Appliquons maintenant l'inégalité de Lipschitz aux fonctions $\Phi\,[x, y, \xi_1, \dots \xi_n]$ et nous obtenons:

$$(39)\qquad |\varphi_\alpha^{(\lambda)}(z) - \varphi_\alpha^{(\lambda-1)}(z)| < kk'n \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^a |\varphi_\beta^{(\lambda-1)}(y) - \varphi_\beta^{(\lambda-2)}(y)|\,dy$$

où k' désigne la borne supérieure des modules des dérivées partielles

$$\left|\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \xi_\alpha}\right|$$

dans Ω et Ω_1.

Par l'induction nous arrivons aux inégalités:

$$|\varphi_\alpha^{(2)}(z) - \varphi_\alpha^{(1)}(z)| < kk'an^2\,|\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\alpha^{(0)}|; \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

$$|\varphi_\alpha^{(3)}(z) - \varphi_\alpha^{(2)}(z)| < (kk'an^2)^2\,|\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\alpha^{(0)}|$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\varphi_\alpha^{(\lambda)}(z) - \varphi_\alpha^{(\lambda-1)}(z)| < (kk'an^2)^{(\lambda-1)}\,|\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\alpha^{(0)}|$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

vraies pour toute valeur λ.

Si maintenant la condition

$$kk'an^2 < 1$$

est verifiée, les suites infinies des approximations (36) sont uniformément convergentes et ses limites sont les fonctions holomorphes dans la bande Ω:

$$(40)\qquad \lim_{\lambda\to\infty} \varphi_\alpha^{(\lambda)} = \varphi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n).$$

Ces fonctions présentent la solution du système (31) et ont la période réelle a.

Les fonctions (40) satisfont aussi au système (29), donc aussi au système proposé (28), le noyau auxiliaire $M(z, x)$ étant fermé.

La preuve que la solution précedente est unique sera la même que dans la méthode des approximations succéssives en général.

Conduction de la chaleur dans une barre formée de plusieurs parties en matériaux différents

Przewodzenie ciepła w pręcie złożonym z kilku różnych części

Par

V. VODIČKA (Plzeň, Tchécoslovaquie)

La propagation de la chaleur dans les corps stratifiés et, plus généralement, dans les objets composés de plusieurs parties en matériaux différents forme, au point de vue de la théorie analytique da la chaleur, un vaste groupe de problèmes très importants parmi lesquels on trouve encore beaucoup de quéstions irrésolues. Les calculs qui vont suivre se rattachent au cas de la conduction, présentent une contribution à la théorie mentionnée et sont, en outre, d'une signification considérable pour la pratique industrielle.

Une barre très mince par rapport à sa longueur (pour pouvoir envisager tout ce qui suit comme un problème à une dimension) et d'une section transversale constante, consiste de n parties en matériaux différents: la i-tième entre elles se trouve entre les deux points x_{i-1}, x_i $(i = 1, 2, \dots, n;$ $x_0 = 0)$ de l'axe des x, sa longueur étant $l_i = x_i - x_{i-1}$ et son matérial ayant les constantes λ_i, c_i, γ_i (le coefficient de la conductibilité intérieure, le calorique spécifique par unité de volume et la masse par unité de volume).

En supposant la distribution initiale de la température, dans chaque portion du corps, déterminée par une fonction intégrable $f_i(x)$; $i = 1, 2, \dots, n$ (l'indice i se rapporte à la i-tième partie) de la variable indépendante x, bornons nos considérations au cas d'un changement continu de la température et même du courant de la chaleur (celui ci est dirigé naturellement suivant l'axe de la barre) dans les sections transversales communes de chaques deux parties consécutives de la barre. Sous ces conditions soit à trouver les n distributions $u_i(x,t)$; $i=1,2,\dots,n$ de température dans les parties du corps, à savoir pour le cas particulier où la chaleur passe à travers les deux sections finales $x=0$, $x=x_n$ de la barre dans le milieu avec la température zéro, les coefficients de ce rayonnement (ce sont, comme il est connu, les rapports de la conductibilité superficielle et intérieure pour ces deux parties du corps) étant h_0 à l'extrémité $x=0$ et h_n pour la section $x=x_n$; t signifie, dans $u_i(x,t)$ et de même dans tout le calcul qui va suivre, naturellement le temps.

