Il suffit de poser $\Omega_\alpha = \sum_{\nu/1}^{\infty} \omega_\alpha^\nu$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$.

En rapprochant les Lemmes 4 et 5 nous obtenons immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2. Il existe un groupe de transformations (5,1) jouissant des propriétés indiquées dans le Théorème 1, un groupe qui dépend de quatre paramètres essentiels dans *tout voisinage* de *chaque* point ξ^* appartenant à un ensemble P possédant la mesure positive de Lebesgue.

Quelques démonstrations uniformes pour tous les cas du théorème de l'Hôpital. Généralisations

Pewne jednolite dowody twierdzenia L'Hôpitala

Par

T. WAŻEWSKI (Cracovie)

Le théorème classique de l'Hôpital relatif aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies dans un intervalle ouvert Δ dont une des extrémités est égale à c se répartit en plusieurs cas.

D'abord le symbole

$$\frac{\lim\limits_{x/c} f(x)}{\lim\limits_{x/c} g(x)}$$

peut prendre une des cinq formes

$$\frac{0}{0},\ \frac{+\infty}{+\infty},\ \frac{-\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty},\ \frac{+\infty}{-\infty}.$$

Ensuite c peut constituer l'extrémité droite ou gauche de Δ (deux cas) et c peut être fini ou infini (deux cas). Enfin la

$$\lim_{x/c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

peut être finie, égale à $+\infty$ on à $-\infty$ (trois cas). Cette classification comprend en somme $5 . 2 . 2 . 3 = 60$ cas différents.

On peut réduire certains de ces cas à quelques cas particuliers dont chacun exige ensuite une démonstration à part. Cette façon de procéder exige trop de temps en comparaison avec sa valeur instructive. C'est

donc avec raison, que, sans conduire les démonstrations à bout, on le confie souvent à la patience des étudiants.

Dans la note présente nous indiquons quelques démonstrations rapides dont chacune ramène, d'un seul coup, tous les soixante cas à un lemme unique de la théorie des suites de nombres réels. La démonstration de ces lemmes s'appuie sur les propriétés suivantes fondamentales dans la théorie des suites:

(α) Si $u_\nu \to l$ (où l est fini ou égal à $+\infty$ ou à $-\infty$), $v_\nu \to 1$, $w_\nu \to 0$ alors $u_\nu v_\nu \to l$, $u_\nu + w_\nu \to l$.

(β) Dans chaque suite de nombres on peut choisir une suite partielle convergente soit à une limite finie soit à $+\infty$ ou à $-\infty$.

La démonstration la plus rapide est celle du § 2. Le théorème du § 3 relatif aux suites met en évidence une propriété indépendante de la notion de la dérivée et, cependant, si étroitement liée au théorème de l'Hôpital, qu'elle en fournit quelques généralisations pour les fonctions quelconques (§ 6) ou absolument continues (§ 7).

Le lemme du § 4 est construit de façon à obtenir une démonstration directe (et non pas par „reductio ad absurdum") du théorème de l'Hôpital. Le lemme du § 5 concerne le cas ou une des suites est monotone.

§ 1. *Théorème de l'Hôpital.* Soit Δ un intervalle ouvert (borné ou non) et c une extrémité de Δ (c fini ou $c=+\infty$ ou $c=-\infty$). Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont envisagées exclusivement dans Δ, y possèdent des dérivées finies $f'(x)$ et $g'(x)$ et remplissent les conditions

$$g'(x) \neq 0 \quad (\text{dans } \Delta) \tag{1,1}$$

$$g(x) \neq 0 \quad (\text{dans } \Delta)\ ^{1)} \tag{1,2}$$

$$\lim_{x/c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{1,3}$$

(L est fini ou $L=+\infty$ ou $L=-\infty$). Supposons que l'on ait une des relations suivantes

$$\lim_{x/c} f(x) = \lim_{x/c} g(x) = 0 \tag{1,4}$$

$$\lim_{x/c} |g(x)| = +\infty. \tag{1,5}$$

[1]) On peut supprimer l'hypothèse que $g(x) \neq 0$, car de (1,2) il résulte en raison du théorème de Rolle que $g(x)$ peut devenir nulle tout au plus en un point x_0. Il suffit de remplacer Δ par l'intervalle ouvert $\Delta_1 = (x_0, c)$.

