Nous constaterons facilement, que les points différents $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l, \ldots$ de la ligne gauche unicursale C^6 d'ordre 6, située (N⁰ 12) sur la surface Ψ^6, se transformeront en les points $A', \ldots$ de la conique C'^2, située dans le plan ω' et passant par ses points principaux T^*, V^*. Si la courbe C^6 (reg. N⁰ N⁰ 15, 16 et 17) — se décompose: a) en la droite $s^1 = \sigma_i^1 \sigma_k^1 \sigma_l^1$ et en la ligne gauche unicursale C^5 d'ordre 5; b) en deux droites s^1, s^2 et en la ligne gauche unicursale C^4 d'ordre 4; c) en trois droites s^1, s^2, s^3 et en la ligne gauche C^3 d'ordre 3, alors: les courbes C^5, C^4 et C^3 se transformeront respectiv. en la conique C'^2, qui passe: par les points principaux T^*, V^* et dans le cas: a) par le point $S^{1\prime}$, b) par les points $S^{1\prime}$ et $S^{2\prime}$, c) par les points $S^{1\prime}$, $S^{2\prime}$ et $S^{3\prime}$. Mais les points différents de la courbe gauche T^3 d'ordre 3, située (N⁰ 18) sur la surface Ψ^6, se transforment en les points de la série (t'), dont la base t' passe par le point principal V^*. Par analogie les points de la ligne gauche V^3 d'ordre 3, située sur la surface Ψ^3, se transforment en les points de la série (v'), dont la base v' passe par le point principal T^*. Enfin les points différents de la conique T_t^2, située (N⁰ 19) sur la surface Ψ^6, se transforment en les points de la série (t_t'), dont la base est $t' = V^* S^{t\prime}$, et les points de la conique V_t^2, située sur Ψ^6, se transforment en les points de la série (v_t') dont la base est $v_t' = T^* S^{t\prime}$.

Léopol, juin 1941. — Cracovie, octobre 1946.

Exemples des groupes de transformations d'une droite en elle-même qui dépendent de quatre paramètres essentiels

Przykłady grup przekształceń prostej w siebie, które zależą od czterech parametrów istotnych

Par

T. WAŻEWSKI (Cracovie)

Considérons un groupe de transformations

$$\bar{\xi} = \psi(\xi, t_1, \ldots, t_p) \tag{1}$$

où ξ est un point variable sur la droite et $t_1, \ldots, t_p$ désignent les paramètres.

Supposons d'abord que ψ soit une fonction analytique des variables $\xi, t_1, \ldots, t_p$. Depuis Lie on sait que, dans ce cas, le groupe peut dépendre tout au plus de trois paramètres essentiels. Si donc $p > 3$ les paramètres $t_1, \ldots, t_p$ ne peuvent pas être essentiels.

Supposons maintenant que ψ soit de classe C^∞ dans un ensemble Z composé des points $\xi, t_1, \ldots, t_p$ tels que ξ appartient à un intervalle ouvert Δ et $(t_1, \ldots, t_p)$ appartient à un ensemble ouvert Ω qui fait partie de l'espace cartésien à p dimensions.

Ceci veut dire que ψ possède des dérivées partielles (relatives à $\xi, t_1, \ldots, t_p$) de tous les ordres qui sont continues dans Z.

Nous dirons que le groupe (1) jouit au point ξ^* (appartenant à Δ) de la proprieté $W_p(\xi^*)$ lorsque ce groupe envisagé dans un voisinage quelconque (donc arbitrairement petit) de ξ^* dépend de p paramètres *essentiels* $t_1, \ldots, t_p$.

Dans le présent travail nous construisons (cf. Théorème 1 du § 5) l'exemple d'un groupe (1) de classe C^∞ qui jouit de la propriété $W_4(\xi^*)$

en un point ξ^* de l'intervalle Δ [1]). Il peut même arriver que l'ensemble E^* de tels ξ^* soit de mesure positive de Lebesgue (Tréorème 2 du § 5).

