Cette relation a la forme d'une équation

$$\int_0^a \psi(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y)\, dy = P(\text{const}) \tag{19}$$

qui est équivalente à l'équation

$$\int_0^a \left\{ \left[\operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y) + 1 \right] \int_0^a \psi(z) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(y-z)\, dz \right\} dy = Pa$$

d'où il résulte par l'application d'une transformation déjà utilisée la relation

$$-a\,\psi(x) + \int_0^a \psi(z)\, dz = P.$$

Or, cette équation n'admet que la solution

$$\psi(x) = \text{const}$$

c. à d. qu'il existe une relation linéaire

$$\sum_{\nu=1}^{n} K_\nu A_\nu(y) = \text{const}. \tag{20}$$

En vertu de nos hypothèses on doit avoir

$$K_0 = K_1 = \ldots = K_n = 0$$

et par conséquent le système (14) n'admet que la solution nulle, d'où il résulte que le déterminant (15) est différent de zéro.

Quelques remarques se rapportant aux noyaux itérés dans l'espace à p-dimensions

Uwagi dotyczące jąder iterowanych w przestrzeni p-wymiarowej

Par

R. HAMPEL (Varsovie)

A. Remarques préliminaires

Nous nous occuperons de la limitation plus précise des noyaux itérés du noyau:

$$K(A, B) = \frac{H(A, B)}{r^\alpha} \tag{1}$$

où $H(A, B)$ est une fonction donnée de deux points:

$$A(x_1, x_2 \ldots x_p); \quad B(\xi_1; \xi_2 \ldots \xi_p)$$

dans le domaine Ω à p dimensions, borné et intégrable dans ce domaine. La fonction $H(A, B)$ remplit dans le domaine Ω la condition:

$$0 < H(A, B) < W \tag{2}$$

où W est une constante positive; r désigne la distance entre les points A et B

$$r = |AB|;$$

nous supposons enfin

$$\alpha < p.$$

Puisque le domaine Ω est borné, on peut supposer $a \leqslant \xi_i < x_i \leqslant b$ $i=1,2,\dots p$; on admet $H(A,B)=0$ à l'extérieur de Ω et l'on substitue au lieu de Ω un cube à p dimensions dont les arêtes (suffisamment grandes), égales à $(b-a)$, sont parallèles aux axes des coordonnées et qui contient le domaine Ω dans son intérieur.

Nous donnerons d'abord la borne supérieure effective du premier noyau itéré borné; ensuite nous abordons d'une manière plus détaillé le problème qui se ramène à la solution d'une équation diophantienne du second degré.

Il faut mentionner d'abord quelques définitions et propriétés concernant les fonctions $\Gamma(\alpha)$ et $B(\alpha,\beta)$ d'Euler.

Pour les études ultérieures il suffit de prendre la définition

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$

dont le prolongement analytique dans tout le plan d'une variable complexe avec poles du premier ordre $(=-k)$ est donnée par Gauss:

$$\Gamma(1+x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x\cdot n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}.$$

On a:

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha);\quad \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

$$\Gamma_{\min}=0{,}8556\dots \qquad \text{pour} \qquad \alpha=1{,}4616\dots$$

(3) $$\lim_{k\to\infty}c_k=\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}-\lg k=c=0{,}5772\dots$$

c — constante d'Euler — Mascheroni

$$c<c_{k+1}<c_k\leqslant 1 \quad \text{p. ex.} \quad c_1=1;\quad c_2=\frac{3}{2}-\lg 2 \quad \text{etc.}$$

$$\underset{k\to\infty}{c_k}-c=0\left(\frac{1}{k}\right);$$

on a de plus:

$$\frac{1}{\alpha}-\Gamma(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\cdot[1-\Gamma(1+\alpha)]=-\Gamma'(1+\Theta\alpha)\geqslant 0;\quad 0\leqslant\Theta\leqslant 1$$

$$\Gamma_{\min}\leqslant\Gamma(1+\alpha)\leqslant 1 \qquad \text{pour} \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

$$\lim\left[\frac{1}{\alpha}-\Gamma(\alpha)\right]=c;\quad \Gamma'(1)=-c;\quad \Gamma'(2)=1-c$$

et enfin:

(4) $$\frac{1}{\alpha}-c<\Gamma(\alpha)<\frac{1}{\alpha} \qquad \text{pour} \qquad 0<\alpha<1$$

on peut écrire aussi

(4¹) $$\operatorname{Max}\left[\frac{1}{\alpha}-c,1\right]<\Gamma(\alpha)<\frac{1}{\alpha}$$

$$\psi(\alpha)=[\lg\Gamma(\alpha)]'=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=-c+\sum_{S=0}^{\infty}\left(\frac{1}{S+1}-\frac{1}{\alpha+S}\right)$$

B. Limitation effective du noyau itéré

On peut effectuer la limitation du noyau itéré soit par la transformation homothétique (Hadamard) soit en s'appuyant sur le théorème connu que la moyenne géométrique ne depasse pas la moyenne arithmétique (Cauchy). Choisissons la dernière méthode.