Dans ces hypothèses on a

$$\lim_{x/c} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{1,6}$$

§ 2. Lemme 1. Soient $\{a_\nu\}$ et $\{b_\nu\}$ deux suites de nombres réels, tels que

1°) $$b_\nu \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{2,1}$$

2°) on a ou bien

$$\lim_{\nu/\infty} a_\nu = \lim_{\nu/\infty} b_\nu = 0, \tag{2,2}$$

ou bien

$$\lim_{\nu/\infty} |b_\nu| = +\infty. \tag{2,3}$$

Ceci étant admis, il existe deux suites croissantes d'indices

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \tag{2,4}$$

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \tag{2,5}$$

tels que

$$b_{\delta_\nu} \neq b_{\gamma_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{2,6}$$

$$\lim_{\nu/\infty} \frac{a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}} = \lim_{\nu/\infty} \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}} = 0.\ ^{1)} \tag{2,7}$$

Démonstration. Dans le cas (2,2) on a pour un indice ν fixe la relation

$$\lim_{k/\infty} \frac{a_k}{b_\nu} = \lim_{k/\infty} \frac{b_k}{b_\nu} = 0.$$

Nous désignons par γ_1 un nombre naturel (le plus petit possible), tel que

$$\left|\frac{a_{\gamma_1}}{b_1}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{b_{\gamma_1}}{b_1}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

En procédant par l'induction mathématique nous désignons par γ_ν (ou $\nu < 1$) un nombre naturel (le plus petit possible) tel que

[1]) Il ne serait pas pratique de décomposer ce lemme en deux lemmes correspondant aux cas (2,2) et (2,3), car la thèse (2,6) et (2,7) est la même pour ces deux cas.

$$\left|\frac{a_{\gamma_\nu}}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2^\nu}, \quad \left|\frac{b_{\gamma_\nu}}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2^\nu}, \quad \gamma_\nu > \gamma_{\nu-1}.$$

En posant $\delta_\nu = \nu$ nous constatons que les relations (2,6) et (2,7) ont lieu.

Il reste le cas (2,3). Dans ce cas on a pour tout ν fixe

$$\lim_{l/\infty} \frac{a_\nu}{b_l} = \lim_{l/\infty} \frac{b_\nu}{b_l} = 0.$$

Nous désignons par δ_1 le plus petit nombre naturel, tel que

$$\left|\frac{a_1}{b_{\delta_1}}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{b_1}{b_{\delta_1}}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Nous désignons par δ_ν le plus petit nombre naturel, tel que

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\delta_\nu}}\right| \leqslant \frac{1}{2^\nu}, \quad \left|\frac{b_\nu}{b_{\delta_\nu}}\right| \leqslant \frac{1}{2^\nu}, \quad \delta_\nu > \delta_{\nu-1}.$$

En posant $\gamma_\nu = \nu$ nous voyons que les relations (2,6) et (2,7) ont lieu. Notre lemme est ainsi démontré.

Première démonstration du théorème de l'Hôpital. Gardons les notations et les hypothèses du § 1.

Supposons, par impossible, que l'égalité (1,6) n'ait pas lieu. Il existe donc une suite de nombres x_ν appartenant à Δ, et un nombre l (l fini ou $l = +\infty$ ou $l = -\infty$), tels que

$$x_\nu \to c, \quad \frac{f(x_\nu)}{g(x_\nu)} \to l \neq L. \tag{2,8}$$

Posons $a_\nu = f(x_\nu)$, $b_\nu = g(x_\nu)$. On a

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} \to l \neq L. \tag{2,9}$$

Les suites $\{a_\nu\}$ et $\{b_\nu\}$ satisfont aux hypothèses du Lemme 1 en raison de (1,2), (1,4) et (1,5). En introduisant les suites (2,4) et (2,5) posons

$$s_\nu = \frac{a_{\delta_\nu} - a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu} - b_{\gamma_\nu}} = \frac{f(x_{\delta_\nu}) - f(x_{\gamma_\nu})}{g(x_{\delta_\nu}) - g(x_{\gamma_\nu})}.$$