En appliquant la même méthode on pourrait construire des exemples du groupe (1) de classe C^∞ qui jouit de la propriété $W_p(\xi^*)$ (p quelconque mais fixe, $p>4$) aux points ξ^* appartenant à un ensemble E^* de mesure positive de Lebesgue.

Dans nos exemples l'ensemble E^* n'est nulle part dense, c.-à.-d. il ne renferme aucun intervalle aux extrémités différentes. Cette observation conduit au problème suivant présentant un intérêt en vue de certaines applications.

Problème. Supposons que le groupe (1) soit de classe C^∞ (ou, plus généralement, de classe C^p avec p fini). Est-ce que dans tout voisinage d'un point quelconque ξ (appartenant à Δ) il existe un intervalle partiel ϑ, tel que le groupe (1), envisagé dans ϑ, dépende au plus de trois paramètres essentiels?

§ 1. Lemme 1. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}=g(x) \tag{1,1}$$

où la fonction $g(x)$ possède la dérivée $g'(x)$ continue dans un intervalle ouvert Θ. Nous supposons que pour deux points a et b $(a<b)$ de cet intervalle on ait

$$g(a)=g(b)=0;\quad g(x)>0 \quad \text{lorsque } a<x<b. \tag{1,2}$$

Désignons par $\psi(\xi, t)$ l'intégrale de l'équation (1,1), telle que

$$\psi(\xi, 0)=\xi \tag{1,3}$$

et soit

$$a<\xi<b. \tag{1,4}$$

Nous affirmons que l'on a les propriétés suivantes

π_1. $\psi(\xi, t)$ existe pour $-\infty<t<+\infty$ et l'on a

$$a<\psi(\xi, t)<b \quad \text{lorsque} \quad -\infty<t<+\infty, \tag{1,5}$$

π_2. $\psi(\xi, t_1)\neq\psi(\xi, t_2)$ lorsque $t_1\neq t_2$,

π_3. Si $\psi(\xi, t_\nu)\to\psi(\xi, t_0)$ alors $t_\nu\to t_0$.

[1]) Cet exemple constitue la réponse à un problème posé par M. S. Gołąb.

Démonstration. $g'(x)$ étant continu, il passe par tout point de l'ensemble plan P défini par les relations $x\in\Theta$, $-\infty<t<+\infty$, une intégrale unique de l'équation (1,1). On a (cf. (1.2))

$$\psi(a, t)\equiv a,\ \psi(b, t)\equiv b \quad \text{pour} \quad -\infty<t<+\infty.$$

On a, en vertu de (1,3) et (1,4)

$$\psi(a, 0)<\psi(\xi, 0)<\psi(b, 0)$$

donc, en raison de l'unicité, on aura

$$a\equiv\psi(a, t)<\psi(\xi, t)<\psi(b, t)\equiv b \tag{1,6}$$

pour chaque intervalle $\alpha<t<\beta$ dans lequel $\psi(\xi, t)$ existe. Mais l'intégrale $\psi(\xi, t)$ pouvant être prolongée jusqu'à la frontière de l'ensemble P, l'intégrale $\psi(\xi, t)$ existe forcément dans l'intervalle $-\infty<t<+\infty$ et elle y satisfait aux inégalités (1,6). La propriété π_1 est donc établie.

En vertu de (1,5) et (1,2) on aura

$$\frac{d\psi(\xi, t)}{dt}=g(\psi(\xi, t))>0 \quad \text{pour} \quad -\infty<t<+\infty \tag{1,7}$$

la fonction ψ est donc croissante en t au sens strict et la propriété π_2 a lieu.

La fonction inverse de la fonction $\psi(\xi, t)$ (où ξ est fixe et t varie dans l'intervalle $-\infty<t<+\infty$) est donc aussi croissante et continue, ce qui entraîne la propriété π_3.

