Deux intégrales (9′) sont donc évidemment continues si le point M traverse la surface S, c. à d. on a

$$\lim_{M\to P_0} W(M,t) = W(P_0,t) = U(M_0,t) - \iint_S \frac{\mu(P,t)}{r_0^2}\cos\varphi_0 \, . \, d\sigma_P .$$

Mais on sait bien qu'on a

$$\lim_{M\to P_0}\iint_S \frac{\mu(P,t)}{r^2}\cos\varphi \, . \, d\sigma = \iint_S \frac{\mu(P,t)}{r_0^2}\cos\varphi_0 \, d\sigma \pm 2\pi\mu(P_0,t)$$

où le signe supérieure $+$ concerne la valeur limite intérieure à la surface S. Nous avons donc la discontinuité suivante du potentiel retardé de double couche:

$$\lim_{M\to P_0}\iint_S \frac{d}{dn}\left[\frac{\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right] d\sigma_P = \iint_S \frac{d}{dn}\left[\frac{\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]_{r_0} d\sigma_P \pm 2\pi\mu(P_0,t).$$

Varsovie, décembre 1947.

Surface d'ordre 6 ayant une courbe gauche double d'ordre 6 et de genre 3

Powierzchnia rzędu szóstego z krzywą skośną podwójną rzędu szóstego i rodzaju trzeciego

Par

ANTONI PLAMITZER (Kraków)

Dans le traité présent j'établis les méthodes d'engendrement projectif d'une surface curviligne Ψ^6 d'ordre 6, ayant une courbe gauche double R_3^6 d'ordre 6 et de genre 3. À cet effet je prends dans trois espaces collinéaires, qui n'appartiennent pas au même faisceau, des surfaces homologues du second degré comme bases pour trois gerbes collinéaires. Je démontre que les triplets des plans homologues de ces gerbes se coupent aux points de la surface étudiée Ψ^6. La courbe double R_3^6 de cette surface est le lieu géométrique des points d'intersection des triplets de droites homologues de ces trois espaces collinéaires. On sait, que les deux de ces trois gerbes collinéaires déterminent la congruence (2,6) du second ordre, de la sixième classe et de la seconde espèce. Parmi les droites de cette congruence et les plans de la troisième gerbe j'établis la correspondance (1,1), et les points d'intersection des éléments homologues de cette correspondance biunivoque sont les points de la surface étudiée Ψ^6. Pour trois congruences je construis 12 droites communes et je montre, qu'elles sont les trisécantes de la courbe R_3^6 et qu'elles sont situées sur la surface Ψ^6. Je donne une généralisation des méthodes projectives mentionnées ci dessus d'engendrement de la surface Ψ^6 en utilisant un faisceau d'espaces collinéaires. Ensuite j'examine les courbes gauches unicursales des ordres supérieurs, situées sur la surface Ψ^6. A l'aide des faisceaux projectifs des plans, dont les bases sont — dans les trois espaces collinéaires — les cônes homologues circonscrits à ces surfaces du second degré, je construis les ensembles ∞^3 des courbes d'ordre 6, les gerbes (∞^2) des courbes d'ordre 5 et 66 faisceaux (∞^1) des courbes d'ordre 4, ainsi que 220 courbes d'ordre 3. Prenant les génératrices homologues des surfaces du second degré comme axes des faisceaux projectifs des plans, je construis deux systèmes (∞^1) de lignes gauches d'ordre 3 sur la surface Ψ^6 et deux groupes à 12 coniques. Je cherche les points d'intersection parmi les 12 droites de la surface Ψ^6, la courbe double R_3^6 et d'autres courbes envisagées. J'étudie aussi les sections planes de la surface Ψ^6. Je construis enfin deux transformations planes de la surface Ψ^6.

1. Notations. Étant donnés trois espaces quelconques Σ_i, Σ_k et Σ_l, où $i \neq k \neq l$; $i=1,2,3$; $k=1,2,3$; $l=1,2,3$, j'établis *les collinéations générales*

$$\Sigma_i \varkappa \Sigma_k \varkappa \Sigma_l \tag{1}$$

et je suppose, que ces espaces collinéaires n'appartiennent pas au même *faisceau* [1]) d'espaces collinéaires. Soient les plans $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l; \ldots$, les points $B_i, B_k, B_l; \ldots$ et les droites $c_i, c_k, c_l; \ldots$ les éléments homologues de ces espaces collinéaires. Les deux espaces $\Sigma_i \varkappa \Sigma_k$, citées au (1), possèdent le tétraèdre coïncidant, dont chaque sommet S_{ik} est le point coïncidant de ces espaces.

Dans l'espace Σ_i prenons une quadrique reglée non développable Ω_i^2, qui *ne passe pas par les sommets* S_{ik} *du tétraèdre* Θ_{ik} et *qui n'est tangente à aucun des plans de ce tétraèdre*. Si nous désignons par le symbole (Ω_i^2) ou $\Omega_i^2(\alpha_i, \beta_i, \ldots)$ *la gerbe du second degré,* dont la base est la quadrique Ω_i^2 et les éléments sont les plans tangents $\alpha_i, \beta_i, \ldots$ à cette quadrique — de la relation (1) derivent directement *les collinéations générales* entre les trois gerbes des plans du second degré:

$$(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2) \varkappa (\Omega_l^2). \tag{2}$$

[1]) Th. Reye dans son traité: Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel u. collinearer Bündel oder Räume. I., — Journal für Mathematik, Bd. 104. Berlin 1889, S. 218. — appelle *le faisceau d'espaces collinéaires* $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$ l'ensemble des espaces collinéaires, ayant la propriété suivant, que chaque plan α d'espace Σ et les plans homologues $\alpha', \alpha'', \ldots$ des espaces $\Sigma', \Sigma'', \ldots$, forment un faisceau de plans.