En vertu du second théorème sur les accroissements finis, il existe un nombre ξ_ν situé entre x_{γ_ν} et x_{δ_ν} tel que (cf, aussi la première relation (2,8))

$$s_\nu = \frac{f'(\xi_\nu)}{g'(\xi_\nu)}, \quad \xi_\nu \to c.$$

En vertu de (1,3) il s'ensuit que

$$s_\nu \to L. \tag{2,10}$$

Mais on a

$$s_\nu = \left(\frac{a_{\delta_\nu}}{b_{\delta_\nu}} - \frac{a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}}\right) \cdot \left[1 : \left(1 - \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}}\right)\right].$$

Tenant compte de (2,9) et (2,7) on a

$$s_\nu \to l \neq L,$$

ce qui est en contradiction avec (2,10).

§ 3. *Définition d'une couple hôpitalienne de suites.* Soient

$$a_1, a_2, \ldots \quad (\text{suite } \{a_\nu\}) \tag{3,1}$$

$$b_1, b_2, \ldots \quad (\text{suite } \{b_\nu\}) \tag{3,2}$$

deux suites de nombres réels et soit L un nombre fini ou non (les cas $L = +\infty$ ou $L = -\infty$ sont admissibles). Nous dirons que la couple de suites (3,1) et (3,2) est hôpitalienne relativement à L, lorsque

I) $$b_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{3,3}$$

II) on a, ou bien

$$\lim_{\nu/\infty} a_\nu = \lim_{\nu/\infty} b_\nu = 0 \tag{3,4}$$

ou bien

$$\lim_{\nu/\infty} |b_\nu| = +\infty \tag{3,5}$$

III) pour toute couple de suites croissantes d'indices

$$\{\gamma_\nu\}, \ \{\delta_\nu\} \tag{3,6}$$

pour lesquels

$$b_{\gamma_\nu} \neq b_{\delta_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{3,7}$$

on a
$$\lim_{\nu/\infty} \frac{a_{\delta_\nu} - a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu} - b_{\gamma_\nu}} = L. \tag{3,8}$$

Remarque 1. Si la couple (3,1) et (3,2) est hôpitalienne relativement à L et si $\{\alpha_\nu\}$ est une suite croissante d'indices, alors la couple $\{a_{\alpha_\nu}\}$, $\{b_{\alpha_\nu}\}$ est évidemment hôpitalienne relativement à L.

Théorème 1. *(Théorème du type de l'Hôpital pour les suites de nombres).* Si la couple de suites $\{A_\nu\}$ et $\{B_\nu\}$ est hôpitalienne relativement à L (où L est fini, ou $L = +\infty$, ou $L = -\infty$) alors
$$\lim_{\nu/\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = L. \tag{3,9}$$

Démonstration. Supposons que l'égalité (3,9) n'ait pas lieu. Il existe donc une suite croissante $\{\alpha_\nu\}$ d'indices et un nombre $l \neq L$ (l fini ou non), tels que
$$\lim_{\nu/\infty} \frac{A_{\alpha_\nu}}{B_{\alpha_\nu}} = l \neq L. \tag{3,10}$$

Posons $a_\nu = A_{\alpha_\nu}$, $b_\nu = B_{\alpha_\nu}$. La couple des suites $\{a_\nu\}$ et $\{b_\nu\}$ est hôpitalienne relativement à L. On aura
$$\lim_{\nu/\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = l \neq L. \tag{3,11}$$

En vertu de (3,3), (3,4), (3,5) et du Lemme 1 (§ 2) il existe deux suites croissantes d'indices $\{\gamma_\nu\}$, $\{\delta_\nu\}$, tels que
$$\frac{a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}} \to 0, \quad \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}} \to 0, \quad b_{\delta_\nu} \neq b_{\gamma_\nu}. \tag{3,12}$$

Posons
$$s_\nu = \frac{a_{\delta_\nu} - a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu} - b_{\gamma_\nu}}.$$

En vertu de (3,8) et (3,11) on a
$$\lim_{\nu/\infty} s_\nu = L, \quad \lim_{\nu/\infty} \frac{a_{\delta_\nu}}{b_{\delta_\nu}} = l \neq L. \tag{3,13}$$

Nous exprimerons $\dfrac{a_{\delta_\nu}}{b_{\delta_\nu}}$ au moyen de s_ν.

