we get

$$(\nabla^m \nabla^k - \nabla^k \nabla^m) \nabla_k v^n = a^{im} a^{lk} (M_k^s R_{lis}^n - M_s^n R_{lik}^s)$$

and substituting the last magnitude into the right side of the eq. (VI.2) with regards to eq. (VI.3), we get on the right side of eq. (VI.2) the expression identical with the right side of eq. (VI.1).

As results from the eq. (II.5) the operation $(\nabla_k \nabla^k) \nabla^m v^n$ on the left side of eq. (VI.1) may be replaced by the equivalent operation $(\nabla^k \nabla_k) \nabla^m v^n$.

REFERENCES

1. T. Levi — Civita. The Absolute Differential Calculus 1927
2. J. Weyssenhoff. Duale Grössen, Grossrotation, Grossdivergenz und Stokes--Gausschen Sätze in allgemeinen Räumen. Annales de la Société Polonaise de Mathématique XVI 1937.
3. I. D. van der Waals. Lehrbuch der Thermodynamik. vol. I 1924.
4. Rayleigh. Some General Theorems relating to Vibrations. Proc. Lond. Math. Soc. 4.1873.
5. Courant-Hilbert. Methoden der mathematischen Physik, I vol.

Sur les équations intégrales et intégro-différentielles à singularité polaire

O równaniach całkowych i całkowo-różniczkowych z osobliwością biegunową

Par

J. WOLSKA (Varsovie)

1. Introduction

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier les équations intégrales et intégro-différentielles avec la singularité polaire. Les équations de cette espèce étaient étudiées pour la première fois par O. Kellog (Götting. Nachr. 1902) dans le cas particulier du noyau singulier $\operatorname{ctg}(x-y)$, et par D. Hilbert (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen 1910). Ensuite H. Poincaré a donné une méthode générale pour l'étude des équations intégrales de seconde espèce avec le noyau singulier analytique (Théorie des marées, 1910). L'équation intégrale avec le noyau à singularité polaire a été étudiée aussi par H. Villat (Acta Mathematica, 1916). G. Bertrand (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1921) a généralisé la transformation de H. Poincaré pour les intégrales le long des courbes fermées dans le plan de la variable complexe. W. Pogorzelski dans le travail „Sur les équations intégrales singulières de première espèce" (Comptes Rendus de la Societé Polytechnique de Varsovie, 1924) et dans d'autres travaux (Journal des Mathématiques 1939, et Mathematische Zeitschrift 1938) a étudié les équations de première espèce linéaires et non linéaires avec les noyaux à singularité polaire et logarithmique. G. Giraud (Annales de l'Ecole Normale Supérieure 1934) a étudié le cas général d'une intégrale de Cauchy dans l'espace à n dimensions.

Récemment E. Vécoua a publié une série des travaux important consacrés aux équations intégrales singulières [1]).

En 1946 N. I. Mouschelichvili a publié un ouvrage très complet consacré à ces équations.

2. Transformation de Poincaré

Pour la résolution de l'équation intégrale proposée nous citerons la transformation des intégrales itérées du type suivant:

$$\int_0^a N_1(x,y)\left[\int_0^a N(y,z)\,\varphi(z)\,dz\right]dy. \tag{1}$$

On suppose que les fonctions N et N_1 sont analytiques par rapport à chaque variable et ne possèdent d'autres singularités que les pôles du premier ordre $x=y$ dans une bande infinie Ω qui comprend l'axe réel; $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine qui comprend le segment réel $(0,a)$. Les intégrales impropres *ont la valeur principale de Cauchy*, c'est-à-dire:

$$\int_0^a N(x,y)\,\varphi(y)\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x-\varepsilon} N(x,y)\,\varphi(y)\,dy+\int_{x+\varepsilon}^a N(x,y)\,\varphi(y)\,dy\right]$$

x étant un point à l'intérieur du segment $(0,a)$.

L'intégrale de la forme (1) a été étudiée par H. Poincaré à propos d'un problème aux limites concernant l'équation du type elliptique (loc. cit.). D'après ces recherches, nous écrivons la transformation suivante de l'intégrale (1):

$$\int_0^a N_1(x,y)\left[\int_0^a N(y,z)\,\varphi(z)\,dz\right]dy=-\pi^2 R(x)\,R_1(x)\,\varphi(x)+\int_0^a F(x,z)\,\varphi(z)\,dz$$

x étant un point intérieur d'intervalle $(0,a)$, $R(x)$ et $R_1(x)$ désignant les résidus au pôle $y=x$ des fonctions $N(x,y)$ et $N_1(x,y)$, traitées comme les fonctions d'une variable y; $F(x,z)$ est une fonction exprimée par la somme suivante des intégrales le long des arcs AMB et $AM'B$ (fig. 1) du plan de variable complexe, embrassant le segment d'axe réel AB $(0,a)$.