Nous pouvons aussi écrire cette relation sous la forme:

$$\Omega_i^2(\alpha_i, \beta_i, \ldots) \varkappa \Omega_k^2(\alpha_k, \beta_k, \ldots) \varkappa \Omega_l^2(\alpha_l, \beta_l, \ldots). \tag{2a}$$

D'un point quelconque C_i de l'espace Σ_i, n'appartenant pas à la quadrique Ω_i^2, déterminons un cône circonscrit Γ_i^2 à cette quadrique. Les plans $\alpha_i, \ldots$ de la gerbe (Ω_i^2), passant par le point C_i, formeront un faisceau de plans $\Gamma_i^2(\alpha_i, \ldots)$, dont la base sera le cône Γ_i^2. Des relations (1) et (2) il résulte directement la projectivité:

$$\Gamma_i^2(\alpha_i, \ldots) \barwedge \Gamma_k^2(\alpha_k, \ldots) \barwedge \Gamma_l^2(\alpha_l, \ldots). \tag{3}$$

Si t_i et v_i sont les génératrices concourantes de la quadrique Ω_i^2, tous les plans différents des faisceaux $t_i(\alpha_i, \ldots)$ et $v_i(\beta_i, \ldots)$ sont les éléments de la gerbe (Ω_i^2). Des relations (1) et (2) résultent les projectivités:

$$t_i(\alpha_i, \ldots) \barwedge t_k(\alpha_k, \ldots) \barwedge t_l(\alpha_l, \ldots) \tag{4}$$

$$v_i(\beta_i, \ldots) \barwedge v_k(\beta_k, \ldots) \barwedge v_l(\beta_l, \ldots). \tag{5}$$

2. Congruences des droites K_{ik}. L'ensemble des droites d'intersection $a_{ik} = \alpha_i \alpha_k$, $b_{ik} = \beta_i \beta_k, \ldots$ des plans homologues α_i et α_k, β_i et $\beta_k, \ldots$ des gerbes collinéaires $(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2)$, *citées* au (2), formera [2]) la congruence (2, 6) du second ordre, de la sixième classe et de la seconde espèce. Dans cette congruence K_{ik} chaque sommet S_{ik} du tétraèdre coïncident Θ_{ik} est (voir N⁰ 1) le point singulier du degré 4, et chaque arête de ce tétraèdre est une droite double. Dans les espaces collinéaires $\Sigma_i \varkappa \Sigma_l$ il y a, comme nous savons, sur les quadriques Ω_i^2 et Ω_k^2 quatre couples de génératrices concourantes t_i et t_k, et quatre couples génératrices concourantes v_i et v_k, qui se coupent respect. en les points $T_{ik} = t_i t_k$ et $V_{ik} = v_i v_k$. Ces points sont les points singuliers du second degré de la congruence K_{ik}. Prenons comme sommets des trois faisceaux des plans, satisfaisant la relation (3) du N⁰ 1, le point singulier S_{ik} de la congruence K_{ik}, qui est le point coïncident $S_i = S_k$ des espaces collinéaires $\Sigma_i \varkappa \Sigma_k$, et le point homologue S_l de l'espace Σ_l. Soient les plans ε_l et φ_l du faisceau (Γ_l^2), passant par le point S_{ik}; les éléments homologues ε_i et φ_i, respect. ε_k et φ_k apartiennent aux faisceaux (Γ_i^2), relativement (Γ_k^2). Par ce point S_{ik} passent donc *deux* triplets de plans homologues $\varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l$ et $\varphi_i \varphi_k \varphi_l$ des gerbes au (2) et de même des espaces collinéaires au (1).

[2]) Th. Reye, Journal für Mathematik, Bd. 93, S. 81. — voir aussi: R. Sturm, Die Gebilde ersten u. zweiten Grades der Liniengeometrie in synthet. Behandlung, II Teil, Leipzig 1893, Nr. 463.

Prenons comme axes des faisceaux au (4) les droites t_i, t_k, t_l, où t_i et t_k se coupent en un point singulier $T_{ik}=t_i t_k$ de la congruence K_{ik}. Au plan $\delta_l = t_i T_{ik}$ du faisceau (t_l) faisons correspondre dans les faisceaux $(t_i)\barwedge(t_k)$ les plans δ_i et δ_k. Par le point singulier T_{ik} de la congruence K_{ik} passe donc *un* triplet de plans homologues $\delta_i\delta_k\delta_l$ des gerbes, qui satisfont à la relation (2) du N⁰ 1. On a donc:

Par chaque point singulier du quatrième degré S_{ik} de la congruence K_{ik} d'ordre 2, *de la classe* 6 *et de l'espèce* II, *qui est engendrée par les deux gerbes collinéaires* $(\Omega_i^2)\barwedge(\Omega_k^2)$, *citées à la relation* (2) *du* N⁰ 1, *passent deux triplets de plans homologues des gerbes* $(\Omega_i^2)\barwedge(\Omega_k^2)\barwedge(\Omega_l^2)$.

Par chaque point singulier du second degré T_{ik} ou V_{ik} de la congruence K_{ik} passe un triplet de plans homologues des gerbes collinéaire au (2).

3. Courbe gauche R_3^6. Puisque par le point S_{ik} passent (N⁰ 2) deux triplets de plans homologues $\varepsilon_i\varepsilon_k\varepsilon_l$ et $\varphi_i\varphi_k\varphi_l$ des gerbes citées au (2), en le point S_{ik} se coupent trois droites homologues $h_i=\varepsilon_i\varphi_i$, $h_k=\varepsilon_k\varphi_k$ et $h_l=\varepsilon_l\varphi_l$ des espaces, satisfaisant la relation (1) du N⁰ 1.

Ces espaces collinéaires possèdent toute une classe de tels triplets de droites homologues $h_i h_k h_l,\ldots$, que chaque triplet coupe en un point $H=h_i h_k h_l,\ldots$ et l'ensemble des points $H,\ldots$ ainsi obtenus appartient [3] à la courbe gauche R_3^6 d'ordre 6 et de genre 3. Si $H=h_i h_k h_l$ est un point quelconque de la courbe R_3^6, alors par h_i passent deux plans tangents α_i et β_i à la quadrique Ω_i^2. Les plans homologues des espaces collinéaires $\Sigma_k\barwedge\Sigma_l$ sont respectivement aussi les plans tangents aux quadriques Ω_k^2 et Ω_l^2, et se coupent suivant les droites $h_k=\alpha_k\beta_k$, $h_l=\alpha_l\beta_l$. Par le point H passent donc deux triplets de plans homologues $\alpha_i\alpha_k\alpha_l$ et $\beta_i\beta_k\beta_l$, qui remplissent la relation (2) du N⁰ 1. On a donc:

Sur la courbe gauche R_3^6 d'ordre 6 *et de genre* 3, qui est le lieu géométrique des points d'intersection des triplets de droites homologues des trois espaces collinéaires $\Sigma_i\barwedge\Sigma_k\barwedge\Sigma_l$, *sont situés tous les points singuliers d'ordre* 4 $S_{ik},\ldots$ *des trois congruences étudiées* K_{ik}, K_{il} et K_{kl}.

Par chaque point de la courbe gauche R_3^6 passent deux triplets de plans homologues des gerbes collinéaires $(\Omega_i^2)\barwedge(\Omega_k^2)\barwedge(\Omega_l^2)$.