On a

$$K(A,B)=\frac{H(A,B)}{r^\alpha};\quad A(x_i);\quad B(\xi_i);\quad i=1,2,\dots p$$

$$0<H(A,B)<W;\quad \alpha<p;\quad a\leqslant\xi_i<x_i\leqslant b$$

$$r=AB=\left\{\sum_{i=1}^{p}(x_i-\xi_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons le premier noyau itéré:

$$K^{(2)}(A,B)=\int_{\Omega}\frac{H(A,T)\,H(T,B)}{AT^{\alpha}\cdot TB^{\alpha}}\,d\,\omega_T= \tag{5}$$

$$=\underbrace{\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b}_{p\text{ fois}}\frac{H(x_i,t_i)\,H(t_i,\xi_i)}{AT^{\alpha}\cdot TB^{\alpha}}\,dt_1\ldots dt_p$$

en désignant par $H(x_i,t_i)=H(x_1,x_2,\ldots x_p;\ t_1,t_2,\ldots t_p)$.

D'après le théorème de Cauchy on peut écrire:

$$AT^2=\sum_{i=1}^{p}(x_i-t_i)^2\geqslant\sqrt[p]{\prod_{i=1}^{p}(x_i-t_i)^2} \tag{6}$$

c. à d.:

$$\frac{1}{AT^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{p^{\frac{\alpha}{2}}\prod_{i=1}^{p}(x_i-t_i)^{\frac{\alpha}{p}}}$$

et une inégalité analogue pour $\frac{1}{TB^{\alpha}}$. En substituant dans (5) et intégrant séparément on aura:

$$K^{(2)}(A,B)\leqslant\frac{W^2}{p^{\alpha}}\cdot\prod_{i=1}^{p}\int_a^b\frac{dt_i}{|x_i-t_i|^{\frac{\alpha}{p}}\cdot|t_i-\xi_i|^{\frac{\alpha}{p}}} \tag{7}$$

lorsque $\frac{\alpha}{p}\leqslant\frac{1}{2}$, $K^{(2)}(A,B)$ est borné ou infini comme $\lg r$; supposons $\frac{\alpha}{p}>\frac{1}{2}$, une substitution connue:

$$t_i=x_i\,\sigma_i+\xi_i\cdot(1-\sigma_i)$$

et l'extension des limites d'intégration

$$\frac{a-\xi_i}{x_i-\xi_i},\qquad\frac{b-\xi_i}{x_i-\xi_i}$$

à $\pm\infty$ donne:

$$K^{(2)}(A,B)<\frac{W^2}{p^{\alpha}}\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^{\frac{\alpha}{p}}\cdot|\sigma|^{\frac{\alpha}{p}}}\right]^p\cdot\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{(x_i-\xi_i)^{2\cdot\frac{\alpha}{p}-1}} \tag{7'}$$

lorsque $3\cdot\frac{\alpha}{p}-1\leqslant 0$ nous n'itérons plus; dans le cas contraire nous continuons le même procédé jusqu'à n qui satisfait aux inégalités:

$$n\cdot\frac{\alpha}{p}-(n-1)>0;\quad(n+1)\frac{\alpha}{p}-n\leqslant 0 \tag{8}$$

c. à d.

$$\frac{\alpha}{p-\alpha}\leqslant n<\frac{p}{p-\alpha} \tag{8'}$$

il est clair qu'il y a toujours un nombre entier unique satisfaisant à ces conditions.

En désignant le plus grand nombre entier contenu dans x par $E(x)$, on a:

$$x-1<E(x)\leqslant x;$$

posons:

$$n_E=E\left[\frac{\alpha}{p-\alpha}\right]+1<\frac{\alpha}{p-\alpha}+1=\frac{p}{p-\alpha}, \tag{9}$$

lorsque $\frac{\alpha}{p-\alpha}$ est un nombre fractionnaire (non entier), et

$$n_E=E\left[\frac{\alpha}{p-\alpha}\right]=\frac{\alpha}{p-\alpha}<\frac{p}{p-\alpha} \tag{10}$$

lorsque $\frac{\alpha}{p-\alpha}$ est un nombre entier.