[1]) Tbilissi, Comptes Rendus de l'Académie (1940—50).

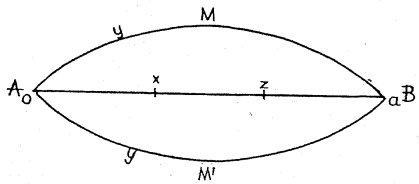

Fig. 1.

$$F(x,z)=\frac{1}{2}\int_{AMB} N_1(x,y)\,N(y,z)\,dy+\frac{1}{2}\int_{AM'B} N_1(x,y)\,N(y,z)\,dy. \tag{2}$$

Nous voyons, d'après l'expression (2), que la fonction $F(x,z)$ est holomorphe si le point x et z sont situés à l'intérieur du domaine limité par les arcs AMB et $AM'B$; en outre si les points x et z sont compris dans l'intervalle $(0,a)$ la fonction (2) prend des valeurs égales aux valeurs principales de Cauchy de l'intégrale:

$$F(x,z)=\int_0^a N_1(x,y)\,N(y,z)\,dy. \qquad x\neq z \tag{3}$$

La fonction $F(x,z)$, d'après l'expression (2), reste bornée même si la différence $(x-z)$ tend vers zéro, ce qui est une propriété essentielle dans nos études.

En outre, d'après la remarque de H. Poincaré, la fonction $F(x,z)$ reste aussi bornée lorsque x et z tendent vers la même extrémité d'intervalle d'intégration AB, supposition faite, que les fonctions φ, $N_1(y,z)$ et $N(x,y)$ sont périodiques de période a. En effet dans ce cas la valeur de l'intégrale (3) ne change pas, lorsque l'on déplace le segment d'intégration AB sur l'axe réel, en conservant sa longueur.

La transformation de H. Poincaré était généralisée par G. Bertrand (loc. cit.) pour les intégrales le long des courbes fermées dans le plan de la variable complexe.

Nous allons donner ici, d'une façon un peu modifiée, la démonstration de la propriété de l'intégrale singulière doublement appliquée.

Soient deux fonctions $F(x,y)$ et $F_1(x,y)$ holomorphes si les points x et y sont à l'intérieur d'un anneau Ω contenant une courbe fermée C (fig. 2).

Considérons deux fonctions à singularité polaire:

$$\frac{F(z,x)}{z-x} \quad \text{et} \quad \frac{F_1(x,y)}{x-y}$$

et nous allons démontrer l'égalité suivante:

$$\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\left[\int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy\right]dx = -\pi^2 F(z,z)\,F_1(z,z) + \\ + \int_C \left[\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\right]dy$$

x, y, z, étant les points sur la courbe C, les intégrales impropres ayant les valeurs principales de Cauchy.

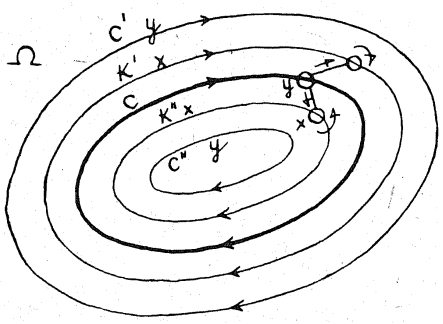

Fig. 2.

Considérons donc dans le plan de la variable complexe deux courbes C' et C'' embrassant la courbe C et situées dans le domaine Ω.

L'expression:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\int_{\substack{C'\\(y)}} \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy + \frac{1}{2}\int_{\substack{C''\\(y)}} \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy \tag{4}$$

est une fonction holomorphe de la variable x dans le domaine embrassé par C' ét C'', qui prend les valeurs égales à l'intégrale impropre

$$\int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy$$

aux points x sur C.

Considérons l'intégrale impropre suivante:

$$\int_C \Phi(x)\,\frac{F(z,x)}{z-x}\,dx \equiv \int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\left[\int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy\right]dx \tag{5}$$

z étant un point sur la courbe C située dans le domaine Ω.

D'après la propriété de la fonction $\Phi(x)$, l'intégrale (5) a le sens et sa valeur coïncide avec la moyenne arithmétique de deux intégrales le long des chemins K' et K'' situées dans le domaine d'holomorphie entre C' et C'' de la fonction $\Phi(x)$ et embrassant C (situées dans le domaine Ω):

$$\int_C \Phi(x)\,\frac{F(z,x)}{z-x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\substack{K'\\(x)}} \Phi(x)\,\frac{F(z,x)}{z-x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{\substack{K''\\(x)}} \Phi(x)\,\frac{F(z,x)}{z-x}. \tag{6}$$

D'après (5) nous aurons:

$$4\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\left[\int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy\right]dx = \int_{\substack{K'\\(x)}}\int_{\substack{C'\\(y)}} \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\,dy + \\ + \int_{\substack{K'\\(x)}}\int_{\substack{C''\\(y)}} \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\,dy + \int_{\substack{K''\\(x)}}\int_{\substack{C'\\(y)}} \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\,dy + \\ + \int_{\substack{K''\\(x)}}\int_{\substack{C''\\(y)}} \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\,dy. \tag{7}$$

Changeons maintenant l'ordre d'intégration dans le premier terme. L'intégration par rapport à x fournit la fonction

$$\psi(z,y) = \int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx$$

de deux variables z et y situées sur C qui est bornée même quand $(z-y)$ tend vers zéro.

