag{9}$$

Il est nécéssaire que V soit une fonction harmonique:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}V=\Delta V=0 \tag{10}$$

dans le domaine Ω.

D'après l'équation (6), le vecteur $\vec{A}(x,y,z)$ doit remplir dans le domaine Ω l'équation:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}\right)_0. \tag{11}$$

En supposant que la fonction $\left(\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}\right)_0$ admet les dérivées partielles intégrables, nous pouvons admettre pour la solution de l'équation (11) l'éxpression

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \frac{\vec{W}(M')}{r}\, d\tau_{M'} \tag{12}$$

$(r = MM')$ Ω' étant le domaine arbitraire borné contenant le domaine donné Ω dans son intérieur, $\vec{W}(M')$ étant un champ de vecteurs dans Ω' identique avec le champ $\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}\right)_0$:

$$\vec{W} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}\right)_0 \tag{13}$$

en tout point du domaine Ω et *prolongé en dehors de ce domaine* $(\Omega' - \Omega)$ d'une façon arbitraire, mais sous la condition importante que *la composante normale disparait:*

$$W_n = 0 \tag{14}$$

en tout point de la surface S' limitant le domaine Ω', que ce champ $\vec{W}$ *admet les dérivées* intégrables dans le domaine Ω', donc aussi sur la surface S et que $\operatorname{div}\vec{W} = 0$ dans Ω'.

Grâce à la propriété (14), le vecteur (12) remplit la condition (9); nous avons en effet en tout point du domaine Ω':

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \tag{15}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} W_\xi + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} W_\eta + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} W_\zeta\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \operatorname{div}\left(\frac{\vec{W}}{r}\right) d\tau + \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \frac{\operatorname{div}\vec{W}}{r}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint_{S'} \frac{W_n}{r}\, d\sigma = 0.$$

Il en résulte que si l'on substitue l'expression (12) dans la formule (8), $V(x,y,z)$ étant une fonction harmonique quelconque dans Ω, on aura le champ $\vec{H}_0(x,y,z)$ qui vérifie les équations (6).

Il faut maintenant choisir la fonction harmonique $V(x,y,z)$ de façon que le champ $\vec{H}_0$ remplisse la condition aux limites, c. à d. pour que la composante normale $H_0^{(n)}$ ait les valeurs données aux points de la surface S. Remarquons donc que la fonction (8) satisfera à la condition limite si la fonction harmonique $V(x,y,z)$ remplit la condition

$$\frac{\partial V}{\partial n} = H_0^{(n)} - \operatorname{rot}_n \vec{A} \tag{16}$$

aux points de la surface S. Mais $H_0^{(n)}$ est donné et le champ $\vec{A}$ est déterminé dans le domaine Ω' par la formule (12), donc la détermination de la fonction harmonique $V(x,y,z)$ dans le domaine Ω présente le problème connu de Neumann. Dans le cas actuel, ce problème admet la solution unique dans Ω puisque la condition nécéssaire et suffisante

$$\iint_S \frac{dV}{dn}\, d\sigma = \iint_S H_0^{(n)}\, d\sigma - \iint_S \operatorname{rot}_n \vec{A}\, d\sigma = 0$$

est remplie.

La solution (8) est évidemment unique, puisque s'il existait l'autre solution H_0' remplissant les équations (6) et la condition limite à la surface S, on aurait pour la différence:

$$\vec{R} = \vec{H}_0 - \vec{H}_0'$$

les équations

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{R} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{R} = 0 \end{cases}$$

à l'intérieur du domaine Ω et $R_n = 0$ à la surface S, d'où résulte immédiatement que $\vec{R} = \vec{H}_0 - \vec{H}_0' = 0$ dans le domaine Ω.

En substituant le champ magnétique initial obtenu $H_0(x, y, z)$ dans l'expression (3), on aura la solution unique du problème proposé.

Państwowy Instytut Matematyczny.

Remarques sur un problème mixte concernant l'équation des télégraphistes

Uwagi o zagadnieniu mieszanym dotyczącym równania telegrafijnego

Par

W. POGORZELSKI (Varsovie)

D'après les simples hypothèses physiques, l'intensité du courant I et le potentiel U satisfont à tout le moment t et en tout point d'une ligne télégraphique à l'abscisse s au système d'équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \begin{cases} RI = -\dfrac{\partial U}{\partial s} - L\dfrac{\partial I}{\partial t} \\ GU = -\dfrac{\partial I}{\partial s} - C\dfrac{\partial U}{\partial t} \end{cases}$$

R, G, L, C étant les constantes positives.

Le problème mixte que nous voulons discuter consiste en la recherche d'une solution du système (1) qui vérifie la condition initiale

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} I(s, t) = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} U(s, t) = 0 \end{cases}$$

pour tout $s > 0$ et la condition au bord:

$$(3) \qquad \lim_{s \to 0} U(s, t) = E(t)$$