4. Droites communes des trois congruences K_{ik}. Pour construire ces droites j'établis la correspondance auxiliaire parmi les plans de la gerbe p. ex. (Ω_i^2). A chaque plan α_i de cette gerbe faisons correspondre (voir la rel. (2) du N⁰ 1) dans les gerbes collinéaires $(\Omega_k^2)\barwedge(\Omega_l^2)$ les plans

[3]) F. Schur, Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven u. Flächen, Mathem. Annalen, Bd. 18, 1881, S. 16.

α_k et α_l, qui se coupent suivant la droite $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l$ de la congruence K_{kl}. Faisons correspondre les plans tangents μ_i et μ_i' à la quadrique Ω_i^2, qui passe par la droite a_{kl}, à l'élément α_i. Au plan p. ex. μ_i sont afférentes 6 droites $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l$, $a_{kl}'=\alpha_k'\alpha_l',\ldots$ de la congruence K_{kl} de la classe 6. Faisons correspondre les plans homologues $\alpha_i,\alpha_i',\ldots$ de la gerbe (Ω_i^2) à l'élément μ_i. Dans la correspondance (6, 2) construite de cette manière parmi les plans $\alpha_i,\beta_i,\ldots$ et $\mu_i,\nu_i,\ldots$ de la gerbe (Ω_i^2) chaque élément coïncident $\alpha_i=\mu_i$ passe par la droite $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l$. Cette droite $a_{kl}=\alpha_i\alpha_k\alpha_l$ réalise alors les conditions $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l=\alpha_i\alpha_k=\alpha_i\alpha_l=a_{ik}=a_{il}$ et elle est commune pour trois congruences K_{ik}, K_{kl} et K_{li}.

Pour obtenir le nombre de plans coïncidents de cette correspondance (6, 2), observons deux génératrices concourantes quelconques t_i et v_i de la quadrique Ω_i^2. Faisons correspondre aux faisceaux des plans $t_i(\alpha_i,\ldots)$ et $v_i(\beta_i,\ldots)$ — conformément aux relations (4) et (5) du N⁰ 1 — les faisceaux projectifs des plans $t_k(\alpha_k,\ldots)\barwedge t_l(\alpha_l,\ldots)$, respect. $v_k(\beta_k,\ldots)\barwedge\barwedge v_l(\beta_l,\ldots)$, qui engendrent les quadriques Γ^2 et Δ^2. Les droites $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l,\ldots$ et $b_{kl}=\beta_k\beta_l,\ldots$ sont respec. génératrices de ces quadriques. Supposons que la droite v_i coupe deux génératrices a_{kl}, a_{kl}' de la quadrique Γ^2, et la droite t_i coupe deux génératrices b_{kl}, b_{kl}' de la quadrique Δ^2. Vu que les plans $\mu_i=v_i a_{kl}$ et $\mu_i'=v_i a_{kl}'$, ainsi que $\nu_i=t_i b_{kl}$ et $\nu_i'=t_i b_{kl}'$ sont évidemment les plans tangents à la quadrique Ω_i^2, la correspondance étudiée (6, 2) possède:

a) *deux couples* de plans homologues α_i et μ_i, α_i' et μ_i' tels, que les éléments α_i et α_i' passent par la génératrice t_i, et les plans μ_i et μ_i' par la génératrice v_i;

b) *deux couples* de plans hemologues β_i et ν_i, β_i' et ν_i' tels, que les éléments β_i et β_i' passent par la génératrice v_i, et les plans ν_i et ν_i' par la génératrice t_i. Conformément au principe [4]) de la correspondance de *Zeuthen* pour la quadrique, la correspondance étudiée (6, 2) possède $6+2+2+2=12$ plans coïncidents $\alpha_i=\mu_i,\ldots$.

Nous pouvons déterminer le nombre de ces 12 plans coïncidents de cette manière. Supposons que dans la correspondance (6, 2) aux plans différents $\alpha_i,\ldots$ du faisceau (t_i) les plans $\mu_i,\ldots$, qui passent par les génératrices $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l,\ldots$ de la quadrique Γ^2, sont homologues. Ces plans $\mu_i=\nu_i a_{kl},\ldots$ sont naturellement en même temps les plans tangents aux quadriques Ω_i^2 et Γ^2, alors ils engendreront une surface développable de la quatrième classe Φ^4. Transformons les plans différents $\alpha_i,\ldots$ et $\mu_i,\ldots$

[4]) H. G. Zeuthen, Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Mathematische Annalen, Bd. 18, 1881, p. 37.

de la gerbe (Ω_i^2) en un plan λ_i de cette gerbe tel, qu'il ne soit pas le plan tangent à la quadrique Γ^2. Supposons que λ_i coupe les plans α_i, $\mu_i, \dots$ suivant les droites $a_i = \lambda_i \alpha_i$, $m_i = \lambda_i \mu_i, \dots$ et la quadrique Ω_i^2 en les génératrices t_i^* et v_i^*. Parmi les plans $\alpha_i, \mu_i, \dots$ de la gerbe (Ω_i^2) et les droites $a_i, m_i, \dots$ du système plan (λ_i) une transformation $(1, 1)$ telle a lieu, où le plan λ_i et les génératrices t_i^*, v_i^* de la quadrique Ω_i^2, qui sont afférentes au plan λ_i, sont *les éléments principaux* de cette correspondance biunivoque. En effet toutes les droites du système (λ_i) correspondent à l'élément λ_i de la gerbe (Ω_i^2); et aux droites t_i^* et v_i^* du système plan (λ_i) correspondent respect. les faisceaux des plans (t_i^*) et (v_i^*) dans la gerbe (Ω_i^2). Les plans différents du faisceau $t_i(\alpha_i, \dots)$ se transforment en un faisceau de droites $T_i(a_i, \dots)$ ayant pour sommet le point $T_i = t_i \lambda_i$.

Puisque par le point quelconque Q_i du système plan (λ_i) passent quatre plans tangents $\mu_i, \dots$ à la surface développable de la quatrième classe Φ^4 et quatres droites $m_i = \lambda_i \mu_i, \dots$ du système (λ_i), donc lès plans différents $\mu_i, \dots$ de la surface Φ^4 se transforment en droites tangentes $m_i, \dots$ à la courbe de la quatrième classe F^4. De la correspondance $(6, 2)$ précédemment construite parmi les plans $\alpha_i, \dots$ et $\mu_i, \dots$ de la gerbe (Ω_i^2), il résulte — en vertu de la transformation $(1, 1)$ — directement au système plan (λ_i) une telle correspondance $(6, 2)$ parmi les droites $a_i, \dots$ et $m_i, \dots$, où à un faisceau quelconque de droites $T_i(a_i, \dots)$ correspond le faisceau $F^4(m_i, \dots)$ de droites tangentes $m_i, \dots$ à la courbe F^4 de la classe 4. Cette correspondance est [5]) d'ordre 4 et a $6+2+4=12$ droites coïncidentes $a_i = m_i, \dots$. Comme à chaque droite $a_i = m_i$ du système (λ_i) correspond dans la gerbe (Ω_i^2) un seul plan $\alpha_i = \mu_i$, qui est l'élement coïncident, nous avons démontré que: cette correspondance $(6, 2)$ construite entre les plans $\alpha_i, \dots$ et $\mu_i, \dots$ a 12 plans coïncidents $\alpha_i = \mu_i, \dots$.