La seconde intégration ordinaire de la fonction $\psi(z,y)$ par rapport à y nous donne la valeur:

$$(8)\qquad \int_C \psi(z,y)\,dy = \frac{1}{2}\int_C \Big[\int_{\substack{K'\\(x)}} \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\Big]dy + \frac{1}{2}\int_C \Big[\int_{\substack{K''\\(x)}} \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\Big]dy$$

x est le pôle des fonctions

$$\frac{F(z,x)}{z-x} \quad \text{et} \quad \frac{F_1(x,y)}{x-y}$$

situé sur K' et K'' compris entre C' et C'' et embrassant C dans Ω.

Nous construisons le lacet issue du point arbitraire de la courbe C, entourant le pôle x et nous aurons:

$$\int_{C'} \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy = \int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy - 2\pi i F_1(x,x) \qquad (x \text{ sur } K')$$

$$\int_{C'} \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy = \int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy. \qquad (x \text{ sur } K'')$$

De même nous aurons les relations:

$$\int_{C''} \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy = \int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy + 2\pi i F_1(x,x) \qquad (x \text{ sur } K'')$$

$$\int_{C''} \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy = \int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}. \qquad (x \text{ sur } K')$$

Appliquons maintenant les relations obtenues à la formule (7) — nous aurons

$$(9)\qquad 4\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\Big[\int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy\Big]dx = 2\int_{K'}\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\,dy + 2\int_{K''}\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\,dy + 2\pi i\int_{K'}\int_{K''} F(z,x)\,F_1(x,x)\,dx.$$

En comparant les expressions (9) et (8) nous arrivons à la relation fondamentale:

$$\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\Big[\int_C \frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dy\Big]dx = -\pi^2 F(z,z)\,F_1(z,z) + \int_C \Big[\int_C \frac{F(z,x)}{z-x}\,\frac{F_1(x,y)}{x-y}\,dx\Big]dy.$$

Nous remarquons, que la transformation de H. Poincaré a été géneralisée pour les fonctions non analytiques par W. Pogorzelski (1925) et N. I. Mouschelichvili (l. c.).

3. Le noyau singulier fermé

Soit $N(x,y)$ une fonction analytique à singularité polaire pour $x=y$ telle que la fonction $\dfrac{1}{y-x}$.

Nous appellerons, d'après W. Pogorzelski (loc. cit.), la fonction $N(x,y)$ *le noyau singulier fermé*, si l'équation intégrale:

$$(10)\qquad \int_0^a N(x,y)\,h(y)\,dy = 0 \qquad (0<x<a)$$

n'admet d'autre solution analytique que la solution banale $h=0$.

Cherchons la condition pour que le noyau singulier $N(x,y)$ soit fermé. Remarquons donc que si la fonction analytique $h(y)$ satisfait à l'équation citée dans l'intervalle $(0,a)$ elle satisfera à l'équation

$$(11)\qquad \int_0^a N(z,x)\Big[\int_0^a N(x,y)\,h(y)\,dy\Big]dx = 0$$

et par conséquent, d'après la transformation de H. Poincaré, elle satisfera à l'équation intégrale homogène de seconde espèce

$$(12)\qquad -\pi^2 R^2(z)\,h(z) + \int_0^a \Big[\int_0^a N(z,x)\,N(x,y)\,dx\Big]h(y)\,dy = 0$$

$R(z)$ désignant le résidu de la fonction $N(z,x)$ par rapport à la variable x au point $x=z$, que nous supposons différent de zéro dans l'intervalle d'intégration $(0,a)$:

$$|R(z)| \neq 0.$$

Le noyau de l'équation intégrale transformée est borné dans l'intervalle d'intégration et prend les mêmes valeurs qu'une fonction holomorphe dans un domaine contenant le segment $(0,a)$.

Pour que le noyau singulier $N(x,y)$ soit fermé, il suffit donc que le noyau

$$\frac{1}{R^2(z)}\int_0^a N(z,x)\,N(x,y)\,dx \tag{13}$$

de l'équation intégrale homogène n'admette pas pour valeur caractéristique la valeur $\lambda=\frac{1}{\pi^2}$ puisqu'alors l'équation (12) et l'équation (10) n'admettent que la solution banale $h=0$.