Lemme 2. Désignons par q l'intervalle $-\infty<x<+\infty$. Soit Ω un ensemble ouvert faisant partie de q et désignons par $Comp\,(\Omega)$ l'ensemble complémentaire de Ω, c.-à-d. $Comp\,(\Omega)=q-\Omega$. Nous affirmons qu'il existe une fonction bornée $h(x)$ qui est de classe C^∞ dans q (c.-à-d. possède les dérivées partielles de tous les ordres dans q) et telle que

$$h(x)>0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1,8}$$

$$h(x)\equiv 0,\ \frac{d^n h(x)}{dx^n}\equiv 0,\ (n=1, 2, \ldots, \infty) \text{ dans } Comp\,(\Omega). \tag{1,9}$$

Démonstration. L'idée directrice de la démonstration est identique à celle de la démonstration d'un lemme analogue relatif au cas de l'espace à deux dimensions inséré dans un travail antérieur de M. S. K. Za-

remba et de l'auteur [1]). La „méthode des trois pavés" de ce travail devrait être remplacée, dans le cas présent, par une méthode de deux pavés.

Définition 1. Ω étant un ensemble linéaire ouvert, nous désignerons par

$$h(\Omega; x) \tag{1,10}$$

une fonction bornée $h(x)$ de classe C^∞ jouissant de propriétés (1,8) et (1,9).

Définition 2. Nous dirons qu'une suite d'intervalles ouverts $\Theta_\nu = (a_\nu, b_\nu)$ tend vers $\overset{*}{x}$ lorsque $a_\nu \to \overset{*}{x}$ et $b_\nu \to \overset{*}{x}$.

On sait que chaque ensemble ouvert linéaire Ω est somme d'un nombre fini ou dénombrable d'intervalles ouverts, dits intervalles composants de Ω. On dira que Ω *se condense* sur $\overset{*}{x}$ lorsqu'une suite partielle de ses intervalles composants tend vers $\overset{*}{x}$.

Lemme 3. A tout point $\overset{*}{x}$ on peut faire correspondre quatre (ou plus généralement N, où N est fini) ensembles ouverts, bornés et disjoints Ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ dont chacun se condense sur $\overset{*}{x}$.

Soit, en effet, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ une suite d'intervalles ouverts et disjoints tendant vers $\overset{*}{x}$. Il suffit de poser $\Omega_1 = \Delta_1 + \Delta_5 + \Delta_9 + \cdots$, $\Omega_2 = \Delta_2 + \Delta_6 + \Delta_{10} + \cdots$, $\Omega_3 = \Delta_3 + \Delta_7 + \Delta_{11} + \cdots$, $\Omega_4 = \Delta_4 + \Delta_8 + \Delta_{12} + \cdots$.

§ 2. Remarque 1. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = g(x) \tag{2,1}$$

et supposons que $g(x)$ est de classe C^∞ dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$ (c.-à-d. y possède des dérivées continues de tous les ordres) et que $g(x)$ soit *borné* dans cet intervalle.

Soit $\psi(\xi, t)$ l'intégrale de (2,1) passant par les point $x = \xi$, $t = 0$.

Voici quelques propriétés bien connues ou faciles à établir [2]) de la fonction $\psi(\xi, t)$, propriétés que nous utiliserons dans la suite.

[1]) T. Ważewski et S. K. Zaremba. Sur les ensembles de condensation des caractéristiques d'un système d'équations différentielles ordinaires. Ann. de la Soc. Polon. de Math. T. XV, p. 25 et 26.

[2]) On peut, au besoin, consulter le manuel de M. E. Kamke. Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1930) et en particulier les pages 82, 135, 195.

P_1. La fonction $\psi(\xi, t)$ est définie et de classe C^∞ dans le plan $-\infty < \xi < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$ tout entier.

P_2. $\psi(\xi, 0) \equiv \xi$ lorsque $-\infty < \xi < +\infty$.

P_3. Si $\xi_2 = \psi(\xi_1, t_1)$, $\xi_3 = \psi(\xi_2, t_2)$ alors $\xi_3 = \psi(\xi_1, t_1 + t_2)$.