Les considérations de ce numéro montrent, que l'élément $\alpha_i = \mu_i$ passe par la droite $a_{kl} = \alpha_k \alpha_l$. La droite $a_{kl} = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ est donc la droite commune $a_{ik} = \alpha_i \alpha_k = a_{kl} = \alpha_k \alpha_l = a_{il} = \alpha_i \alpha_l$ des congruences K_{ik}, K_{kl} et K_{li}. On a donc:

Les congruences étudiées K_{ik}, K_{kl} et K_{il} d'ordre 2, de la classe 6 et d'espèces II ont 12 droites communes.

Par chacune de ces droites $a_{ik} = a_{kl} = a_{il}$ passe un triplet de plans homologues $\alpha_i \alpha_k \alpha_l$ des gerbes (Ω_i), où $i = 1, 2, 3$. Si nous introduisons de nouvelles notations nous pourrons formuler ce théorème de la manière suivante:

---

[5]) R. Sturm, l. c. 2), I. Teil, Nr. 32.

Dans les gerbes collinéaires $(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2) \varkappa (\Omega_l^2)$, qui satisfons à la relation (2) du N⁰ 1, *il y a* 12 *triplets de plans homologues* σ_i^ι, σ_k^ι et σ_l^ι, *où* $\iota = 1, 2, \dots, 12$, tels, *que chaque triplet se coupe suivant une droite* $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$.

5. Suite des propriétés des gerbes (Ω_i^2). Nous démontrerons la justesse du théorème: *Etant données trois gerbes* $(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2) \varkappa (\Omega_l^2)$, satisfaisant la relation (2) du N⁰ 1, *sur chaque droite p il y a six points tels, que par chacun d'eux passent trois plans homologues de ces gerbes.*

D'un point quelconque C_i de la droite p circonscrivons un cône Γ_i^2 à la quadrique Ω_i^2. Au faisceau des plans $\Gamma^2(\alpha_i, \dots)$ sont correspondants — voir la relation (3) du N⁰ 1 — deux faisceaux de plans $\Gamma_k^2(\alpha_k, \dots) \barwedge \Gamma_l^2(\alpha_l, \dots)$. Ces faisceaux, comme on sait, engendrent une surface gauche Γ^4 de degré 4, ayant une courbe gauche double d'ordre 3, dont les génératrices $a_{kl} = \alpha_k \alpha_l, \dots$ sont les bisécantes de cette courbe et appartiennent à la congruence K_{kl} d'ordre 2. Au point admis C_i nous faisons correspondre quatre points de rencontre C' de la droite p et de la surface Γ^4. Par chacun de ces points C' passent deux droites $a_{kl} = \alpha_k a_l$ et $b_{kl} = \beta_k \beta_l$ de la congruence K_{kl}. Les plans homologues α_i et β_i de la gerbe (Ω_i^2) coupent la droite p en deux points C_i, que nous faisons correspondre au point C'. De la correspondance $(2, 4)$, construite de cette manière, entre les points $C_i, \dots$ et $C', \dots$ de la droite p, il resulte, que par chacun des $2+4=6$ points coïncidents $C_i = C'$ de cette correspondance passe un triplet de plans homologues $\alpha_i \alpha_k \alpha_l$ des gerbes étudiées $(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2) \varkappa (\Omega_l^2)$. C. Q. F. D.

Supposons maintenant, que la droite p passe par un point quelconque H de la courbe gauche R_3^6, où (N⁰ 3) se coupent deux triplets de plans homologues $\varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l$ et $\varphi_i \varphi_k \varphi_l$ des gerbes (Ω_i^2). Si nous prenons le point H comme sommet C_i du faisceau $\Gamma_i^2(\alpha_i, \varepsilon_i, \varphi_i, \dots)$, les faisceaux homologues $\Gamma_k^2(\alpha_k, \varepsilon_k, \varphi_k, \dots) \barwedge \Gamma_l^2, (\alpha_l, \varepsilon_l, \varphi_l, \dots)$ engendreront la surface gauche Γ^4, dont deux génératrices $e_{kl} = \varepsilon_k \varepsilon_l$ et $f_{kl} = \varphi_k \varphi_l$ passent par le point H. Au point $H = C_i$ correspondent quatre points de rencontre C' de la droite p et de la surface gauche Γ^4, et deux de ces points $p\, e_{kl}$ et $p\, f_{kl}$ coïncident avec le point H. Outre cela cette détermination de la correspondance $(2, 4)$ entre les points de la droite p ne subit aucun changement. Sur la base p il y a de même dans ce cas 6 points coïncidents $C_i = C'$, mais deux de ces points $p\, e_{kl} = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l$ et $p\, f_{kl} = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$ sont coïncidents en le point H. On a donc:

Sur chaque droite p qui passe par un point quelconque H de la courbe gauche R_3^6 se trouvent 6 points tels que par chacun d'eux passe *un triplet de plans homologues des trois gerbes collinéaires* (Ω_i^2), $i=1, 2, 3$, *et deux de ces* 6 *points coïncident avec le point* H.

6. **Propriétés des droites de la congruence** K_{ik}. Considérons une droite quelconque $z_{ik}=\zeta_i\zeta_k$ de la congruence K_{ik} comme une droite p, et établissons, comme nous avons dit dans le N⁰ 5, une correspondance entre les points $C_i, \ldots$ et $C', \ldots$ de cette droite $p=z_{ik}$. Nous remarquons, que tous les faisceaux auxiliaires (Γ_i^2) ont un plan commun ζ_i, et les faisceaux (Γ_k^2), respectiv. (Γ_l^2) ont un plan commun ζ_k respect. ζ_l, et les surfaces gauches $\Gamma^4 \ldots$ ont une génératrice commune $z_{kl}=\zeta_k\zeta_l$. Après avoir éliminé le point fixe $C'=Z=p\,z_{kl}=z_{ik}\,z_{kl}=\zeta_i\zeta_k\zeta_l$, nous obttiedrons (N⁰ 5) une correspondance (2, 3) entre les points $C_i, \ldots$ et $C', \ldots$ de la droite $p=z_{ik}$, qui a $2+3=5$ points coïncidents $C_i=C', \ldots$. Par chacun de ces 5 points et par le point Z passe un triplet de plans homologues des gerbes collinéaires (Ω_i), $i=1, 2, 3$. Donc: *le premier théorème du* N⁰ 5 *s'applique* de même *à chaque droite quelconque* $z_{ik}=\zeta_i\zeta_k$ *de la congruence* K_{ik}.