1. La mise en équations. Les équations de notre problème sont, comme on le sait d'après les éléments de la théorie analytique de la chaleur, de la forme suivante:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=a_i^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\quad a_i^2=\frac{\lambda_i}{c_i\gamma_i},\quad x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\quad t\geqslant 0;\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}-h_0 u_1=0,\quad x=0;\quad \frac{\partial u_n}{\partial x}+h_n u_n=0,\quad x=x_n. \tag{2}$$

$$u_i(x_i,t)=u_{i+1}(x_i,t);\quad i=1,2,\dots,n-1. \tag{3}$$

$$\lambda_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=\lambda_{i+1}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x},\quad x=x_i,\quad i=1,2,\dots,n-1. \tag{4}$$

$$u_i(x,0)=f_i(x),\quad x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i;\quad i=1,2,\dots,n. \tag{5}$$

2. Solution. En supposant, d'après la méthode bien connu de Bernoulli, la solution particulière $v_i(x,t)$ de la i-tième des équations (1) sous la forme

$$v_i(x,t)=X_i(x)\,.\,T_i(t),\quad x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\quad t\geqslant 0;\quad i=1,2,\dots,n, \tag{6}$$

on obtient d'une manière habituelle

$$X_i(x)=\alpha_{i1}\cos k_i x+\alpha_{i2}\sin k_i x,\quad T_i(t)=e^{-a_i^2k_i^2t}, \tag{6,1}$$

k_i, α_{i1}, α_{i2}, désignant des constantes arbitraires préalablement.

Pour que les intégrales (6) satisfassent, comme on le désire ordinairement, en dehors des équations (1), aussi aux conditions (2) — (4) aux limites, il faut et il suffit que l'on ait

$$X_1'(0)-h_0X_1(0)=0,\quad X_n'(x_n)+h_nX_n(x_n)=0 \tag{7}$$

$$X_i(x_i)\,T_i(t)=X_{i+1}(x_i)\,T_{i+1}(t);\quad i=1,2,\dots,n-1 \tag{8}$$

$$\lambda_i X_i'(x_i)\,T_i(t)=\lambda_{i+1}X_{i+1}'(x_i)\,T_{i+1}(t);\quad i=1,2,\dots,n-1, \tag{9}$$

les virgules (′) désignant les dérivées par rapport à x.

Des équations (8) et (9) on déduit d'une manière connue

$$a_{i+1}k_{i+1}=a_ik_i;\quad i=1,2,\dots,n-1 \tag{10}$$

et on peut exprimer des constantes $k_2,k_3,\dots,k_n$ par k_1. Les conditions (7)—(9) se transforment alors en système

$$\begin{gathered}X_1'(0)-h_0X_1(0)=0;\quad X_n'(x_n)+h_nX_n(x_n)=0;\\ X_i(x_i)=X_{i+1}(x_i),\ i=1,2,\dots,n-1;\ \lambda_iX_i'(x_i)=\lambda_{i+1}X_{i+1}'(x_i),\ i=1,2,\dots,n-1\end{gathered} \tag{11}$$

contenant $2n$ équations algébriques linéaires avec $2n$ nombres inconnus α_{i1}, α_{i2}; $i=1,2,\dots,n$. L'existence d'une solution qui n'est pas identiquement nulle éxige que le déterminant du système (11) s'annule, ce qui s'exprime par une équation transcendente et très compliquée, d'où l'on peut tirer la valeur du dernier paramètre encore inconnu k_1.

L'équation caractéristique mentionnée admet une infinité de racines

$$\varkappa_1,\varkappa_2,\dots,\varkappa_\nu,\dots \tag{12}$$

et chacune d'elles représente une valeur possible du paramètre k_1. En se servant de la relation (10) et en posant $k_1=\varkappa_\nu$, on aura pour les autres $k_{i\nu}$ (au lieu de k_i nous écrivons plus exactement $k_{i\nu}$ pour exprimer le rôle fondamental de la valeur $k_1=\varkappa_\nu$) les formules

$$k_{i\nu}=A_i\varkappa_\nu,\quad A_i=\frac{a_1}{a_i};\quad i=1,2,\dots,n. \tag{13}$$