Autrement dit, on a pour tous les ξ, t_1, t_2 l'identité

$$\psi(\xi, t_1 + t_2) = \psi(\psi(\xi, t_1), t_2).$$

P_4. En posant, en particulier, $t_1 = t$, $t_2 = -t$ on voit que les équations

$$\xi_2 = \psi(\xi_1, t), \tag{2,2}$$

$$\xi_1 = \psi(\xi_2, -t) \tag{2,3}$$

sont équivalentes, ce qui exprime que, pour un t quelconque mais fixe, les transformations (2,2) et (2,3) sont inverses l'une de l'autre. On a

$$\xi \equiv \psi(\xi, 0) \equiv \psi(\psi(\xi, t), -t).$$

P_5. $\dfrac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial \xi} > 0$ pour ξ et t quelconques.

P_6. $\lim\limits_{\xi \to -\infty} \psi(\xi, t) = -\infty$,

$\lim\limits_{\xi \to +\infty} \psi(\xi, t) = +\infty$.

P_7. En vertu de P_5 et P_6, pour un t quelconque mais fixe, la transformation

$$\xi_2 = \psi(\xi_1, t)$$

constitue une homéomorphie qui transforme la droite $-\infty < \xi_1 < +\infty$ en la droite $-\infty < \xi_2 < +\infty$ toute entière.

§ 3. Paramètres essentiels d'une famille de transformations. Posons pour abréger $U = (u_1, \ldots, u_p)$. Soit

$$\psi(t, U) = \psi(t, u_1, \ldots, u_p) \tag{3,1}$$

une fonction définie dans l'ensemble des points (t, U) vérifiant les relations $t \in \Delta$, $U \in \Omega$, où Δ est un intervalle ouvert et Ω un ensemble faisant partie de l'espace cartésien à p dimensions. Considérons, dans la fonction ψ, la variable t comme variable indépendante et les variables $u_1, \ldots, u_p$ comme paramètres. Nous obtiendrons ainsi une famille F de fonctions $\psi(t, U)$, d'une variable t (variant dans Δ), famille dépendant des p paramètres $u_1, \ldots, u_p$ (variant dans Ω).

Nous dirons que $\psi(t, U_1) \neq \psi(t, U_2)$ lorsqu'il existe un point $\bar{t} \in \Delta$, tel que $\psi(\bar{t}, U_1) \neq \psi(\bar{t}, U_2)$.

Nous dirons que

$$\psi(t, U_\nu) \to \psi(t, U_0) \quad \text{lorsque} \quad \nu \to \infty$$

dans le cas où cette relation a lieu pour tous les $t \in \Delta$.

Nous dirons que les paramètres $u_1, \ldots, u_p$, dont dépend la famille F, sont essentiels lorsque les propriétés suivantes ont lieu:

R_1. Ω est un ensemble ouvert et non vide faisant partie de l'espace cartésien à p dimensions.

R_2. $\psi(t, U_\nu) \to \psi(t, U_0)$ lorsque $U_\nu \to U_0$.

R_3. $U_\nu \to U_0$ lorsque $\psi(t, U_\nu) \to \psi(t, U_0)$.

R_4. $\psi(t, U) \neq \psi(t, U_1)$ lorsque $U \neq U_1$, $U \in \Omega$, $U_1 \in \Omega$.

Nous dirons que la famille des transformations

$$\bar{t} = \psi(t, u_1, \ldots, u_p) \tag{3,2}$$

dépend des paramètres essentiels $u_1, \ldots, u_p$ lorsqu'il en est ainsi de la famille F des fonctions (3,1).

Remarque 2. La même famille des fonctions (ou des transformations) ne peut pas dépendre à la fois de p et de q paramètres essentiels lorsque $p \neq q$.

Supposons, en effet que la famille (3,1) puisse être écrite sous la forme

$$\varphi(t, V) = \varphi(t, v_1, \ldots, v_q)$$

où V varie dans un ensemble ouvert Ω_1 et t varie dans le même intervalle Δ [1]).