Nous obtiendrons le même résultat de la manière suivante: A la droite $z_{ik}=\zeta_i\zeta_k$, considérée comme un élément e_i de l'espace Σ_i (la relation 1 du N⁰ 1), respect. comme un élément f_k de l'espace Σ_k, faisons correspondre dans ces espaces collinéaires $\Sigma_k \varkappa \Sigma_i$ relativ. la droite e_k, qui est afférente au plan ζ_k, respect. la droite f_i, qui est efférente au plan ζ_i. Si à un point quelconque C de la droite z_{ik}, considéré comme point $C=A_i=B_k$, sont correspondants dans ces espaces le point A_k sur la droite e_k et le point B_i sur la droite f_i, alors par les droites homologues $c_i=A_iB_i$ et $c_k=A_kB_k$ passent respectivement les plans tangents ζ_i et γ_i à la quadrique Ω_i^2, relativ. ζ_k et γ_k à la quadrique Ω_k^2. Par ce point C de la droite $z_{ik}=\zeta_i\zeta_k$ passe donc encore une droite $c_{ik}=\gamma_i\gamma_k$ de la congruence du second degré K_{ik}. Mais $C=A_i=B_k$, alors nous pouvons considérer les droites $c_i=A_iB_i$ et $c_k=A_kB_k$ comme droites $c_i=B_kB_i$ et $c_k=A_kA_i$, où les points B_i et B_k sont les élément homologues des séries projectives $(f_i)\,\overline{\wedge}\,(f_k)$, et les points A_i et A_k sont les éléments homologues des séries $(e_i)\,\overline{\wedge}\,(e_k)$. Ces séries engendrent deux coniques homologues C_i^2 et C_k^2 des espaces $\Sigma_i \varkappa \Sigma_k$. L'ensemble des plans $\gamma_i, \ldots$, qui passent par les tangentes différentes $c_i=A_iB_i=B_kB_i, \ldots$ de la conique C_i^2 et sont les plans tangents à la quadrique Ω_i^2, formera dans l'espace Σ_i, comme nous le savons, une surface développable de la quatrième classe Γ_i^4, ayant un plan doublement-tangent ζ_i. A la surface Γ_i^4 correspond dans l'espace Σ_k une surface développable de la quatrième classe Γ_k^4, ayant un plan doublement-tangent ζ_k, dont les plans différents $\gamma_k, \ldots$

passent par les tangentes $c_k=A_kB_k=A_kA_i$ de la conique C_k^2 et sont les plans tangents à la quadrique Ω_k^2. De la relation (1) du N⁰ 1 nous déduirons qu'aux surfaces Γ_i^2 et Γ_k^4 correspondent de même dans l'espace Σ_l la surface développable de la quatrième classe Γ_l^4, ayant le plan doublement-tangent ζ_l, dont les plans sont les éléments tangents $\gamma_l, \ldots$ à la quadrique Ω_l^2.

Il résulte de nos considérations que par un point quelconque $C=A_i=B_k$ de la droite $z_{ik}=\zeta_i\zeta_k$ passe encore une droite $c_{ik}=\gamma_i\gamma_k$ de la congruence K_{ik}. Aux éléments γ_i et γ_k correspond dans la gerbe (Ω_l^2) le plan γ_l, qui coupe la droite z_{ik} en le point C', et la droite c_{ik} en le point $c_{ik}\gamma_l=\gamma_i\gamma_k\gamma_l$. Si C et C' coïncident en le point $C=C'$, par ce point passe un triplet de plans homologues γ_i, γ_k et γ_l. Pour déterminer ces points sur la droite z_{ik} il faut construire une correspondance auxiliaire. Puisque par C passe une seule droite $c_{ik}=\gamma_i\gamma_k$, alors au point C nous pouvons faire correspondre un seul point $C'=z_{ik}\gamma_l$. Par C' passent 4 plans tangents $\zeta_l, \ldots$ à la surface développable Γ_l^4. Les plans homologues $\gamma_i, \ldots$ (respect. $\gamma_k, \ldots$) sont les plans tangents à surface développable Γ_i^4 (respect. Γ_k^4) et coupent la droite z_{ik} en quatre points $C, \ldots$ que nous faisons correspondre au point C'. La correspondance (4, 1) construite de cette manière a $4+1=5$ points coïncidents $C=C', \ldots$. Ces points et le sixième point $Z=z_{ik}\zeta_l=\zeta_i\zeta_k\zeta_l$ possèdent cette propriété que par chacun d'eux passe un triplet de plans homologues des gerbes collinéaires $(\Omega_i^2)\varkappa(\Omega_k^2)\varkappa(\Omega_l^2)$. Donc la droite quelconque $z_{ik}=\zeta_i\zeta_k$ de la congruence K_{ik} possède cette propriété, c. q. f. d.

Au lieu de la droite $z_{ik}=\zeta_i\zeta_k$ considérons (voir N⁰ 4) la droite $s^\iota=\sigma_i^\iota\sigma_k^\iota\sigma_l^\iota$, $\iota=1, 2, \ldots, 12$. De cette manière nous pouvons construire les surfaces homologues développable de la quatrième classe Γ_i^4, Γ_k^4 et Γ_l^4, dont les plans σ_i^ι, σ_k^ι et σ_l^ι sont respectiv. les plans doublement-tangents. Par le point quelconque C de la droite s^ι passe encore une droite $c_{ik}=\gamma_i\gamma_k$ de la congruence du second ordre K_{ik}. Au point C nous faisons correspondre le point $C'=s^\iota\gamma_l$. Mais par C' passent un plan doublement-tangent σ_l^ι et deux plans suivants tangents γ_l à la surface Γ_l^4. Deux plans homologues tangents γ_i à la surface Γ_i^4 (respectiv. γ_k à la surface Γ_k^4) coupent la droite s^ι en deux points C, que nous faisons correspondre au point C'. Dans la correspondance (2, 1) construite de cette manière entre le points $C, \ldots$ et $C', \ldots$ de la droite $s^\iota=\sigma_i^\iota\sigma_k^\iota\sigma_l^\iota$ par chacun de ses $2+1=3$ points coïncidents $C=C'$ passent deux triplets de plans homologues $\sigma_i^\iota\sigma_k^\iota\sigma_l^\iota$ et $\gamma_i\gamma_k\gamma_l$. Par chaque point coïncident passent donc trois droites homologues $h_i=\gamma_i\sigma_i^\iota$, $h_k=\gamma_k\sigma_k^\iota$ et $h_l=\gamma_l\sigma_l^\iota$ des espaces collinéaires $\Sigma_i \barwedge \Sigma_k \barwedge \Sigma_l$. L'élément $C=C'$ appartient alors (N⁰ 3) à la courbe gauche R_3^6, et la droite s^ι est la trisécante de cette courbe. Nous avons démontré (voir N⁰ 4) la justesse du théorème:

Chaque droite $s^\iota=\sigma_i^\iota\sigma_k^\iota\sigma_l^\iota$, *où* $\iota=1,2,\ldots,12$, *est la trisécante de la courbe gauche* R_3^6 *d'ordre* 6 *et de genre* 3.