Remarque: il est facile de donner une seule formule pour les deux cas, notamment:

$$n_E=E\left(\frac{\alpha}{p-\alpha}\right)+1-E\left[\frac{E\frac{\alpha}{p-\alpha}}{\frac{\alpha}{p-\alpha}}\right]$$

ou

$$n_E=E\left[\frac{\alpha}{p-\alpha}\right]+1-E\left[E\left(\frac{\alpha}{p-\alpha}\right)-\frac{\alpha}{p-\alpha}+1\right]$$

ou en passant à la limite:

$$n_E = E\left(\frac{\alpha}{p-\alpha}\right) + 1 - \lim_{n\to\infty}\left[\frac{E\dfrac{\alpha}{p-\alpha}}{\dfrac{\alpha}{p-\alpha}}\right] \quad \text{etc.}$$

Mais la plus simple formule c'est:

$$n_E = -E\left(-\frac{\alpha}{p-\alpha}\right).$$

Une induction facile nous donne:

$$K^{(n_E)}(A,B) < \frac{W^n}{p^{\frac{n\alpha}{2}}}\left[\prod_{S=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^{S\cdot\frac{\alpha}{p}-(S-1)}\,|\sigma|^{\frac{\alpha}{p}}}\right]^p \cdot \prod_{i=1}^{p}\frac{1}{|x_i-\xi_i|^{n\frac{\alpha}{p}-(n-1)}}. \tag{11}$$

Décomposons le facteur du premier produit de la façon suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^{S\cdot\frac{\alpha}{p}-(S-1)}\cdot|\sigma|^{\frac{\alpha}{p}}} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty}. \tag{12}$$

On obtient la limitation du premier terme du côté à droite de (12) en substituant $t = \frac{1}{1-\sigma}$, le second terme s'exprime immédiatement par les fonctions Γ ou B, dans le troisième nous substituons $t = \frac{1}{\sigma}$.

On obtient ainsi après des calculs faciles:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^{S\cdot\frac{\alpha}{p}-(S-1)}\,|\sigma|^{\frac{\alpha}{p}}} < \frac{\Gamma\left[(S+1)\frac{\alpha}{p}-S\right]\cdot\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)}{\Gamma\left(S\cdot\frac{\alpha}{p}-S+1\right)} + \frac{\Gamma\left(S-S\cdot\frac{\alpha}{p}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)}{\Gamma\left[(S+1)\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right]} + \frac{\Gamma\left[(S+1)\frac{\alpha}{p}-S\right]\cdot\Gamma\left(S-S\cdot\frac{\alpha}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)} \tag{13}$$

On peut remplacer les dénominateurs de ces expressions par $\Gamma_{\min} = 0{,}8556\ldots$, mais il est facile de démontrer que les arguments de tous les dénominateurs sont <1, on peut donc les omettre d'après l'inégalité (4[1]).

On a en effet:

$$0 < S\cdot\frac{\alpha}{p} - S + 1 = 1 - S\cdot\left(1-\frac{\alpha}{p}\right) < 1$$

$$0 < (S+1)\left(1-\frac{\alpha}{p}\right) < \left[E\left(\frac{\alpha}{p-\alpha}\right)+1\right]\cdot\left(1-\frac{\alpha}{p}\right) < \left(\frac{\alpha}{p-\alpha}+1\right)\cdot\left(1-\frac{\alpha}{p}\right) = 1$$

$$0 < \frac{\alpha}{p} < 1.$$

Le produit des inégalités (13) s'écrit donc sous la forme:

$$\left[\prod_{S=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^{S\cdot\frac{\alpha}{p}-(S-1)}\cdot|\sigma|^{\frac{\alpha}{p}}}\right]^p \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant \prod_{S=1}^{n-1}\left\{\left[\Gamma(S+1)\frac{\alpha}{p}-S\right]\cdot\left[\Gamma\left(S-S\frac{\alpha}{p}\right)+\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right]+ \Gamma\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\cdot\Gamma\left(S-S\cdot\frac{\alpha}{p}\right)\right\}^p = \boldsymbol{B}_n;\quad \boldsymbol{B}_1 = 1.$$

L'équation (11) peut être écrite en se servant du symbole $\boldsymbol{B}_n$ sous la forme:

$$K^{(n)}(A,B) < \frac{W^n}{p^{\frac{n\alpha}{2}}}\cdot\boldsymbol{B}_n\cdot\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{|x_i-\xi_i|^{n\cdot\frac{\alpha}{p}-(n-1)}}. \tag{15}$$