Si, dans les relations (11), nous remplaçons les constantes k_i par $k_{i\nu}$, nous obtiendrons un système de $2n$ équations, dont la solution α_{i1}, α_{i2} (déterminée, comme on sait, à un facteur commun à tous les α_{i1}, α_{i2} près) soit désignée par $\alpha_{i1}^{(\nu)}$, $\alpha_{i2}^{(\nu)}$; $i=1,2,\dots,n$. A chaque terme $k_1=\varkappa_\nu$ de la suite (12) correspond ainsi — envisageant les formules (6) et (6,1) — un groupe de n intégrales particulières

$$\begin{gathered}v_{i\nu}(x,t)=X_{i\nu}(x)\,e^{-a_1^2\varkappa_\nu^2t}=[\alpha_{i1}^{(\nu)}\cos A_i\varkappa_\nu x+\alpha_{i2}^{(\nu)}\sin A_i\varkappa_\nu x]\,e^{-a_1^2\varkappa_\nu^2t},\\ x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\quad t\geqslant 0;\quad i=1,2,\dots,n\end{gathered} \tag{14}$$

du système des équations différentielles (1).

En posant, dans les formules (14), successivement $\nu=1,2,\ldots$, l'indice i restant fixe, on est conduit à une infinité de solutions particulières de la i-tième équation (1). Naturellement le système (14) vérifie pour chaque valeur de ν non seulement les équations (1), mais en même temps aussi les conditions aux limites (2)—(4).

Cela étant, il est possible de s'adresser maintenant vers la solution définitive $u_i(x,t)$ du problème donné; nous la supposons sous la forme habituelle

$$u_i(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu v_{i\nu}(x,t), \quad x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i; \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Les coefficients indéterminés c_ν doivent satisfaire, d'après (14) et envisageant aussi (5), aux conditions

$$f_i(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu X_{i\nu}(x), \quad x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i; \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{16}$$

Le calcul se réduit donc à exprimer les fonctions $f_i(x)$, données d'avance, sous la forme de séries infinies des fonctions caractéristiques de notre problème. Pour la solution il faut établir les relations d'orthogonalité parmi ces fonctions caractéristiques — tâche un peu difficile dans notre cas compliqué.

Des équations

$$\frac{d^2X_{i\mu}}{dx^2}+k_{i\mu}^2X_{i\mu}=0, \quad \frac{d^2X_{i\nu}}{dx^2}+k_{i\nu}^2X_{i\nu}=0,$$

vérifiées par chaques deux fonctions caractéristiques $X_{i\mu}$, $X_{i\nu}$, on déduit par combinaison la relation

$$(k_{i\mu}^2-k_{i\nu}^2)X_{i\mu}X_{i\nu}=\frac{d}{dx}(X_{i\mu}X'_{i\nu}-X'_{i\mu}X_{i\nu}); \quad i=1,2,\ldots,n,$$

d'où l'on obtient, en intégrant entre les limites $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$, aisément

$$(k_{i\mu}^2-k_{i\nu}^2)\int_{x_{i-1}}^{x_i} X_{i\mu}X_{i\nu}\,dx=\begin{vmatrix} X'_{i\nu}(x_i), & X_{i\nu}(x_i)\\ X'_{i\mu}(x_i), & X_{i\mu}(x_i)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} X'_{i\nu}(x_{i-1}), & X_{i\nu}(x_{i-1})\\ X'_{i\mu}(x_{i-1}), & X_{i\mu}(x_{i-1})\end{vmatrix};$$

$$i=1,2,\ldots,n. \tag{17}$$

Mais, en tenant compte des équations (11), on a

$$X_i(x_{i-1})=X_{i-1}(x_i), \quad X'_i(x_{i-1})=\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}X'_{i-1}(x_{i-1})=\Lambda_i X'_{i-1}(x_{i-1});$$

$$i=2,3,\ldots,n \tag{17,1}$$

et nos formules prennent — si l'on pose encore $\lambda_0=0$ et, par suite, $\Lambda_1=0$ — la forme nouvelle

$$(k_{i\mu}^2-k_{i\nu}^2)\int_{x_{i-1}}^{x_i} X_{i\mu}X_{i\nu}\,dx=\Lambda_i\begin{vmatrix} X_{i-1,\nu}(x_{i-1}), & X'_{i-1,\nu}(x_{i-1})\\ X_{i-1,\mu}(x_{i-1}), & X'_{i-1,\mu}(x_{i-1})\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} X_{i\nu}(x_i), & X'_{i\nu}(x_i)\\ X_{i\mu}(x_i), & X'_{i\mu}(x_i)\end{vmatrix}; \quad i=2,3,\ldots,n. \tag{17,2}$$