Cette condition est aussi nécessaire. En effet toute solution $h(y)$ de l'équation (12) est une fonction holomorphe au voisinage du segment $(0,a)$ qui satisfait à l'équation (11) et à l'équation (10), le noyau étant fermé; donc, si l'équation n'admet aucune autre solution analytique que la solution $h=0$, l'équation (12) n'admet également aucune autre solution.

On peut montrer que le noyau singulier

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)+\mu$$

est fermé si la constante μ est différente de zéro.

W. Pogorzelski (l. c.) a montré que le noyau de la forme

$$N(x,y)=A_1(y)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)+A_2(x)\,A_3(y)$$

est fermé si les fonctions holomorphes A_1, A_2, A_3 remplissent la condition suivante:

$$\int_0^a A_2(x)\,dx\cdot\int_0^a \frac{A_3(x)}{A_1(x)}\,dx\neq 0;$$

cette condition est nécessaire et suffisante.

4. Une équation intégro-différentielle linéaire

Nous exposons maintenant l'étude de l'équation intégro-différentielle singulière linéaire de la forme

$$\int_0^a \sum_{\nu=0}^{\nu=n} N_\nu(x,y)\,\varphi^{(\nu)}(y)\,dy=f(x) \tag{14}$$

a) N_ν étant les fonctions analytiques avec la singularité polaire pour $x=y$ $\left(\text{le cas analogue au noyau } \operatorname{ctg}\frac{\pi}{a}(x-y)\right)$ périodiques de période a, on admet, que ces fonctions dans la bande Ω qui comprend l'axe réel n'ont d'autres singularités, en négligeant les multiples de a.

b) $f(x)$ étant la fonction donnée holomorphe dans la bande Ω et ayant la période a.

c) $\varphi(y)$ — la fonction inconnue $[\varphi^0(y)=\varphi(y)]$.

d) L'intégrale impropre a la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire

$$\int_0^a \sum_{\nu=0}^{n} N_\nu(x,y)\,\varphi^{(\nu)}(y)\,dy= \tag{15}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x-\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{n} N_\nu(x,y)\,\varphi^{(\nu)}(y)\,dy+\int_{x+\varepsilon}^{a} N_\nu(x,y)\,\varphi^{(\nu)}(y)\,dy\right].$$

Nous admettons en outre pour la fonction inconnue φ la condition initiale suivante:

$$\varphi(0)=C_0;\quad \varphi'(0)=C_1;\ \ldots\ \varphi^{(n)}(0)=C_n$$

$C_0, C_1, \ldots C_n$ étant les constantes données.

Pour résoudre le problème proposé, considérons le noyau auxiliaire fermé $M(z,x)$ avec la singularité polaire pour $z=x$.

Si la fonction φ remplit l'équation (14), elle satisfait aussi à l'équation transformée

$$\int_0^a M(z,x)\left[\int_0^a\sum_{\nu=0}^{n} N_\nu(x,y)\,\varphi^{(\nu)}(y)\,dy-f(x)\right]dx=0; \tag{16}$$

donc, d'après la transformation de H. Poincaré elle satisfait aussi à l'équation

$$-\pi^2 R(z)\sum_{\nu=0}^{n} R_\nu(z)\varphi^{(\nu)}(z)+$$

$$+\int_0^a\left[\sum_{\nu=0}^{n}\int_0^a M(z,x)N_\nu(x,y)\,dx\right]\varphi^{(\nu)}(y)\,dy-\int_0^a M(z,x)f(x)\,dx=0$$

$R(z)$ et $R_\nu(z)$ réprésentent les résidus des noyaux $M(z,x)$ et $N_\nu(z,x)$ pour les pôles que nous supposont différents de zéro.

D'après la substitution:

$$\int_0^a \frac{M(z,x)N_\nu(x,y)}{R(z)}\,dx=\Phi_\nu(z,y)$$ (La fonction holomorphe dans la bande Ω)

$$\int_0^a \frac{M(z,x)f(x)\,dx}{R(z)}=f_1(z)$$ (La fonction connue et holomorphe dans la bande Ω)

$$\lambda=\frac{1}{\pi^2}$$

nous obtenons donc l'équation intégro-différentielle régulière:

$$\sum_{\nu=0}^{n} R_\nu(z)\varphi^{(\nu)}(z)=\lambda\int_0^a\sum_{\nu=0}^{n}\Phi_\nu(z,y)\varphi^{(\nu)}(y)\,dy-f_1(z). \tag{17}$$

Pour résoudre l'équation obtenue, posons maintenant:

$$\varphi^{(n)}(z)=\psi(z)$$

et exprimons tous les dérivées par la fonction inconnue $\psi(z)$

$$\varphi^{(n-1)}(z)=\int_0^z\psi(s)\,ds+C_{n-1}$$

$$\varphi^{(n-2)}(z)=\int_0^z\int_0^z\psi(s)\,ds^2+C_{n-1}\cdot\frac{z}{1}+C_{n-2}$$