Supposons aussi que les paramètres $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_q)$ soient essentiels.

Soit $U \in \Omega$. Il existe alors un point unique $V \in \Omega_1$ (nous le désignons par $\lambda(U)$), tel que $\psi(t, U) \equiv \varphi(t, V)$ dans Δ.

En s'appuyant sur la définition précédante des paramètres essentiels on démontre facilement que la transformation $V = \lambda(U)$ établit une homéomorphie entre l'ensemble ouvert Ω de l'espace à p dimensions et l'ensemble ouvert Ω_1 de l'espace à q dimensions, où $p \neq q$. Or ceci n'est pas possible en vertu d'un théorème bien connu de M. Brouwer.

[1]) Ceci veut dire qu'à chaque $U \in \Omega$ correspond un $V \in \Omega_1$, tel que $\psi(t, U) = \varphi(t, V)$ dans Δ et à chaque $V \in \Omega_1$ correspond un $U \in \Omega$ pour lequel cette identité a lieu.

Paramètres essentiels au sens local.

Nous dirons que les paramètres $(u_1, \ldots, u_p)$ de la famille (3,1) ou (3,2) sont essentiels (au sens local) au point t^* (où $t^* \in \Delta$) lorsqu'il existe une suite d'intervalles $\Delta_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, tels que 1°) $t^* \in \Delta_\nu \subset \Delta$, $\alpha_\nu \to t^*$, $\beta_\nu \to t^*$, 2°) si l'on envisage les fonctions (3,1) exclusivement dans l'intervalle Δ_ν (ν quelconque mais fixe) alors les paramètres $u_1, \ldots, u_p$ sont essentiels pour cette famille de fonctions.

Il est évident que cette notion ne dépend pas du choix particulier des intervalles Δ_ν.

Remarque 3. Il est évident qu'une famille de fonctions (3,1) ou de transformations (3,2) ne peut pas dépendre, au point t^*, à la fois de p et de q paramètres essentiels au sens local lorsque $p \neq q$ (cf. la Remarque 2.

Remarque 4. Si les paramètres $u_1, \ldots, u_p$ de la famille (3,1) sont essentiels (au sens local) en un point $x^* \in \Delta$, ils sont évidemment essentiels au sens intégral relativement à l'intervalle Δ tout entier.

Il peut cependant arriver qu'une famille (3,1) dépendant de p paramètres essentiels relativement à Δ peut dépendre de q paramètres essentiels ($q < p$) lorsque l'on envisage cette famille dans un intervalle convenable δ faisant partie de Δ.

§ 4. Lemme 4. Soient Ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) quatre ensembles ouverts, bornés et disjoints dont chacun se condense sur un point ξ^* (cf. Définition 2 du § 1). Les ensembles Ω_i existent en vertu du Lemme 3. Considérons quatre équations différentielles

$$\frac{dx}{dt_i} = h(\Omega_i, x) \text{ [1]} \qquad (\textit{équation } E_i) \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

où la fonction $h(\Omega_i, x)$ est définie par la Définition 1 du § 1. (La fonction $h(\Omega_i, x)$ existe en vertu du Lemme 2). Soit

$$\psi_i(\xi, t_i) \tag{4,1}$$

l'intégrale de l'équation E_i, telle que

$$\psi_i(\xi, 0) \equiv \xi. \tag{4,2}$$

[1]) Il faut remarquer que la variable, dont dépend la fonction inconnue x, n'est pas la même pour toutes les équations E_i. Elle est t_i dans l'équation E_i. Chaque équation E_i est envisagée indépendamment des autres.

Posons enfin

$$\psi(\xi, t_1, t_2, t_3, t_4) = \left[\sum_{i/1}^{4} \psi_i(\xi, t_i)\right] - 3\xi. \tag{4,3}$$

Nous affirmons que la fonction $\psi(\xi, t_1, t_2, t_3, t_4)$ est de classe C^∞ dans l'espace à cinq dimensions tout entier, que $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} > 0$ partout et que la classe de transformations

$$\bar{\xi} = \psi(\xi, t_1, t_2, t_3, t_4) \tag{4,4}$$

constitue un groupe de transformations qui transforment la droite $-\infty < \xi < +\infty$ en elle-même. Ce groupe dépend des quatre paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 qui sont *essentiels* [1]) dans chaque voisinage du point ξ^*.