En itérant encore une fois j'obtient en supposant $n = E\left(\frac{\alpha}{p-\alpha}\right)+1$ (c. à d. que $\frac{\alpha}{p-\alpha}$ n'est pas un nombre entier) l'inégalité

$$K^{(n+1)}(A,B) < \frac{W^{n+1}}{p^{\frac{n+1}{2}\cdot\alpha}}\cdot\boldsymbol{B}_n\cdot\prod_{i=1}^{n}\int_{a}^{b}\frac{dt_i}{|x_i-t_i|^{n\cdot\frac{\alpha}{p}-(n-1)}\,|t_i-\xi_i|^{\frac{\alpha}{p}}}. \tag{16}$$

Puisque on a maintenant:

$$n\cdot\frac{\alpha}{p}-(n-1)+\frac{\alpha}{p}<1$$

on ne peut pas étendre les limites d'intégration à l'infinie mais l'intégrale est borné; nous donnerons maintenant sa borne supérieure en fonction de η:

$$\eta=1-n\cdot\frac{\alpha}{p}+(n-1)-\frac{\alpha}{p} \tag{17}$$

on a:

$$0<\eta<1-\frac{\alpha}{p}.$$

Décomposons l'intégrale comme auparavant:

$$\int_a^b \frac{dt_i}{|x_i-t_i|^{1-\frac{\alpha}{p}-\eta}\cdot|t_i-\xi_i|^{\frac{\alpha}{p}}}=\int_a^{\xi_i}+\int_{\xi_i}^{x_i}+\int_{x_i}^{b}.$$

En augmentant respectivement les intégrales dernières nous obtiendrons successivement:

$$\int_a^{\xi_i}<\int_a^{\xi_i}\frac{dt_i}{|x_i-t_i|^{1-\eta}}\leqslant\frac{|a-\xi_i|^{\eta}}{\eta}\leqslant\frac{|b-a|^{\eta}}{\eta}$$

$$\int_{\xi_i}^{x_i}<(b-a)^{\eta}\cdot B\left(\frac{\alpha}{p},1-\frac{\alpha}{p}\right)=\frac{(b-a)^{\eta}\cdot\pi}{\sin\pi\cdot\frac{\alpha}{p}}=(b-a)^{\eta}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)$$

$$\int_{x_i}^{b}<\int_{x_i}^{b}\frac{dt}{|x_i-t_i|^{1-\eta}}\leqslant\frac{|b-x_i|^{\eta}}{\eta}\leqslant\frac{|b-a|^{\eta}}{\eta}.$$

En ajoutant les inégalités précedentes, on obtient:

$$\int_a^b\frac{dt_i}{|x_i-t_i|^{n\cdot\frac{\alpha}{p}-(n-1)}|t_i-\xi_i|^{\frac{\alpha}{p}}}<|b-a|^{\eta}\cdot\left[\frac{2}{\eta}+\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right]. \tag{18}$$

En substituant l'inégalité (18) dans (16) on peut obtenir la limitation désirée.

On obtient une limitation analogue quand $\frac{\alpha}{p-\alpha}=E\frac{\alpha}{p-\alpha}$ est un nombre entier.

On peut aussi obtenir la limitation cherchée du noyau itéré en se servant d'une autre méthode.

On a notamment les inégalités suivantes:

$$c_1=\int_a^b\frac{dt}{|x-t|^h\cdot|t-\xi|^j}<\frac{4\cdot\Theta}{1-h-j}\quad\text{lorsque}\quad h+j<1 \tag{19}$$

où:

$$\Theta=\operatorname{Max}[(b-a),1] \tag{20}$$

$$c_2=\int_a^b\frac{dt}{|x-t|^h\cdot|t-\xi|^j}<\frac{4}{|x-\xi|^{h+j-1}}\left(\frac{1}{h+j-1}+\frac{1}{1-h}+\frac{1}{1-j}\right) \tag{21}$$

lorsque $h+j>1$

et enfin:

$$c_3=\int_a^b\frac{dt}{|x-t|^h\cdot|t-\xi|^j}<\frac{\Theta}{|x-\xi|^{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot h(1-h)}\quad\text{lorsque}\quad h+j=1 \tag{22}$$

ε est un nombre quelconque satisfaisant aux inégalités:

$$0<\varepsilon\leqslant\operatorname{Min}[h,j]. \tag{23}$$

Pour démontrer l'inégalité (19), remarquons que l'on a

$$c_1=\int_a^{\frac{x+\xi}{2}}+\int_{\frac{x+\xi}{2}}^{b}<\int_a^{\frac{x+\xi}{2}}\frac{dt}{|t-\xi|^{h+j}}+\int_{\frac{x+\xi}{2}}^{b}\frac{dt}{|x-t|^{h+j}}<\left[\frac{|t-\xi|^{1-(h+j)}}{1-(h+j)}\right]_a^{\frac{x+\xi}{2}}+ \tag{24}$$

$$+\left[\frac{|x-t|^{1-(h+j)}}{1-(h+j)}\right]_{\frac{x+\xi}{2}}^{b}<\frac{4\cdot\Theta}{1-(h+j)}$$

car $|t-\xi|<|x-t|$ pour: $a<t<\frac{b+\xi}{2}$

$|t-\xi|>|x-t|$ „ $\frac{b+\xi}{2}<t<b.$

Passons à l'inégalité (21).