. . . . . .

$$\varphi^{(0)}(z)=\underbrace{\int_0^z\cdots\int_0^z}_{n}\psi(s)\,ds^n+C_{n-1}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+C_{n-2}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots C_0.$$

Nous transformons les intégrales multiples d'après la formule connue:

$$\underbrace{\int_0^z\cdots\int_0^z}_{n}\psi(s)\,ds^n=\int_0^z\frac{(z-s)^{n-1}}{(n-1)!}\psi(s)\,ds$$

et nous exprimons l'équation (17) sous la forme suivante:

$$R_n\psi(z)+\int_0^z\left[R_{n-1}(z)+R_{n-2}(z)(z-s)+\cdots+R_0(z)\frac{(z-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\psi(s)\,ds=$$

$$=\lambda\int_0^a\left\{\Phi_n(z,y)\psi(y)+\int_0^y\left[\Phi_{n-1}(z,y)+\Phi_{n-2}(z,y)(y-s)+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Phi_0(z,y)\frac{(y-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\psi(s)\,ds\right\}dy+L(z) \tag{18}$$

où par $L(z)$ nous avons désigné la fonction connue étant une combinaison de la fonction $f_1(z)$ et des $C_\nu\frac{z^\nu}{\nu!}$ donnés par la condition initiale.

En posant $(R_n(z)\neq 0)$

$$\frac{R_{n-1}(z)+R_{n-2}(z)(z-s)+\cdots+R_0(z)\frac{(z-s)^{n-1}}{(n-1)!}}{R_n(z)}=K(z,s)$$

$$\frac{\Phi_n(z,y)}{R_n(z)}=\overline{\Phi}_n(z,y)$$

$$\frac{\Phi_{n-1}(z,y)+\Phi_{n-2}(z,y)(y-s)+\cdots+\Phi_0(z,y)\frac{(y-s)^{n-1}}{(n-1)!}}{R_n(z)}=H(z,y,s)$$

nous obtenons l'équation suivante:

$$\psi(z)+\int_0^z K(z,s)\psi(s)\,ds=\lambda\int_0^z\left[\overline{\Phi}_n(z,y)\psi(y)+\int_0^y H(z,y,s)\psi(s)\,ds\right]dy+L(z) \tag{19}$$

et ensuite

$$\psi(z)+\int_0^z K(z,s)\psi(s)\,ds= \tag{20}$$

$$=\lambda\int_0^a\overline{\Phi}_n(z,y)\psi(y)\,dy+\lambda\int_0^a\left[\int_0^a H(z,y,s)\psi(s)\,ds\right]dy+L(z).$$

D'après la formule de Dirichlet nous transformons l'intégrale

$$\int_0^a \left[\int_0^y H(z,y,s)\,\psi(s)\,ds\right] dy = \int_0^a \left[\int_y^a H(z,y,s)\,ds\right] \psi(y)\,dy.$$

Nous appliquons l'expression obtenue à l'équation (20) et obtenons

$$\psi(z) = \lambda \int_0^a P(z,s)\,\psi(s)\,ds - \int_0^z K(z,s)\,\psi(s)\,ds + L(z) \tag{21}$$

où nous avons posé

$$P(z,y) = \overline{\Phi}_n(z,y) + \int_y^a H(z,y,s)\,ds.$$

Nous sommes donc amenés à la recherche de la solution de l'équation (21), qui est du type mixte, puisqu'elle contient une intégrale à limites variables et une intégrale à limites fixes.

On pourra amener l'équation (21) à l'équation de Fredholm, en remarquant que l'équation de Volterra:

$$\psi(z) = -\int_0^z K(z,s)\,\psi(s)\,ds + \overline{f}(z) \tag{22}$$

a une solution et une seule de la forme

$$\psi(z) = \int_0^z \Gamma(z,s)\,\overline{f}(s)\,ds + \overline{f}(z) \tag{23}$$

où le noyau résolvant Γ est la somme d'une série absolument convergente:

$$\Gamma(z,s) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(z,s) \tag{24}$$

dont les termes sont les fonctions holomorphes au voisinage du segment $(0,a)$ données par une relation de récurrence:

$$K_n(z,s) = \int_0^z K_1(z,\sigma)\,K_{n-1}(\sigma,s)\,ds. \qquad K_1 = -K \tag{25}$$

Nous en concluons que toute solution de l'équation (21) satisfera à l'équation de Fredholm

$$\psi(z) = \lambda \int_0^a X(z,s)\,\psi(s)\,ds + \overline{f}_1(z) \tag{26}$$

où $X(z,s)$ et $\overline{f}_1(z)$ sont les fonctions holomorphes au voisinage du segment $(0,a)$, données par les expressions:

$$X(z,s) = \int_0^z \Gamma(z,\sigma)\,P(\sigma,s)\,ds + P(z,s)$$

$$\overline{f}_1(z) = \int_0^z \Gamma(z,s)\,L(s)\,ds + L(z).$$

Si la constante $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ n'est pas une valeur propre du noyau $X(z,s)$ il existe une solution et une seule de l'équation (26) sous la forme

$$\psi(z) = \lambda \int_0^a N(z,s)\,\overline{f}_1(s)\,ds + \overline{f}_1(z) \tag{27}$$

$N(z,s)$ étant le noyau résolvant du noyau $X(z,s)$.