Démonstration. Soit Γ un intervalle borné, tel que

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 \subset \Gamma.$$

On a $h(\Omega_i, x) = 0$ lorsque x n'appartient pas à Γ (cf. Définition 1 et Lemme 2). Les fonctions $h(\Omega_i, x)$ sont bornées et de classe C^∞ dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$. Les fonctions $\psi_i(\xi, t_i)$ jouissent donc des propriétés $P_1, \ldots, P_7$ intervenant dans la Remarque 1 du § 2.

On en déduit immédiatement les suivantes propriétés $Q_1, \ldots, Q_7$ relatives à la fonction (4,3).

Q_1. La fonction $\psi(\xi, t_1, t_2, t_3, t_4)$ est de classe C^∞ dans l'espace à cinq dimensions tout entier.

Q_2. $\psi(\xi, 0, 0, 0, 0) \equiv \xi$.

Q_3. Si $\xi_2 = \psi(\xi_1, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4)$, $\xi_3 = \psi(\xi_2, \bar{\bar{t}}_1, \bar{\bar{t}}_2, \bar{\bar{t}}_3, \bar{\bar{t}}_4)$ alors $\xi_3 = \psi(\xi_1, \bar{t}_1 + \bar{\bar{t}}_1, \bar{t}_2 + \bar{\bar{t}}_2, \bar{t}_3 + \bar{\bar{t}}_3, \bar{t}_4 + \bar{\bar{t}}_4)$.

Pour le prouver rappelons que (cf. Définition 1, Remarque 1 et Lemme 1)

$$h(\Omega_i, x) > 0 \quad \text{dans } \Omega_i \tag{4,5}$$

$$h(\Omega_i, x) = 0 \quad \text{dans Comp } (\Omega_i)\ ^{2)} \tag{4,6}$$

donc, en vertu de (4,3),

[1]) Cf. la définition en question du § 3. On peut dire que les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 sont essentiels (au sens local) au point ξ^*.

[2]) Comp (Ω_i) désigne l'ensemble complémentaire de Ω_i c.-à-d. l'ensemble $(-\infty, +\infty) - \Omega_i$.

$$\psi(\xi, t_1, t_2, t_3, t_4) = \psi_i(\xi, t_i) \quad \text{dans } \Omega_i \tag{4,7}$$

$$\psi(\xi, t_1, t_2, t_3, t_4) = \xi \quad \text{dans Comp } (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4). \tag{4,8}$$

De ces relations résulte Q_3. Il suffit à cet effet de ramarquer que, si $\xi_1 \in \Omega_i$ alors $\xi_2 \in \Omega_i$ et $\xi_3 \in \Omega_i$ (cf. (1,5)).

Dans ce cas Q_3 se ramène à P_3. Dans le cas où $\xi_1 \in \text{Comp}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_2 + \Omega_4)$ il suffit de se servir de (4,8).

Q_4. La transformation $\xi_1 = \psi(\xi_2, -t_1, -t_2, -t_3, -t_4)$ est inverse de la transformation $\xi_2 = \psi(\xi_1, t_1, t_2, t_3, t_4)$.

Q_5. $\frac{\partial \psi(\xi, t_1, \ldots, t_4)}{\partial \xi} > 0$ partout.

Q_6. $\psi(\xi, t_1, \ldots, t_4) \to +\infty$ lorsque $\xi \to +\infty$, $\psi(\xi, t_1, \ldots, t_4) \to -\infty$ lorsque $\xi \to -\infty$.

L'image de la droite $-\infty < \xi < +\infty$ par l'intermédiaire de (4,4) constitue la droite toute entière.