En substituant $t = x\cdot\sigma + \xi(1-\sigma)$ est en étendant les limites d'integration à $\pm\infty$ nous obtiendrons comme auparavant:

$$c_2 < \frac{1}{|x-\xi|^{h+j-1}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^h\cdot|\sigma|^j} \tag{25}$$

on peut écrire:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^h\cdot|\sigma|^j} = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}$$

mais

$$\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} < \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\frac{d\sigma}{|\sigma|^{h+j}} < \frac{2}{h+j-1}$$

car on a:

$$|\sigma| < |1-\sigma| \quad \text{pour} \quad \sigma < -\frac{1}{2}$$

ensuite

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^h|\sigma|^j} < 2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^h\cdot|\sigma|^j} < 2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2^h\,d\sigma}{|\sigma|^j} < \frac{4}{1-j}$$

de même

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{d\sigma}{|1-\sigma|^h\cdot|\sigma|^j} < \frac{4}{1-h}; \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} < \frac{2}{h+j-1}$$

finalement nous obtiendrons:

$$c_2 < \frac{4}{|x-\xi|^{h+j-1}}\left(\frac{1}{h+j-1} + \frac{1}{1-h} + \frac{1}{1-j}\right). \tag{26}$$

Pour l'intégrale (22) j'obtiens successivement:

$$c_3 = \int_a^{\xi} + \int_{\xi}^{x} + \int_x^b < \frac{1}{|x-\xi|^{\varepsilon}}\cdot\left[\frac{|a-\xi|^{\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{|b-x|^{\varepsilon}}{\varepsilon}\Gamma(h)\cdot\Gamma(1-h)\right]$$

c. à d.

$$c_3 < \frac{1}{|x-\xi|^{\varepsilon}}\cdot\left[\frac{2\cdot\Theta}{\varepsilon} + \frac{1}{h(1-h)}\right] = \frac{1}{|x-\xi|^{\varepsilon}}\cdot\frac{2\Theta\cdot(1-h)+\varepsilon}{\varepsilon\cdot h\cdot(1-h)} <$$

$$< \frac{1}{|x-\xi|^{\varepsilon}}\cdot\frac{\Theta}{\varepsilon\cdot h\cdot(1-h)}$$

car on a:

$$\max[h(1-h)] = \frac{h^2}{4} < \frac{1}{4}. \quad \varepsilon = \operatorname{Min}[h,j] \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{\Theta}{2}.$$

Prenons d'abord:

1) $\dfrac{\alpha}{p} < \dfrac{1}{2}$

le noyau $K^{(2)}(A,B)$ est borné; en appliquant la formule (19) on aura:

$$K^{(2)}(A,B) < \left[\frac{4\cdot W^{\frac{1}{p}}\cdot W^{\frac{1}{p}}}{p^{\frac{\alpha}{2p}}\cdot p^{\frac{\alpha}{2p}}}\cdot\frac{\Theta}{1-\frac{\alpha}{p}-\frac{\alpha}{p}}\right]^p = \frac{W^2}{p^{\alpha}}\left[\frac{4\cdot p\cdot\Theta}{p-2\alpha}\right]^p \tag{27}$$

2) $\dfrac{\alpha}{p} = \dfrac{1}{2}$.

En appliquant d'abord la formule (22) nous obtiendrons:

$$K^{(2)}(A,B) = \frac{1}{|x-\xi|^{\varepsilon}}\cdot\left[\frac{4\cdot W^{\frac{1}{p}}\cdot W^{\frac{1}{p}}\cdot\Theta}{p^{\frac{\alpha}{2p}}\cdot p^{\frac{\alpha}{2p}}\cdot\varepsilon\cdot\frac{\alpha}{p}\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)}\right]^p \tag{28}$$

et ensuite la formule (19) nous donne la limitation:

$$K^{(3)}(A,B) < \left[\frac{4\cdot W^{\frac{3}{p}}\cdot\Theta^2}{p^{\frac{3\alpha}{2p}}\cdot\varepsilon\cdot\frac{\alpha}{p}\cdot\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\cdot\left(1-\varepsilon-\frac{\alpha}{p}\right)}\right]^p. \tag{29}$$