Appliquant la notation

$$D_{i\mu\nu}=\begin{vmatrix} X_{i\nu}(x_i), & X'_{i\nu}(x_i)\\ X_{i\mu}(x_i), & X'_{i\mu}(x_i)\end{vmatrix}; \quad i=1,2,\ldots,n \tag{18}$$

et envisageant (13) on peut encore écrire

$$A_i^2(\varkappa_\mu^2-\varkappa_\nu^2)\int_{x_{i-1}}^{x_i} X_{i\mu}X_{i\nu}\,dx=\Lambda_i D_{i-1,\mu\nu}-D_{i\mu\nu}; \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{17,3}$$

Si l'on fait, avec les coefficients $\frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \frac{\lambda_2}{\lambda_n}, \ldots, \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}, \frac{\lambda_n}{\lambda_n}$, la combinaison linéaire des relations (17,3), on obtient — tenant compte de l'égalité

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_n}=\Lambda_n\Lambda_{n-1}\ldots\Lambda_{i+1}$$

et de (13) — immédiatement

$$a_1^2(\varkappa_\mu^2-\varkappa_\nu^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} X_{i\mu}X_{i\nu}\,dx=-\lambda_n D_{n\mu\nu}.$$

Mais en vertu de la deuxième des conditions (11) on a pour deux nombres naturels μ, ν quelconques — à comp. aussi la définition (18) —

$$D_{n\mu\nu}=\begin{vmatrix} X_{n\nu}(x_n), & X'_{n\nu}(x_n) \\ X_{n\mu}(x_n), & X'_{n\mu}(x_n) \end{vmatrix} = -h_n \begin{vmatrix} X_{n\nu}(x_n), & X_{n\nu}(x_n) \\ X_{n\mu}(x_n), & X_{n\mu}(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

et l'équation établie plus haut nous conduit pour $\mu\neq\nu$ (c'est-à-dire pour $\varkappa_\mu^2\neq\varkappa_\nu^2$) tout de suite aux relations cherchées d'orthogonalité parmi les fonctions caractéristiques $X_{i\mu}(x)$, $X_{i\nu}(x)$ du problème donné, à savoir aux relations

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} X_{i\mu}(x)\,X_{i\nu}(x)\,dx=0\,,\quad \mu\neq\nu;\quad \mu,\ \nu=1,2,\ldots. \tag{19}$$

Pour déterminer des coefficients inconnus c_ν dans les développements (15), conformément aux conditions (16), l'artifice suivant s'offre tout naturellement: après avoir multiplié les deux membres de la i-tième des équations (16) par $\frac{\lambda_i}{a_i^2}X_{i\mu}(x)$, on l'intègre entre les limites $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ et on fait la somme par rapport à l'indice i. On obtient, en tenant compte des relations (19) exprimant l'orthogonalité des fonctions caractéristiques

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{\lambda_i}{a_i^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu X_{i\mu}X_{i\nu}\right)dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}X_{i\mu}X_{i\nu}\,dx=$$

$$=c_\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}X_{i\mu}^2\,dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f_i(x)\,X_{i\mu}(x)\,dx,$$

alors, sous la forme d'une formule générale (on écrit ν au lieu de μ)

$$c_\nu=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f_i(x)\,X_{i\nu}(x)\,dx}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}X_{i\nu}^2(x)\,dx};\quad \nu=1,2,\ldots.$$

En employant ce résultat et envisageant les équations (14) et (15) on obtient la solution définitive du problème donné sous la forme suivante

$$u_i(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\displaystyle X_{i\nu}(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f_i(x)\,X_{i\nu}(x)\,dx}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}X_{i\nu}^2(x)\,dx}\,e^{-a_i^2\varkappa_\nu^2 t}\,,\quad x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,$$

$$t\geqslant 0;\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{20}$$

D'après (1) on peut encore écrire $c_i\gamma_i$ au lieu de $\frac{\lambda_i}{a_i^2}$. Les fonctions $X_{i\nu}(x)$ sont définies, en vertu de (14), par les relations

$$X_{i\nu}(x)=\alpha_{i1}^{(\nu)}\cos A_i\varkappa_\nu x+\alpha_{i2}^{(\nu)}\sin A_i\varkappa_\nu x;\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{20,1}$$