On a
$$s_\nu = \left(\frac{a_{\delta_\nu}}{b_{\delta_\nu}} - \frac{a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}}\right) : \left(1 - \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}}\right),$$
d'où
$$\frac{a_{\delta_\nu}}{b_{\delta_\nu}} = \left(1 - \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}}\right) s_\nu + \frac{a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu}}$$
et, par suite, (cf. (3,12) et la première relation (3,13))
$$\lim_{\nu/\infty} \frac{a_{\delta_\nu}}{b_{\delta_\nu}} = L,$$
ce qui est en contradiction avec la deuxième relation (3,13).

Deuxième démonstration du théorème de l'Hôpital. Gardons les notations et les hypothèses du § 1. Soit $\{x_\nu\}$ une suite de nombres appartenant à Δ et tendant vers c. Posons $a_\nu = f(x_\nu)$, $b_\nu = g(x_\nu)$. Il suffit de prouver que $\dfrac{a_\nu}{b_\nu} \to L$, ou (cf. Théorème 1) que la couple de suites $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ est hôpitalienne relativement à L. Or les propriétés (3,3), (3,4) ou (3,5) ont lieu en vertu de (1,2), (1,4) ou (1,5). La propriété (3,8) a lieu, car en raison de (1,3), on a
$$\frac{a_{\delta_\nu} - a_{\gamma_\nu}}{b_{\delta_\nu} - b_{\gamma_\nu}} = \frac{f(x_{\delta_\nu}) - f(x_{\gamma_\nu})}{g(x_{\delta_\nu}) - g(x_{\gamma_\nu})} = \frac{f'(\xi_\nu)}{g'(\xi_\nu)} \to L,$$
ce qui termine la démonstration.

§ 4. Lemme 2.

Supposons que

I) $$b_\nu \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{4,1}$$

II) ou bien,
$$\lim_{\nu/\infty} a_\nu = \lim_{\nu/\infty} b_\nu = 0 \tag{4,2}$$
ou bien
$$\lim_{\nu/\infty} |b_\nu| = +\infty. \tag{4,3}$$

Nous affirmons qu'il existe une une suite d'indices $\{\gamma_\nu\}$, telle que
$$\gamma_\nu \to +\infty, \quad \frac{a_{\gamma_\nu}}{b_\nu} \to 0 \quad \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_\nu} \to 0, \quad b_{\gamma_\nu} \neq b_\nu. \tag{4,4}$$

Démonstration. Dans le cas (4,2) l'existence d'une telle suite $\{\gamma_\nu\}$ a été déjà établie au cours de la démonstration de cette partie du Lemme 1 (§ 2) qui se rapportait au cas (2,2).

Considérons le cas (4,3). Désignons par p_1 un nombre naturel, tel que $p_1 \geqslant 2$ et, en outre,

$$\left|\frac{a_1}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{b_1}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{lorsque} \quad \nu \geqslant p_1.$$

Désignons par p_k $(k \geqslant 2)$ un nombre naturel, tel que $p_k > p_{k-1}$ et, en outre,

$$\left|\frac{a_k}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2k}, \quad \left|\frac{b_k}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2k} \quad \text{lorsque} \quad \nu \geqslant p_k. \tag{4,5}$$

On a

$$\lim_{k/\infty} p_k = +\infty. \tag{4,6}$$

Posons

$$\gamma_\nu = k \quad \text{lorsque} \quad p_k \leqslant \nu < p_{k+1}. \tag{4,7}$$

On a $\gamma_\nu \geqslant k$ lorsque $\nu \geqslant p_k$ donc, en vertu de (4,6),

$$\lim_{\nu/\infty} \gamma_\nu = +\infty. \tag{4,8}$$

En raison de (4,5) on a

$$\left|\frac{a_{\gamma_\nu}}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2\gamma_\nu}, \quad \left|\frac{b_{\gamma_\nu}}{b_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{2\gamma_\nu} \quad \text{lorsque} \quad \nu \geqslant p_1. \tag{4,9}$$