En posant $\varepsilon = \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}\left[\frac{\alpha}{p},\ 1-\frac{\alpha}{p}\right] = \frac{1}{4}$ on obtient la limitation finale:

$$K^{(3)}(A,B) < \frac{2^{8p}\cdot W^3\cdot \Theta^{2p}}{p^{\frac{3p}{4}}}. \tag{30}$$

Prenons par exemple $b-a=1=\Theta$, $W=1$. On a donc dans ce cas pour le noyau logarithmique $\left(\frac{\alpha}{p}=\frac{1}{2}\right)$:

$K^{(3)}(A,B) < 2^8$ pour une dimension $(p=1)$

$K^{(3)}(A,B) < 2^{15}$ pour deux dimensions $(p=2)$

$K^{(3)}(A,B) < \frac{2^{24}}{3^2}$ pour trois dimensions $(p=3)$ etc.

Passons maintenant au cas général.

J'omets d'abord dans les calculs les facteurs tels que: 4, W, Θ, p qui se repètent que j'écrirai seulement dans la formule finale.

En appliquant la formule (21) autant de fois qu'il est possible et ensuite la formule (19) dans le cas $\frac{\alpha}{p-\alpha} \neq E\frac{\alpha}{p-\alpha}$ ou les formules (22) et (19) dans le cas $\frac{\alpha}{p-\alpha} = E\frac{\alpha}{p-\alpha}$, j'obtiens pour le premier cas:

$$n = E\frac{\alpha}{p-\alpha}+1$$

c. à d.

$$\frac{\alpha}{p-\alpha} < n < \frac{p}{p-\alpha} \qquad \text{ou:} \qquad \frac{n-1}{n} < \frac{\alpha}{p} < \frac{n}{n+1}$$

$$K^{(n)}(A,B) \leqslant \frac{d_n}{|x-\xi|^{n\cdot\frac{\alpha}{p}-(n-1)}}\cdot\prod_{l=1}^{n-1}\left[\frac{1}{(l+1)\frac{\alpha}{p}-l}+\frac{1}{l\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)}+\frac{1}{1-\frac{\alpha}{p}}\right].$$

En appliquant ensuite la formule (19) on aura:

$$K^{(n+1)} < \frac{d_{n+1}}{n\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)-\frac{\alpha}{p}}\cdot\prod_{l=1}^{n-1}\frac{-l^2\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)+(l+1)\frac{\alpha}{p}}{l\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\cdot\left[(l+1)\frac{\alpha}{p}-l\right]} <$$

$$< \frac{n^{n+1}\cdot p\cdot\prod_{l=1}^{n-1}(-l^2+ln+n)}{n!\,n!\,(n\alpha-pn+p)}$$

$(d_2, d_3, \ldots d_{n+1}$ désignant les constantes positives convenables) nous aurons la limitation cherchée en supprimant $-l^2$ et écrivant au lieu de d_{n+1} sa valeur égale à:

$$\frac{4^n\cdot W^{\frac{n+1}{p}}\cdot\Theta}{p^{\frac{n+1}{2p}\cdot\alpha}}$$

$$K^{(n+1)}(A,B) < \left[\frac{4^n\cdot W^{\frac{n+1}{p}}\cdot\Theta\cdot n^{2n}}{p^{\frac{n-5}{2}}\cdot n!\,(np-n\alpha-\alpha)(n\alpha-np+p)}\right]^p. \tag{30}$$

Au lieu de supprimer $-l^2$ nous pouvons calculer d'une manière plus précise le produit:

$$\prod_{l=1}^{n-1}(-l^2+ln+n).$$

On obtiendra:

$$\prod_{l=1}^{n-1}(-l^2+ln+n) = \prod_{l=1}^{n-1}[n+l(n-l)] < \prod_{l=1}^{n-1}\left\{n\left(1+\frac{n}{4}\right)\right\} = \tag{31}$$

$$= \frac{n^{n-1}(4+n)^{n-1}}{4^{n-1}}$$

car l'expression $l(n-l)$ atteint son max. égal a $\frac{n^2}{4}$ pour $l=\frac{n}{2}$ on a donc une autre borne supérieure (moindre):

$$(32)\qquad K^{(n+1)}(A,B) < \left[\frac{4\cdot W^{\frac{n+1}{p}}\cdot \Theta\, n^{2n}(4+n)^{n-1}}{p^{\frac{n-5}{2}}\cdot (n!)^2\cdot (np-n\alpha-\alpha)(n\alpha-np+p)}\right]^p.$$

Prenons le cas $\frac{\alpha}{p-\alpha} = E\frac{\alpha}{p-\alpha}$ c. à d.