Le noyau $X(z,s)$ étant holomorphe au voisinage du segment $(0,a)$ son noyau résolvant est aussi holomorphe dans ce domaine, donc la solution (27) est holomorphe, et, par conséquent, elle est la solution unique (remplissant les conditions initiales), des équations (21) et de l'équation proposée (14), le noyau auxiliaire $M(z,x)$ étant fermé.

5. Le système d'équations intégrales non linéaires avec la singularité polaire

Nous allons résoudre maintenant le système d'équation intégrales non linéaires de la forme

$$\int_0^a N_\nu(x,y)\,F_\nu[x,y,\varphi_1(y)\ldots\varphi_n(y)]\,dy = f_\nu(x) \tag{28}$$

$$(\nu = 1,2\ldots n).$$

a) $N_\nu(x,y)$ étant les fonctions analytiques à singularité polaire pour $x=y$ de la période réelle a ne possédant d'autres singularités dans la bande infinie Ω contenant l'axe réel, en négligeant les multiples de a.

b) Les fonctions $F_\nu[x,y,\xi_1\dots\xi_n]$; $f_\nu(x)$ sont holomorphes si les points x,y sont situés dans la bande Ω et les points $\xi_1,\xi_2\dots\xi_n$ dans un domaine Ω_1.

En outre nous supposons la périodicité de période a par rapport à variables x et y.

c) $\varphi_1(y),\dots\varphi_n(y)$ désignant les fonctions inconnues.

d) Les intégrales impropres ont la valeur principale de Cauchy.

Pour résoudre le système proposé (28) considérons le noyau auxiliaire fermé $M(z,s)$ avec la singularité polaire pour $z=x$.

Si les fonctions $\varphi_1,\dots\varphi_n$ remplissent le système (28), elle satisfont aussi au système transformé

$$(29)\qquad \int_0^a M(z,x)\left\{\int_0^a N_\nu(x,y)\,F_\nu[x,y,\varphi_1(y)\dots\varphi_n(y)]\,dy-f_\nu(x)\right\}dx=0$$
$$(\nu=1,2\dots n)$$

donc, d'après la transformation de H. Poincaré, elles satisferont aussi aux équations

$$(30)\qquad -\pi^2 R(z)\,R_\nu(z)\,F_\nu[z,z\,\varphi_1(z),\dots\varphi_n(z)]+$$
$$+\int_0^a\left\{\int_0^a N_\nu(x,y)\,M(z,x)\,F_\nu[x,y,\varphi_1(y)\dots\varphi_n(y)]\,dx\right\}dy=\int_0^a M(z,x)\,f_\nu(x)\,dx$$
$$(\nu=1,2\dots n)$$

où $R(z)$ et $R_\nu(z)$ désignent les résidus des fonctions $M(z,x)$ et $N_\nu(x,y)$ que nous supposons différentes de zéro.

Désignons:

$$\Phi_\nu[z,y,\xi_1,\dots\xi_n]=\frac{\int_0^a N_\nu(x,y)\,M(z,x)\,F_\nu[x,y,\xi_1\dots\xi_n]\,dx}{-\pi^2 R(z)\,R_\nu(z)}$$

$$\overline{f}_\nu(z)=\frac{\int_0^a M(z,x)\,f_\nu(x)\,dx}{-\pi^2 R(z)\,R_\nu(z)}$$

où les fonctions Φ_ν et $\overline{f}_\nu$ sont holomorphes et périodiques de période a si les points z,y sont situés dans la bande infinie Ω qui comprend l'axe réel et les points $\xi_1,\xi_2\dots\xi_n$ dans le domaine Ω_1; nous aurons le système suivant:

$$(31)\qquad F_\nu[z,z,\varphi_1(z)\dots\varphi_n(z)]=\overline{f}_\nu(z)+\int_0^a\Phi_\nu[z,y,\varphi_1(y)\dots\varphi_n(y)]\,dy$$
$$(\nu=1,2\dots n).$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système (31) de n équations intégrales régulières avec n fonctions inconnues

$$\varphi_1(y),\dots\varphi_n(y).$$

Considérons le système d'équations

$$(32)\qquad F_\nu[z,z,\xi_1\dots\xi_n]=q_\nu$$
$$(\nu=1,2\dots n)$$

où q_ν sont les variables complexes.