Q_7. Les transformations (4,4) constituent une homoémorphie transformant la droite en elle-même.

La classe de transformations (4,4) constitue donc un groupe. Il reste à prouver que ce groupe dépend de quatres paramètres essentiels $t_1, \ldots, t_4$ dans chaque voisinage de ξ^*.

Soit $\xi^* - \varepsilon < \xi < \xi^* + \varepsilon$ un voisinage arbitraire de ξ^*. Ce voisinage sera désigné par δ. Comme chacun des ensembles Ω_i se condense sur ξ^* donc (cf. Définition 2 du § 1) il existe un intervalle composant de Ω_i, — nous le désignerons par $\Theta_i = (a_i, b_i)$, tel que $\Theta_i \subset \delta$.

Il suffit de prouver que les propriétés R_1, R_2, R_3, R_4 du § 3 sont vérifiées relativement à l'intervalle δ.

Les propriétés R_1 et R_2 étant évidentes adressons — nous à la propriété R_3. Supposons, à cet effet, que dans δ, on ait

$$\psi(\xi, t_1^{(\nu)}, \ldots, t_4^{(\nu)}) \to \psi(\xi, t_1^{(0)}, \ldots, t_4^{(0)}). \tag{4,9}$$

Il suffit de prouver que

$$t_i^{(\nu)} \to t_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{4,10}$$

Soit

$$a_1 < \xi_1 < b_1, \quad \text{c.-à-d.} \quad \xi_1 \in \Theta_1.$$

De (4,7) et (4,9) il résulte que

$$\psi_1(\xi_1, t_1^{(\nu)}) \to \psi_1(\xi_1, t_1^{(0)}). \tag{4,11}$$

En vertu de la Définition 1 du § 1 on a

$$h(\Omega_1, x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = a_1 \quad \text{et pour} \quad x = a_2;$$

$$h(\Omega_1, x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in \Theta_1.$$

En s'appuyant sur la propriété π_3 du Lemme 1, on conclut de (4,11) que $t_1^{(\nu)} \to t_1^{(0)}$. La relation (4,10) a donc lieu pour $i = 1$.

La démonstration des cas $i = 1, 2, 3, 4$ est analogue.

Il reste la propriété R_4. Supposons que

$$(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4) \neq (\bar{\bar{t}}_1, \bar{\bar{t}}_2, \bar{\bar{t}}_3, \bar{\bar{t}}_4). \tag{4,12}$$

Il suffit de prouver que l'inégalité

$$\psi(\xi, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_4) \neq \psi(\xi, \bar{\bar{t}}_1, \ldots, \bar{\bar{t}}_4) \tag{4,13}$$

subsiste en un certain point $\xi \in \delta$.

En vertu de (4,12) l'inégalité

$$\bar{t}_i \neq \bar{\bar{t}}_i \tag{4,14}$$

a lieu pour un certain indice $i\,(1 \leqslant i \leqslant 4)$.

Supposons en particulier que

$$\bar{t}_1 \neq \bar{\bar{t}}_1 \tag{4,15}$$

et choisissons le point $\xi_1 \in \Theta_1$ comme tout à l'heure.

En vertu de la propriété π_2 du Lemme 1 on conclut de (4,15) que

$$\psi_1(\xi_1, \bar{t}_1) \neq \psi_1(\xi_1, \bar{\bar{t}}_1)$$

donc en vertu de (4,7)

$$\psi(\xi_1, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_4) \neq \psi(\xi_1, \bar{\bar{t}}_1, \ldots, \bar{\bar{t}}_4).$$

L'inégalité (4,13) a donc lieu pour le point ξ_1 appartenant à δ. Cette inégalité est donc établie lorsque l'inégalité (4,14) est vraie pour $i = 1$. Les cas $i = 2, 3, 4$ pouvent être établis d'une façon analogue.