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{n}{n+1}.$$

On peut admettre que $n \geqslant 2$, car le cas $n=1$ a été discuté plus haut.

On obtient la limitation du noyau $K^{(n)}(A,B)$, comme auparavant, en se servant de la formule (21); on applique ensuite la formule (22) au noyau $K^{(n+1)}(A,B)$ et enfin la formule (19) pour obtenir la limitation du noyau $K^{(n+2)}$.

Finalement on aura la formule:

$$(33)\qquad K^{(n+2)}(A,B) < \left[\frac{4^{n+1}\cdot W^{\frac{n+2}{p}}\cdot \Theta^2\cdot (n+1)^5\cdot n^{2n-1}}{p^{\frac{n}{2}}\cdot n!}\right]^p$$

ou en se servant de la formule (31)

$$(34)\qquad K^{(n+2)}(A,B) < \left[\frac{2^4\cdot W^{\frac{n+2}{p}}\cdot \Theta^2\cdot (n+1)^5\cdot n^{2n-1}\cdot (4+n)^{n-1}}{p^{\frac{n}{2}}\cdot (n!)^2}\right].$$

C. Etude d'une équation diophantienne

Nous nous occuperons maintenant du nombre de solutions entières (en α) positives de l'équation diophantienne du second dégré:

$$(35)\qquad \frac{\alpha}{p} = \frac{n}{n+1}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{p\cdot n}{n+1}.$$

Admettons $n \leqslant N$; $\alpha+1 \leqslant p \leqslant P$ ou N et P sont des nombres positifs donnés. Désignons le nombre des solutions entières et positives de l'équation (35) par T_e, le nombre total des solutions T sera égal à NP.

Pour que α soit un nombre entier, il faut et il suffit qu'on ait: $p \equiv 0 \pmod{n+1}$ car les nombres n et $n+1$ sont premiers entre eux. Pour $n=1$; $\alpha = \frac{p}{2}$; $p = 1, 2, \ldots P$ on a donc $E\frac{P}{2}$ solutions entières. Pour $n=2$; $\alpha = \frac{2}{3}\cdot p$ il y a $E\frac{P}{3}$ solutions entières et $P - E\frac{P}{3}$ fractionnaires et ainsi de suite. Pour $n=N$ l'équation $\alpha = \frac{N}{N+1}\cdot p$ donne $E\frac{P}{N+1}$ solutions entières (positives) c. à d. on a:

$$(36)\qquad T_e = \sum_{k=2}^{N+1} E\left(\frac{P}{k}\right) = \sum_{k=1}^{N+1} E\left(\frac{P}{k}\right) - P$$

(formule analogique à la formule $T(p) = \sum_{n=1}^{p} t(n)$ donnant le nombre de diviseurs de tous les nombres $n \leqslant P$).

En appliquant à la formule (36) la formule connue de Lejeune Dirichlet (Hermite):

$$(37)\qquad \sum_{k=1}^{E(x)} E\left(\frac{x}{k}\right) = 2\cdot \sum_{k=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{k}\right) - (E\sqrt{x})^2$$

dont la démonstration géometrique est immédiate, on peut écrire l'équation (36) dans une forme équivalente mais plus commode dans l'application:

$$(38)\qquad T_e = 2\cdot \sum_{k=1}^{E\sqrt{N+1}} E\left(\frac{P}{k}\right) - P - (E\sqrt{P})^2.$$

Remarque: La formule

$$\sum_{k=1}^{E(x)} E\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{k}\right)$$

donne le nombre des points à coordonnées (U,V) entières et positives pour lesquelles on a: $UV \leqslant x$, c. à d. situés sur ou à l'intérieur de l'hyperbole équilatérale du premier quadrant dont l'équation est: $UV = x$.

En finissant, considérons les cas suivants:

I. N borné, P borné

$$\alpha)\quad N<P; \qquad \beta)\quad N\geqslant P.$$

II. N non borné, P non borné

$$\alpha)\quad N<P; \qquad \beta)\quad N\geqslant P.$$

III. N borné, P non borné.

IV. N non borné, P borné.

I. $\alpha)\quad N<P.$

I. On conclut de la formule (36):

$$\frac{\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}}{N}-\frac{1}{N}-\frac{1}{P}<\frac{T_e}{T}=\frac{\sum_{k=1}^{N+1}E\left(\frac{P}{k}\right)-P}{N\cdot P}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}}{N}-\frac{1}{N}$$

mais on a:

$$\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}=\lg(N+1)+c_k; \qquad c<c_k<1$$

c. à d.:

$$\lg N+c<\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}<\lg(N+1)+1<\lg N+2$$

car on a:

$$\lg\frac{N+1}{N}<1 \quad \text{pour} \quad N\geqslant 1$$

il vient donc:

$$\frac{\lg N}{N}-\frac{2-c}{N}<\frac{T_e}{T}<\frac{\lg N}{N}+\frac{1}{N}$$

et finalement:

(39) $$\left|\frac{T_e}{T}-\frac{\lg N}{N}\right|<\frac{2}{N}.$$

I. $\beta)\quad N\geqslant P$

on obtient de même qu'auparavant:

$$\frac{\lg P}{N}-\frac{2-c}{N}<\frac{\lg P}{N}-\frac{2}{N}-\frac{c_P}{N}<\frac{T_e}{T}\leqslant\frac{\lg P}{N}$$

c. à d.:

(40) $$0\leqslant\frac{\lg P}{N}-\frac{T_e}{T}<\frac{2}{N}.$$

Remarque: on obtient de la formule (40): $\frac{T_e}{T}\leqslant 0$ pour $P=1$, on a donc nécessairement $T_e=0$; en effet $\alpha=\frac{n}{n+1}$ et il n'y a pas de solutions entières; pour $P\geqslant 2$ il y en a au moins une:

$$\alpha=n=p-1\geqslant 1.$$

II. N et P non bornés

$$\alpha)\quad N<P$$

on conclut directement de la formule (39)

(41) $$\frac{T_e}{T}\infty\frac{\lg N}{N}=o(1)$$

$$\beta)\quad N\geqslant P.$$

D'après les formules (36) et (38) on peut écrire:

(42) $$T_e=\sum_{k=2}^{N+1}E\left(\frac{P}{k}\right)=\sum_{k=1}^{P}E\left(\frac{P}{k}\right)-P=2\cdot\sum_{k=1}^{E\sqrt{P}}E\left(\frac{P}{k}\right)-P-(E\sqrt{P})^2$$

puisque $E\left(\frac{P}{k}\right)=0$ pour $k=P+1,\ P+2\ldots N+1$ donc:

$$T_e=2\cdot P\cdot\left[\sum_{k=1}^{E\sqrt{P}}\left(\frac{1}{k}\right)-1\right]+O(\sqrt{P})$$

car on a:

$$\sum_{k=1}^{E\sqrt{P}}\left(\frac{P}{k}\right)-\sqrt{P}<\sum_{k=1}^{E\sqrt{P}}E\left(\frac{P}{k}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{E\sqrt{P}}\left(\frac{P}{k}\right)$$

de même: $$O\leqslant P-(E\sqrt{P})^2<2\sqrt{P}$$

on aura donc une formule asymptotique:

(43) $$T_e=P\cdot\lg P+2P(c-1)+O(\sqrt{P}$$

le nombre c désignant la constante d'Euler-Mascheroni; il existe une estimation plus précise de l'erreur:

(43[1]) $$T_e = P(\lg P + 2c - 2) + O(P^M) .$$

(44) $$\frac{1}{4} < M \leqslant \frac{1}{3}.$$

(Voronoi, Sierpiński, Van der Corput, Landau, Jarnik) on a de plus:

(45) $$\frac{T_e}{T} \sim \frac{\lg P}{N} = o(1).$$

III. N borné, P non borné.

On obtient immédiatement:

(46) $$P[\lg(N+1) + c_{N+1} - 1] - N < T_e \leqslant P[\lg(N+1) + c_{N+1} - 1]$$

(47) $$T_e = O(P) = T_f; \quad \frac{T_e}{T} = O(1) = \frac{T_e}{T_f}$$

(en désignant par $T_f = T - T_e$ le nombre des solutions fractionnaires en α).

IV. N non borné, P borné.

On a:

(48) $$P(\lg(P-2) < T_e < P \lg P. \quad \text{c. à d.} \quad T_e = O(1)$$

(49) $$\frac{T_e}{T} = o(1); \quad T_f = T - T_e = O(N).$$

Le nombre des solutions entières est borné, p. ex.: pour $1 \leqslant p \leqslant 3 = P$ on a seulement deux solutions entières:

1) $p = 2; \quad \alpha = 1; \quad n = 1;$ 2) $p = 3; \quad \alpha = 2; \quad n = 2.$

(Les dérivées de la fonction de Green dans le plan et dans l'espace).

Il est facile de prévoir ce résultat ($T_e = O(1)$) car pour $n \geqslant P$ toutes les solutions de l'équation:

(50) $$\alpha = \frac{n \cdot p}{n+1}$$

seront nécessairement fractionnaires, puisqu'on a:

$$(np, n+1) < n+1 .$$