Les fonctions F_ν étant holomorphes dans le domaine étudié, nous pouvons appliquer le théorème d'existence des fonctions implicites au système (49).

Supposons donc que les fonctions F_ν prennent pour les valeurs $z_0,\xi_1^{(0)}\dots\xi_n^{(0)}$ les valeurs $q_\nu^{(0)}$:

$$(33)\qquad F_\nu[z_0,z_0,\xi_1^{(0)}\dots,\xi_n^{(0)}]=q_\nu^{(0)}$$
$$(\nu=1,2\dots n)$$

z_0 étant à l'intérieur du segment $(0,a)$ et $\xi_1^{(0)},\dots\xi_n^{(0)}$ à l'intérieur du domaine Ω_1.

Si le déterminant fonctionnel des fonctions F_ν pour ces valeurs est différent de zéro:

$$\left(\frac{D(F_1\dots F_n)}{D(\xi_1\dots\xi_n)}\right)_{z_0,\xi_1^{(0)}\dots\xi_n^{(0)}}\neq 0$$

alors il existe pour les valeurs $\delta>0$ et $\delta'>0$ suffisamment petites la valeur ε telle qu'au système des valeurs $z,q_1,\dots q_n$ vérifiant les inégalités:

$$(34)\qquad |q_\nu-q_\nu^{(0)}|\leqslant\delta\qquad |z-z_0|\leqslant\delta'$$

repond un seul système des valeurs du domaine Ω_1:

$$(35)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \psi_1(z, q_1, \ldots, q_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_n = \psi_n(z, q_1, \ldots, q_n) \end{cases}$$

satisfaisant aux équations proposés (32) et vérifiant les conditions:

$$|\xi_\nu - \xi_\nu^{(0)}| < \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n).$$

On suppose que $\delta' > a$ et $|\overline{f}_\nu(z) - q_\nu^{(0)}| \leqslant \delta_1 < \delta$ dans Ω.

Les fonctions (35) sont holomorphes au voisinage (34) du point $(z_0, q_1^{(0)} \ldots q_n^{(0)})$.

Nous resolvons le système transformé (31) par la méthode des approximations successives.

Formons donc la suite infinie des systèmes de fonctions:

$$(36)\qquad \begin{cases} \varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \ldots \varphi_n^{(0)} \\ \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots \varphi_n^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_1^{(\lambda)}, \varphi_2^{(\lambda)}, \ldots \varphi_n^{(\lambda)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

définies par les relations de récurrence

$$(37)\qquad F_\nu[z, z, \varphi_1^{(\lambda+1)}(z) \ldots \varphi_n^{(\lambda+1)}(z)] = \overline{f}_\nu(z) + \int_0^a \Phi_\nu[z, y, \varphi_1^{(\lambda)}(y), \ldots \varphi_n^{(\lambda)}(y)]\, dy$$

$$(\nu = 1, 2 \ldots n)$$

les fonctions initiales $\varphi_1^{(0)} \ldots \varphi_n^{(0)}$ étant les fonctions holomorphes arbitraires dans la bande infinie Ω, qui sont périodiques de période a et dont les valeurs restent dans la bande Ω.

Cherchons la condition pour que le système (36) soit défini pour toutes les valeurs λ.

Supposons donc que les fonctions

$$\varphi_1^{(\lambda)}, \ldots \varphi_\nu^{(\lambda)}, \ldots \varphi_n^{(\lambda)}$$

sont holomorphes et périodiques dans la bande Ω et que ses valeurs sont comprises dans le domaine Ω_1.

Si M désigne la borne supérieure du module des fonctions $\Phi_\nu[z, y, \xi_1 \ldots \xi_n]$ dans le domaine (34):

$$|\Phi_\nu[z, y, \xi_1 \ldots \xi_n]| \leqslant M$$

on a alors

$$|\overline{f}_\nu(z) + \int_0^a \Phi_\nu[z, y, \varphi_1^{(\lambda)} \ldots \varphi_n^{(\lambda)}] - q_\nu^{(0)}| < |\overline{f}_\nu(z) - q_\nu^{(0)}| + M \cdot a.$$

Il en résulte que, *si a est suffisamment petit*, on a l'inégalité:

$$|\overline{f}_\nu(z) + \int_0^a \Phi_\nu[z, y, \varphi_1^{(\lambda)} \ldots \varphi_n^{(\lambda)}]\, dy - q_\nu^{(0)}| < \delta$$

si

$$|z - z_0| \leqslant \delta'.$$

Nous en concluons, que le système des fonctions successives

$$\varphi_1^{(\lambda+1)}, \varphi_2^{(\lambda+1)}, \ldots \varphi_n^{(\lambda+1)}$$

est défini, holomorphe et périodique de période a dans la bande Ω. Il en résulte par induction que la suite des systèmes de fonctions (36) est définie pour toute la valeur λ, sous les conditions précisées.