7. Surface Ψ^6 ayant la courbe gauche double R_3^6. L'ensemble des points d'intersection $A=\alpha_i\alpha_k\alpha_l$, $B=\beta_i\beta_k\beta_l,\ldots$ des différents triplets de plans homologues des trois gerbes collinéaires

$$\Omega_i^2(\alpha_i,\beta_i,\ldots)\barwedge\Omega_k^2(\alpha_k,\beta_k,\ldots)\barwedge\Omega_l^2(\alpha_l,\beta_l,\ldots) \tag{2a}$$

satisfaisant la relation (2a) du N⁰ 1, appartient à une certaine surface curviligne. Cette surface est *d'ordre* 6, car sur une droite quelconque p sont situés (voir N⁰ 5 et N⁰ 6) les six points, dont chacun est le point d'intersection des trois plans homologues des gerbes étudiés au (2a), et est ainsi un point de cette surface Ψ^6. Comme il résulte du dernier théorème du N⁰ 5, que pour chaque droite p, qui passe par un point quelconque H de la ligne gauche R_3^6, *deux points* de ces six points de rencontre de la droite p et de la surface Ψ^6 *coïncident* en le point H, le point H est donc *le point double* de la surface Ψ^6 et R_3^6 *est la courbe gauche double* de cette surface Ψ^6. On a donc:

Les triplets différents des plans homologues des trois gerbes collinéaires (Ω_i^2), $i=1,2,3$, remplissant la relation (2) du N⁰ 1, *se coupent en les points de la surface curviligne de sixième ordre* Ψ^6.

La courbe gauche R_3^6 *d'ordre* 6 *et de genre* 3, qui est le lieu géométrique des points d'intersection des triplets de droites homologues des trois espaces collinéaires Σ_i, $i=1,2,3$, satisfaisant la relation (1) du N⁰ 1, *est une courbe double de la surface* Ψ^6.

Des considérations du N⁰ 2 et du N⁰ 3 nous voyons que:

Chaque point singulier du quatrième degré S_{ik} *de la congruence* K_{ik}, situé sur la courbe gauche R_3^6, *est le point double de la surface* Ψ^6, *et chaque point singulier du second degré* T_{ik} *et* V_{ik} *de la congruence* K_{ik} *est le point simple de la surface* Ψ^6.

Puisque chaque point de la droite $s^\iota=\sigma_i^\iota\sigma_k^\iota\sigma_l^\iota$, $\iota=1,2,\ldots,12$, (voir N⁰ 4) par lequel passent trois plans homologues $\sigma_i^\iota,\sigma_k^\iota,\sigma_l^\iota$ des gerbes (2a) est le point de la surface étudiée Ψ^6, la droite s^ι est donc située sur cette surface. Prenant en considération le dernier théorème du N⁰ 6, nous constatons que:

La surface Ψ^6 *possède* 12 *droites qui sont les trisécantes de la courbe double* R_3^6 *de cette surface. Chacune de cettes droites* $s^\iota=\sigma_i^\iota\sigma_k^\iota\sigma_l^\iota$, $\iota=1,2,\ldots,12$, *est l'arête d'intersection des triplets de plans homologues* σ_i^ι, σ_k^ι et σ_l^ι *des gerbes collinéaires* (Ω_i^2), $i=1,2,3$, remplissant la relation (2) du N⁰ 1.

Nour pouvons démontrer la justesse de ce théorème de la manière suivante: On sait [6]) que l'ensemble des droites trisécantes de la ligne gauche R_3^6 engendre une surface gauche du huitième ordre Λ^8, pour laquelle R_3^6 est la courbe triple. Le plan quelconque ε coupe les surfaces Λ^8 et Ψ^6 respectiv. suivant la ligne du huitième ordre L^8 et la ligne du sixième ordre P^6. Le plan ε coupe la courbe gauche R_3^6 en six point $A,\ldots$, dont chacun est le point triple pour L^8 et le point double pour P^6. Les sections planes L^8 et P^6 ont 48 points de rencontre et nous considérons chacun des six point A comme $3.2=6$ points d'intersection. Par chacun des $48-36=12$ autres points de rencontre $B,\ldots$ des sections planes L^8 et P^6 passe une génératrice s^ι de la surface gauche Λ^8. La droite s^ι est alors *la trisécante* de la courbe gauche R_3^6 et a avec la surface Ψ^6 outre le point B encore 3 autres points communs, dont chacun est situé sur la ligne gauche double R_3^6 et est considéré comme 2 points de rencontre de la droite s^ι et de la surface Ψ^6. Chacune des 12 droites s^ι a $1+2.3=7$ points communs avec la surface du sixième ordre Ψ^6, par cela même elle est située sur cette surface Ψ^6, C. Q. F. D.

8. Suite des constructions projectives de la surface Ψ^6. Un point simple quelconque $A=\alpha_i\alpha_k\alpha_l$ est (N⁰ 7) le point d'intersection des trois plans homologues α_i, α_k et α_l des trois gerbes collinéaires (Ω_i^2), remplissant la relation (2) du N⁰ 1. Par le point A passent: la droite $a_{ik}=\alpha_i\alpha_k$ de la congruence K_{ik} (voir N⁰ 2), la droite $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l$ de la congruence K_{kl} et la droite $a_{il}=\alpha_i\alpha_l$ de la congruence K_{il}. Nous pouvons considérer le point $A=\alpha_i\alpha_k\alpha_l$ de la surface Ψ^6 comme point de rencontre $A=a_{ik}\alpha_l$ de la droite a_{ik} et du plan α_l, comme point $A=a_{kl}\alpha_i$, ou comme point $A=a_{il}\alpha_k$. Si t_l est la génératrice quelconque de la quadrique Ω_l^2 et Γ_l^2 est le cône circonscrit à cette quadrique par le point quelconque C_l, — prenant en considération les formules (2a), (3) et (4) du N⁰ 1 — nous aurons les relations:

a) Au faisceau de plans $t_l(\alpha_l,\beta_l,\ldots)$ correspondent deux faisceaux projectifs $t_i(\alpha_i,\beta_i,\ldots)\barwedge t_k(\alpha_k,\beta_k,\ldots)$, qui engendrent la quadrique gauche Δ_{ik}^2 ayant les génératrices $a_{ik}=\alpha_i\alpha_k$, $b_{ik}=\beta_i\beta_k,\ldots$