En vertu de (4,3) is existe un indice α, tel que

$$|b_\alpha| > b_\nu \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p_1 - 1. \tag{4,10}$$

Nous posons

$$\gamma_\nu = \alpha \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p_1 - 1. \tag{4,11}$$

De (4,9), (4,10) et (4,11) il résulte que

$$b_\nu \neq b_{\gamma_\nu} \quad \text{pour} \quad \nu \geqslant 1. \tag{4,12}$$

Les relations (4,4) constituent une conséquence immédiate de (4,8), (4,9) et (4,12).

Troisième démonstration du théorème de l'Hôpital. Conservons les notations et les hypothèses du § 1. Soit $\{x_\nu\}$ une suite de nombres appartenant à Δ, telle que $x_\nu \to c$. Posons $a_\nu = f(x_\nu)$, $b_\nu = g(x_\nu)$. Il suffit de prouver que

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} \to L. \tag{4,13}$$

En vertu des hypothèses du § 1 les prémisses du lemme précédent sont vérifiées. Il existe donc une suite $\{\gamma_\nu\}$ pour laquelle subsistent les relations (4,4).

Posons

$$\rho_\nu = \frac{a_\nu - a_{\gamma_\nu}}{b_\nu - b_{\gamma_\nu}} = \frac{f(x_\nu) - f(x_{\gamma_\nu})}{g(x_\nu) - g(x_{\gamma_\nu})} = \frac{f'(\xi_\nu)}{g'(\xi_\nu)}.$$

On a $x_{\gamma_\nu} \to c$ (cf. la première relation (4,4)) donc $\xi_\nu \to c$ et, en raison de (1,3),

$$\rho_\nu \to L. \tag{4,14}$$

Exprimons le rapport $\dfrac{a_\nu}{b_\nu}$ au moyen de ρ_ν. On a

$$\rho_\nu = \left(\frac{a_\nu}{b_\nu} - \frac{a_{\gamma_\nu}}{b_\nu}\right) : \left(1 - \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_\nu}\right),$$

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} = \left(1 - \frac{b_{\gamma_\nu}}{b_\nu}\right)\rho_\nu + \frac{a_{\gamma_\nu}}{b_\nu}$$

d'où, en vertu de (4,4) et (4,14) i résulte la relation (4,13).

§ 5. Voici maintenant un lemme dont l'énoncé est plus simple que celui des lemmes précédents et qui s'impose d'une façon si naturelle que l'on serait tenté de le considérer comme l'instrument le mieux adapté à la démonstration du théorème de l'Hôpital.

Il paraît cependant peu probable que l'on puisse réussir de construire une démonstration de ce lemme aussi simple que celle du Lemme 1 (§ 2).

La démonstration que nous esquissons dans la suite est beaucoup plus compliquée que celle des lemmes précédents.

Lemme 3. Supposons que la suite $\{b_\nu\}$ soit monotone au sens strict et

I) $$b_\nu \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{5,1}$$

II) on a, ou bien

$$\lim_{\nu/\infty} a_\nu = \lim_{\nu/\infty} b_\nu = 0 \tag{5,2}$$

ou bien

$$\lim_{\nu/\infty} |b_\nu| = +\infty. \tag{5,3}$$

Posons

$$s_\nu = \frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{b_{\nu+1} - b_\nu} \tag{5,4}$$

et supposons que

$$s_\nu \to L \tag{5,5}$$

(ou L est fini ou non). Nous affirmons que

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} \to L. \tag{5,6}$$

Démonstration. On montre par récurrence que

$$\text{minimum}\,(s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots, s_{\nu+p-1}) \leqslant \frac{a_{\nu+p}-a_\nu}{b_{\nu+p}-b_\nu} \leqslant$$
$$\text{maximum}\,(s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots, s_{\nu+p-1}).$$

En s'appuyant sur cette inégalité on demontre que la couple $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ est hôpitalienne relativement à L.