Maintenant nous allons démontrer que la suite (36) est convergente et que les fonctions limites donnent la solution du problème.

Remarquons donc que les fonctions holomorphes

$$\varphi_\alpha(z) = \psi_\alpha(z, q_1 \ldots q_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

vérifient l'inégalité de Lipschitz, c'est-à-dire:

$$|\psi_\alpha(z, \overline{q_1} \ldots \overline{q_n}) - \psi_\alpha(z, q_1 \ldots q_n)| < k \sum_{\beta=1}^{n} |\overline{q_\beta} - q_\beta|$$

où k désigne la borne supérieure des modules des dérivées partielles:

$$\left| \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial q_\beta} \right|$$

dans le domaine étudié (34).

Nous obtenons donc

$$(38)\qquad |\varphi_\alpha^{(\lambda)}(z) - \varphi_\alpha^{(\lambda-1)}(z)| < k \sum_{\beta=1}^{n} \left| \int_0^a \Phi_\beta[x, y\, \varphi_1^{(\lambda-1)}(y), \ldots \varphi_n^{(\lambda-1)}(y)]\, dy - \right.$$

$$\left. + \int_0^a \Phi_\beta[x, y\, \varphi_1^{(\lambda-2)}(y), \ldots \varphi_n^{(\lambda-2)}(y)]\, dy \right| \qquad (\alpha = 1 \ldots n).$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Lipschitz aux fonctions $\Phi[x, y, \xi_1, \dots \xi_n]$ et nous obtenons:

$$(39) \qquad |\varphi_\alpha^{(\lambda)}(z) - \varphi_\alpha^{(\lambda-1)}(z)| < kk' n \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^a |\varphi_\beta^{(\lambda-1)}(y) - \varphi_\beta^{(\lambda-2)}(y)|\, dy$$

où k' désigne la borne supérieure des modules des dérivées partielles

$$\left| \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \xi_\alpha} \right|$$

dans Ω et Ω_1.

Par l'induction nous arrivons aux inégalités:

$$|\varphi_\alpha^{(2)}(z) - \varphi_\alpha^{(1)}(z)| < kk' an^2 |\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\alpha^{(0)}|; \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

$$|\varphi_\alpha^{(3)}(z) - \varphi_\alpha^{(2)}(z)| < (kk' an^2)^2 |\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\alpha^{(0)}|$$

. . . . . .

$$|\varphi_\alpha^{(\lambda)}(z) - \varphi_\alpha^{(\lambda-1)}(z)| < (kk' an^2)^{(\lambda-1)} |\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\alpha^{(0)}|$$

. . . . . .

vraies pour toute valeur λ.

Si maintenant la condition

$$kk' an^2 < 1$$

est verifiée, les suites infinies des approximations (36) sont uniformément convergentes et ses limites sont les fonctions holomorphes dans la bande Ω:

$$(40) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \varphi_\alpha^{(\lambda)} = \varphi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n).$$

Ces fonctions présentent la solution du système (31) et ont la période réelle a.

Les fonctions (40) satisfont aussi au système (29), donc aussi au système proposé (28), le noyau auxiliaire $M(z, x)$ étant fermé.

La preuve que la solution précedente est unique sera la même que dans la méthode des approximations succéssives en général.

Conduction de la chaleur dans une barre formée de plusieurs parties en matériaux différents

Przewodzenie ciepła w pręcie złożonym z kilku różnych części

Par

V. VODIČKA (Plzeň, Tchécoslovaquie)

La propagation de la chaleur dans les corps stratifiés et, plus généralement, dans les objets composés de plusieurs parties en matériaux différents forme, au point de vue de la théorie analytique da la chaleur, un vaste groupe de problèmes très importants parmi lesquels on trouve encore beaucoup de quéstions irrésolues. Les calculs qui vont suivre se rattachent au cas de la conduction, présentent une contribution à la théorie mentionnée et sont, en outre, d'une signification considérable pour la pratique industrielle.

Une barre très mince par rapport à sa longueur (pour pouvoir envisager tout ce qui suit comme un problème à une dimension) et d'une section transversale constante, consiste de n parties en matériaux différents: la i-tième entre elles se trouve entre les deux points x_{i-1}, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$; $x_0 = 0$) de l'axe des x, sa longueur étant $l_i = x_i - x_{i-1}$ et son matérial ayant les constantes λ_i, c_i, γ_i (le coefficient de la conductibilité intérieure, le calorique spécifique par unité de volume et la masse par unité de volume).

En supposant la distribution initiale de la température, dans chaque portion du corps, déterminée par une fonction intégrable $f_i(x)$; $i = 1, 2, \dots, n$ (l'indice i se rapporte à la i-tième partie) de la variable indépendante x, bornons nos considérations au cas d'un changement continu de la température et même du courant de la chaleur (celui ci est dirigé naturellement suivant l'axe de la barre) dans les sections transversales communes de