[6]) F. Schur, l. c. 3), p. 16.

b) Au faisceau de plans $\Gamma_l^2(\alpha_l, \beta_l, \ldots)$ correspondent deux faisceaux projectifs $\Gamma_i^2(\alpha_i, \beta_i, \ldots) \barwedge \Gamma_k^2(\alpha_k, \beta_k, \ldots)$, qui engendrent, comme nous savons, une surface gauche Γ_{ik}^4 de degré 4, de rang 6 et de genre 0 (unicursale), ayant une courbe gauche double d'ordre 3 et les génératrices $a_{ik} = \alpha_i \alpha_k$, $b_{ik} = \beta_i \beta_k, \ldots$.

Entre les plans $\alpha_l, \beta_l, \ldots$ de la gerbe (Ω_l^2) et les droites $a_{ik} = \alpha_i \alpha_k$, $b_{ik} = \beta_i \beta_k, \ldots$ de la congruence K_{ik} (voir N⁰ 2), d'ordre 2, de la classe 6 et de l'espèce II, nous pouvons établir une *suivante correspondance* (1, 1):

a) aux différents plan $\alpha_l, \beta_l, \ldots$ du faisceau (t_l) correspondent les droites $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ de la congruence K_{ik}, qui sont les génératrices de la quadrique Δ_{ik}^2.

b) aux différents plans $\alpha_l, \beta_l, \ldots$ du faisceau (Γ_l^2) correspondent les droites $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ de la congruence K_{ik}, qui sont les génératrices de la surface gauche unicursale Γ_{ik}^4 de degré 4.

Des considérations précédentes nous voyons la justesse du théorème:

Si entre les plans $\alpha_l, \beta_l, \ldots$ de la gerbe (Ω_l^2) et les droites $a_{ik} = \alpha_i \alpha_k$, $b_{ik} = \beta_i \beta_k, \ldots$ de la congruence K_{ik}, qui est engendrée par des gerbes collinéaires $(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2)$ — *nous établissons cette correspondance* (1, 1), alors: *l'ensemble des points de rencontre $A = \alpha_l a_{ik}$, $B = \beta_l b_{ik}, \ldots$ des éléments homologues de cette correspondance biunivoque engendrera une surface curviligne de sixième ordre Ψ^6, ayant la courbe gauche double R_3^6 d'ordre* 6 *et de genre* 3.

9. Faisceaux d'espaces collinéaires. Dans les considérations précédantes il y avait (voir la relation (1) du N⁰ 1) trois espaces constantes collinéaires

$$\Sigma_i \varkappa \Sigma_k \varkappa \Sigma_l \tag{1}$$

où $i \neq k \neq l$, $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$, qui n'appartenaient pas au même *faisceau* d'espaces collinéaires [7]).

Si les espaces $\Sigma_i, \Sigma_k, \Sigma_i', \Sigma_k', \ldots$ appartiennent au même *faisceau* d'espaces collinéaires:

$$\Sigma_i \varkappa \Sigma_k \varkappa \Sigma_i' \varkappa \Sigma_k' \varkappa \cdots \tag{6}$$

chaque groupe de plans homologues $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_i', \alpha_k', \ldots$ de ces espaces appartient à un faisceau $a_{ik}(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_i', \alpha_k', \ldots)$.

[7]) Th. Reye, l. c. 1).

Dans l'espace Σ_i nous avons pris la quadrique Ω_i^2, définie au N⁰ 1, qui était la base de la gerbe des plans du second degré (Ω_i^2). A cette quadrique Ω_i^2 correspondent dans ces espaces du faisceau au (6) les quadriques $\Omega_k^2, \Omega_i'^2, \Omega_k'^2, \ldots$. De la relation (6) résultent directement *les collinéations* entre les gerbes de plans du second degré:

$$(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2) \varkappa (\Omega_i'^2) \varkappa (\Omega_k'^2) \varkappa \cdots \tag{7}$$

où les éléments de ces gerbes sont respectiv. les plans tangents aux quadriques fondamentales.

Dans le numéro premier nous avons pris dans l'espace Σ_i un cône circonscrit Γ_i^2 à la quadrique Ω_i^2 par le point C_i et deux génératrices concourantes quelconques t_i et v_i de cette quadrique Ω_i^2. Des relations (6) et (7) résultent directement les projectivités entre les suivants faisceaux de plans:

$$\Gamma_i^2(\alpha_i, \ldots) \barwedge \Gamma_k^2(\alpha_k, \ldots) \barwedge \Gamma_i'^2(\alpha_i', \ldots) \barwedge \Gamma_k'^2(\alpha_k', \ldots) \barwedge \ldots \tag{8}$$

$$t_i(\alpha_i, \ldots) \barwedge t_k(\alpha_k, \ldots) \barwedge t_i'(\alpha_i', \ldots) \barwedge t_k'(\alpha_k', \ldots) \barwedge \ldots \tag{9}$$

$$v_i(\beta_i, \ldots) \barwedge v_k(\beta_k, \ldots) \barwedge v_i'(\beta_i', \ldots) \barwedge v_k'(\beta_k', \ldots) \barwedge \ldots \tag{10}$$

De la définition du faisceau d'espaces collinéaires et des considérations du N⁰ 2 nous déduisons la justesse du théorème:

Les plans homologues $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_i', \alpha_k', \ldots$; $\beta_i, \beta_k, \beta_i', \beta_k', \ldots$; ... des gerbes collinéaires de degré 2, qui remplissent la relation (7) et correspondent entre elles dans le faisceau d'espaces collinéaires au (6), *se coupent suivant les droites $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ de la congruence K_{ik} d'ordre* 2, *de la classe* 6 *et d'espèce II.*

Dans les trois espaces collinéaires Σ_i, Σ_k et Σ_i' du faisceau du (6) nous avons pris les quadriques homologues Ω_i^2, Ω_k^2 et $\Omega_i'^2$, pour lesquelles les triplets de génératrices $t_i, t_k, t_i'; \ldots$; $v_i, v_k, v_i'; \ldots$ sont les droites homologues de ces espaces. Toutes les deux quadriques comme on sait ont 8 couples de génératrices concourantes homologues, en particulier:

a) les quadriques Ω_i^2 et Ω_k^2 ont 4 couples de génératrices concourantes en les 4 points $T_{ik} = t_i t_k$, et 4 couples de génératrices concourantes en les 4 points $V_{ik} = v_i v_k$.

b) les quadriques Ω_i^2 et $\Omega_i'^2$ ont des couples concourants en les 4 points $T_{ii'} = t_i t_i'$ et en les 4 points $V_{ii'} = v_i v_i'$.

c) les quadriques Ω_k^2 et $\Omega_i'^2$ ont des couples concourants en 4 points $T_{ik}' = t_k t_i'$ et en 4 points $V_{ki}' = v_k v_i'$.