De ce lemme résulte immédiatement le théorème suivant:

§ 5. Théorème 1. Il existe un groupe de transformations de la droite $-\infty < \xi < +\infty$ en elle-même

$$\bar{\xi} = \psi(\xi, t_1, t_2, t_3, t_4) \tag{5,1}$$

qui dépend de quatre paramètres essentiels t_1, t_2, t_3, t_4 dans tout voisinage d'un point ξ^*. Ce groupe est en même temps tel que la fonction ψ possède partout les dérivées partielles continues de tous les ordres relatives aux variables ξ, t_1, t_2, t_3, t_4. On a en outre partout l'inégalité

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} > 0. \tag{5,2}$$

Lemme 5. Soit P un ensemble parfait, borné qui est de mesure positive de Lebesgue et qui est partout discontinu (c.-à-d. ne contient aucun intervalle aux extrémités différentes) [1]).

Nous affirmons qu'il existe quatre ensembles ouverts, bornés et disjoints $\Omega_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ dont chacun se condense sur *chaque point* de P.

Démonstration. Rangeons les intervalles contigus (ouverts et bornés) de P en une suite infinie $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Couvrons P au moyen d'un nombre fini de segments ouverts de longueur inférieure à ε

$$\sigma(1, \varepsilon), \quad \sigma(2, \varepsilon), \ldots, \quad \sigma(n(\varepsilon), \varepsilon)$$

dont chacun contient certains points de P. Chacun de ces intervalles renferme un nombre infini d'intervalles Δ_ν.

Soit $\varepsilon = 1$. Nous choisirons dans $\sigma(i, 1)$ quatre intervalles disjoints de la suite $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$. Désignons les par $\Delta^1_{i,\alpha}\,(\alpha = 1, \ldots 4)$.

Nous nous arrangerons de façon que $\Delta^1_{i\alpha} \neq \Delta^1_{j\beta}$ lorsque $i \neq j$.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nous définirons pareillement les intervalles $\Delta^2_{i\gamma}$ en prenant, en outre, soin que $\Delta^1_{i\alpha} \neq \Delta^2_{j\gamma}$ pour $i \neq j$. Nous posons

$$\omega^1_\alpha = \sum_i \Delta^1_{i\alpha}, \qquad \omega^2_\alpha = \sum_j \Delta^2_{j\alpha}, \ldots.$$

[1]) Un tel ensemble P existe. Il est homéomorphe de l'ensemble parfait discontinu de Cantor.

Il suffit de poser $\Omega_\alpha = \sum_{\nu/1}^{\infty} \omega_\alpha^\nu$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$.

En rapprochant les Lemmes 4 et 5 nous obtenons immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2. Il existe un groupe de transformations (5,1) jouissant des propriétés indiquées dans le Théorème 1, un groupe qui dépend de quatre paramètres essentiels dans *tout voisinage* de *chaque* point ξ^* appartenant à un ensemble P possédant la mesure positive de Lebesgue.

Quelques démonstrations uniformes pour tous les cas du théorème de l'Hôpital. Généralisations

Pewne jednolite dowody twierdzenia L'Hôpitala

Par

T. WAŻEWSKI (Cracovie)

Le théorème classique de l'Hôpital relatif aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies dans un intervalle ouvert Δ dont une des extrémités est égale à c se répartit en plusieurs cas.

D'abord le symbole

$$\frac{\lim\limits_{x/c} f(x)}{\lim\limits_{x/c} g(x)}$$

peut prendre une des cinq formes

$$\frac{0}{0},\ \frac{+\infty}{+\infty},\ \frac{-\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty},\ \frac{+\infty}{-\infty}.$$

Ensuite c peut constituer l'extrémité droite ou gauche de Δ (deux cas) et c peut être fini ou infini (deux cas). Enfin la

$$\lim_{x/c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

peut être finie, égale à $+\infty$ on à $-\infty$ (trois cas). Cette classification comprend en somme $5 . 2 . 2 . 3 = 60$ cas différents.

On peut réduire certains de ces cas à quelques cas particuliers dont chacun exige ensuite une démonstration à part. Cette façon de procéder exige trop de temps en comparaison avec sa valeur instructive. C'est