$\varkappa_\nu$ étant donnés par (12) et A_i par (13). Quant aux coefficients $\alpha_{i1}^{(\nu)}$, $\alpha_{i2}^{(\nu)}$; $i=1,2,\ldots,n$, on les obtient, à un facteur commun près, en résolvant le système des équations (11), où l'on a posé $k_i=k_{i\nu}$. Le facteur commun indéterminé des constantes $\alpha_{i1}^{(\nu)}$, $\alpha_{i2}^{(\nu)}$, dont nous venons de parler, n'a aucune signification pour la fraction de la formule (20), car il se trouve non seulement dans son dénominateur, mais aussi dans le numérateur.

Pour la commodité du lecteur nous écrivons encore l'expression de l'intégrale dans le dénominateur de la fraction (20):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}X_{i\nu}^2(x)\,dx=\frac{1}{2A_i\varkappa_\nu}\left[\varkappa_\nu[(\alpha_{i1}^{(\nu)})^2+(\alpha_{i2}^{(\nu)})^2]A_il_i+\sin\varkappa_\nu A_il_i\{[(\alpha_{i1}^{(\nu)})^2-\right.$$

$$\left.-(\alpha_{i2}^{(\nu)})^2]\cos\varkappa_\nu A_i(l_i+2x_{i-1})+2\alpha_{i1}^{(\nu)}\alpha_{i2}^{(\nu)}\sin\varkappa_\nu A_i(l_i+2x_{i-1})\}\right],$$

$$l_i=x_i-x_{i-1};\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{20,2}$$

Le cas particulier $n=1$.

Si l'on fait $n=1$, les formules générales obtenues prennent la forme très simple, comme suit:

$$u(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X_\nu(x)\int\limits_0^l f(x)\,X_\nu(x)\,dx}{\int\limits_0^l X_\nu^2(x)\,dx}\,e^{-a^2\varkappa_\nu^2 t},\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad t>0;$$

$$X_\nu(x)=\cos\varkappa_\nu x+\frac{h_0}{\varkappa_\nu}\sin\varkappa_\nu x,\quad \operatorname{tg}\varkappa_\nu l=\frac{\varkappa_\nu(h_0+h_1)}{\varkappa_\nu^2-h_0 h_1}. \tag{21}$$

Posant, en outre, $h_0=h_1=h$, $f(x)=u_0$ (une constante quelconque), on déduit de (21) aisément

$$u(x,t)=4hu_0\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2h+l(h^2+\varkappa_\nu^2)}\,e^{-a^2\varkappa_\nu^2 t}\left(\cos\varkappa_\nu x+\frac{h}{\varkappa_\nu}\sin\varkappa_\nu x\right),$$

$$\operatorname{tg}\varkappa_\nu l=\frac{2h\varkappa_\nu}{\varkappa_\nu^2-h^2}, \tag{21,1}$$

un résultat bien connu et souvent cité dans la littérature sur la conduction de la chaleur.

Remarque: L'auteur de l'article précédent va bientôt donner des informations au sujet d'un travail qui se rattache aux problèmes des sphères et cylindres stratifiés. Les conditions seront beaucoup plus générales que celles dont on s'est servi plus haut.

Contribution à la théorie du champ électromagnétique

Przyczynek do teorii pola elektromagnetycznego

Par

W. POGORZELSKI (Varsovie)

Conformément à la théorie de Maxwell, le vecteur-intensité du champ électrique $\vec{K}(x,y,z,t)$ et le vecteur-intensité du champ magnétique $\vec{H}(x,y,z,t)$ remplissent en tout point (x,y,z) du domaine vide et pour tout le temps t les équations:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}=\operatorname{rot}\vec{H};\qquad \operatorname{div}\vec{K}=0\\ -&\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\vec{K};\qquad \operatorname{div}\vec{H}=0.\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Il en résulte, d'après le calcul bien connu, que ces fonctions $\vec{K}$ et $\vec{H}$ satisfont à l'équation des ondes [1]):

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\vec{K}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{K}}{\partial t^2}=0\\ &\Delta\vec{H}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

[1]) Δ désigne l'opérateur de *Laplace*.