La justesse du lemme présent découle donc du Théorème 1 du § 3. On pourrait évidemment obtenir une démonstration directe de ce lemme en répétant. à modifications convenables près, les raisonnements qui ont servi pour démontrer le Lemme 1 (§ 2) et le Théorème 1 (§ 3).

La quatrième démonstration du théorème de l'Hôpital basée sur le présent lemme est immédiate.

§ 6. Théorème 2. *(Théorème de l'Hôpital pour des fonctions quelconques).* Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient définies et envisagées exclusivement pour les points d'un intervalle ouvert Δ ayant pour extrémité c (où c est fini ou $c=+\infty$ ou $c=-\infty$). Supposons que $g(x)\neq 0$ dans Δ et que

$$\lim_{x/c} f(x) = \lim_{x/c} g(x) = 0$$

ou bien

$$\lim_{x/c} |g(x)| = +\infty.$$

Supposons enfin que

$$\lim_{\nu/c\infty} \frac{f(x_\nu)-f(y_\nu)}{g(x_\nu)-g(y_\nu)} = L \quad \text{lorsque} \quad x_\nu \to c,\ y_\nu \to c$$

et lorsque $g(x_\nu)\neq g(y_\nu)$ $(\nu=1,2,\ldots)$. (Le nombre L peut être fini ou $L=+\infty$ ou bien $L=-\infty$).

Ceci étant posé on a

$$\lim_{x/c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ce théorème constitue une conséquence immédiate du Théorème 1 (§ 3).

§ 7. Théorème 3. *(Théorème de l'Hôpital pour les fonctions absolument continues.* Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient absolument continues dans tout intervalle borné et fermé, contenu dans l'intervalle ouvert Δ et soit c (fini ou non) une extrémité de Δ. Nous supposons ensuite que

$$\lim_{x/c} f(x) = \lim_{x/c} g(x) = 0,$$

ou bien

$$\lim_{x/c} |g(x)| = +\infty.$$

Nous supposons enfin que $g(x)$ soit monotone au sens strict et $g(x)\neq 0$ dans Δ, que $g'(x)\neq 0$ presque partout dans Δ et qu'il existe un ensemble de mesure nulle Z, tel que

$$\lim_{x/c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \tag{7,0}$$

lorsque $x\to c$ en variant dans $\Delta - Z$. (L est fini ou non). Celà posé, on a

$$\lim_{x/c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, $g(x)$ étant monotone, on a $g'(x)>0$ presque partout dans Δ ou bien $g'(x)<0$. Soient l et m deux nombres de Δ $(l\neq m)$. Supposons que pour un A (ou pour un B) on ait

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \geqslant A \quad \text{presque partout dans} \quad [l, m] \tag{7,1}$$

ou bien

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant B \quad \text{presque partout dans} \quad [l, m]. \tag{7,2}$$

Nous affirmons qu'alors on a respectivement

$$\frac{f(m)-f(l)}{g(m)-g(l)} \geqslant A, \tag{7,3}$$

ou bien

$$\frac{f(m)-f(l)}{g(m)-g(l)} \leqslant B. \tag{7,4}$$

Nous nous bornons à prouver que (7,3) est une conséquence de (7,1). On peut évidemment supposer que $l<m$ (en faisant au besoin changer de place l et m) et que $g'(x)>0$ (en remplaçant $f(x)$ et $g(x)$ par $-f(x)$ et $-g(x)$).

En vertu de (7,1) on a

$$f'(x) \geqslant A\, g'(x)$$

presque partout dans $[l, m]$ et, par suite

$$f(m) - f(l) = \int_l^m f'(x)\, dx \geqslant A \int_l^m g'(x)\, dx = A\, [g(m) - g(l)]$$

d'où résulte (7,3) car de $g'(x) > 0$ il s'ensuit que $g(m) - g(l) > 0$.

Soient $\{z_\nu\}$ et $\{y_\nu\}$ deux suites de points appartenant à Δ et, tels que $z_\nu \neq y_\nu$, $z_\nu \to c$, $y_\nu \to c$. En vertu des propriétés démontrées tout à l'heure on aura

$$s_\nu = \frac{f(z_\nu) - f(y_\nu)}{g(z_\nu) - g(y_\nu)} \to L. \tag{7,5}$$

Une démonstration plus détaillée de (7,5) nécessite la distinction de trois cas où L est fini, $L = +\infty$ et $L = -\infty$. Nous esquisserons seulement cette démonstration au cas de L fini. Soient A et B deux nombres très voisins de L et tels que $A < L < B$. A partir d'un ν assez grand les (7,1) et (7,2) auront lieu presque partout dans $[y_\nu, z_\nu]$ en vertu de (7,0).

On aura pour ces indices, en raison de (7,3) et (7,4) $A \leqslant s_\nu \leqslant B$ et par suite $|s_\nu - L| \leqslant B - A$. On en déduit (7,5), car on peut s'arranger de façon que $B - A < \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

Soit x_ν une suite quelconque de points de Δ, tels que $x_\nu \to c$.

Posons $a_\nu = f(x_\nu)$, $b_\nu \to g(x_\nu)$. En s'appuyant sur (7,5) on démontre immédiatement que la couple de suites $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ est hôpitalienne relativement à L (cf. la définition du § 3) donc, en vertu du Théorème 1 (§ 3) on a

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} \to L,$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque 2. En introduisant le changement de variables $u = g(x)$, on ramène le théorème de l'Hôpital au cas du quotient de la forme $\dfrac{F(u)}{u}$. La démonstration par cette voie serait cependant beaucoup plus longue que celles des paragraphes 2, 3 et 4.

Je dois à M. A. Turowicz l'obligeant renseignement que M. Orlicz, dans ses cours d'avant la guerre, appliquait, dans le cas (5,3), le principe du Lemme 3 (p. 126) servant de base à la quatrième démonstration (Remarque insérée au cours de la correction des épreuves).

Sur un théorème dans la théorie des équations différentielles

O pewnym twierdzeniu w teorii równań różniczkowych

Par

M. BIERNACKI (Lublin)

§ 1. On connait le théorème suivant, facile à démontrer [1]:

„Considérons des fonctions $f(t, x_0, x_1, \dots x_{n-1})$ et $g(t, y_0, y_1, \dots y_{n-1})$ continues pour $t_0 \leqslant t \leqslant T$ et pour toutes valeurs des variables x_i, y_i, et supposons que les conditions $x_i \leqslant y_i$ $(i = 0, 1, \dots n-1)$ entraînent toujours l'inégalité $f(t, x_0, x_1 \cdots x_{n-1}) \leqslant g(t, y_0, y_1 \cdots y_{n-1})$. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des intégrales des équations $x^{(n)}(t) = f(t, x, x' \cdots x^{(n-1)})$ et $y^{(n)}(t) = g(t, y, y' \dots \dots y^{(n-1)})$ respectivement, telles que l'on a $x(t_0) \leqslant y(t_0)$, $x^{(i)}(t_0) \leqslant y^{(i)}(t_0)$ $(i = 1, 2 \dots n-1)$ alors on a: $x(t) \leqslant y(t)$, $x'(t) \leqslant y'(t), \dots x^{(n-1)}(t) \leqslant y^{(n-1)}(t)$ dans tout intervalle $t_0 \leqslant t \leqslant T$".

Dans le cas particulier des équations linéaires on doit à M. J. Mikusiński une comparaison plus dificile [2]). „Désignons par ω_n le plus petit zéro positif de cette intégrale de équation $x^{(n)} + x = 0$ qui satisfait aux conditions $x(0) = x'(0) = \cdots x^{(n-2)}(0) = 0$, $x^{(n-1}(0) = 1$.

(ω_n est fini, on a $\omega_n > \sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$, $\lim \omega_n n^{-1} = 4e^{-1}$).

Considérons les équations:

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + A(t)\, x(t) = 0, \qquad (2) \quad y^{(n)}(t) + m\, y(t) = 0$$

[1]) Un théorème plus général a été établi par T. Ważewski Annales de la Soc. Pol. de Math. 1937 p. 101.

[2]) „O całkach rzeczywistych pewnych r. r. liniowych", 1940. Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires. Annales, Un. M. Curie-Skłodowska, Lublin, vol. I Nr 2, p. 23—34.