Pour la congruence K_{ik}, qui conformément au dernier théorème peut être engendrée par deux gerbes de plans collinéaires de degré 2:

a) $(\Omega_i^2) \barwedge (\Omega_k^2)$, les points singuliers du second degré sont (N⁰ 2) quatre points T_{ik} et quatre points V_{ik}.

b) $(\Omega_i^2) \barwedge (\Omega_i'^2)$, ces points sont quatre points T_{ii}' et quatre points V_{ii}'.

c) $(\Omega_k^2) \barwedge (\Omega_i'^2)$, ces points sont quatre points T_{ki}' et quatre points V_{ki}'.

Puisque la congruence K possède [8]) seulement 8 points singuliers de degré 2, les points obtenus au b) et c) doivent coïncider avec les points au a).

Il est facile de constater, qu'au cas a) et b) les points T_{ii}' et V_{ik}, resp. V_{ii}' et T_{ik}, *ne peuvent pas* coïncider. Si par ex. $T_{ii}' = V_{ik}$, ce point comme point singulier de degré 2 de la congruence K_{ik}, engendrée par les gerbes collinéaires au c), devrait coïncider soit avec le point T_{ki}', soit avec le point V_{ki}'. Alors soit en le point $T_{ii}' = V_{ik} = T_{ki}'$, *deux couples* des génératrices homologues t_i, t_k et v_i, v_k des quadriques au a) devraient se couper, soit en le point $T_{ii}' = V_{ik} = V_{ki}'$ *deux couples* de génératrices homologues t_i, t_i' et v_i, v_i' des quadriques au b) devraient se couper. On a donc une contradiction, car ni deux points singuliers T_{ik} et V_{ik} au a) ni deux points T_{ii}' et V_{ii}' au b) ne peuvent coïncider. Il résulte de ces considérations, que dans les cas au a) et b) les points T_{ii}' et T_{ik}, ainsi que V_{ii}' et V_{ik} doivent coïncider. Puisque par le point singulier $T_{ii}' = T_{ik}$ passent deux génératrices homologues t_i' et t_k, ce point doit coïncider donc aussi avec le point singulier $T_{ki}' = t_i' t_k$ inscrit au c). De même comme par le point singulier $V_{ii}' = V_{ik}$ passent deux génératrices homologues v_i' et v_k, ce point doit coïncider aussi avec le point $V_{ik}' = v_i' v_k$. On a donc

Les quadriques homologues $\Omega_i^2, \Omega_k^2, \Omega_i'^2, \Omega_k'^2, \ldots$ *du faisceau d'espaces collinéaires au* (6) *ont* 8 *points communs* T_{ik} *et* V_{ik} *tels, qu'en chacun des quatre points* T_{ik} (respectiv. V_{ik}) *se coupent les génératrices homologues* $t_i, t_k, t_i', t_k', \ldots$ (respectiv. $v_i, v_k, v_i', v_k', \ldots$) *de ces quadriques.*

Ces droites concourantes en ces points T_{ik}, resp. V_{ik}, sont les axes des faisceaux des plans projectifs, remplissant les relations (9) et (10). Puisque les éléments homologues de ces faisceaux se coupent suivant les droites de la congruence étudiée K_{ik}, les axes de ces faisceaux sont les droites de cette congruence. En conclusion nous voyons que:

Les génératrices étudiées $t_i, t_k, t_i', t_k', \ldots$, et $v_i, v_k, v_i', v_k', \ldots$ *sont les droites de la congruence* K_{ik}. *Les génératrices passant par chaque point* T_{ik}, respect. V_{ik}, *engendrent le cône singulier de second degré de cette congruence.*

[8]) R. Sturm, l. c. 2), Nr. 461.

Démontrons maintenant la justesse du théorème:

Les quadriques homologues $\Omega_i^2, \Omega_k^2, \Omega_i'^2, \Omega_k'^2, \ldots$ *du faisceau des espaces collinéaires*, citées au (6), *appartiennent à la gerbe des quadriques ayant* 8 *points fondamentaux* T_{ik} *et* V_{ik}, *et chaque triplet de ces quadriques — excepté les points* T_{ik} *et* V_{ik} *— n'ont plus de point commun.*

Supposons que les quadriques par ex. Ω_i^2, Ω_k^2 et $\Omega_i'^2$ ont le point commun P, *différent* des 8 points T_{ik} et V_{ik}. Par P passent (N⁰ 2) deux droites a_{ik} et b_{ik} de la congruence de second ordre K_{ik}. Par ex. la droite a_{ik} est evidémment l'axe du faisceau $a_{ik}(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_i', \ldots)$ des plans tangents aux quadriques $\Omega_i^2, \Omega_k^2, \Omega_i'^2, \ldots$ et les coupe resp. suivant les génératrices $t_i v_i$, $t_k v_k$, $t_i' v_i'$, ... Puisque P est un point de ces quadriques, donc l'une de ces génératrices de chaque plan tangent $\alpha_i = t_i v_i$, $\alpha_k = t_k v_k$, $\alpha_i' = t_i' v_i'$, ... doit passer par ce point P. Si par ex. les génératrices t_i et t_k (resp. v_i et v_k) passaient par le point P, alors conformément aux concidérations précédentes le point P devrait coïncider avec le point $T_{ik} = t_i t_k$ (resp. $V_{ik} = v_i v_k$). Ceci est contradictoire avec nos conditions. Supposons que par le point P passent les génératrices par ex. t_i et v_k. Comme au plan tangent $\alpha_i' = t_i' v_i'$ à la quadrique $\Omega_i'^2$ l'une de génératrices t_i' ou v_i' doit passer par le point $P = t_i v_k$, donc au point P doivent se couper soit les génératrices t_i et t_i', soit les génératrices v_k et v_i'. Alors le point P devrait coïncider soit avec le point $T_{ii}' = t_i t_i' = T_{ik}$ soit avec le point $V_{ik}' = v_k v_i' = V_{ik}$. Dans ces deux cas nous arrivons à une contradiction avec nos conditions, c. q. f. d.

10. Congruences des droites K_{il}' et K_{kl}'. Etant donnés deux espaces quelconques du faisceau au (6) par ex. les espaces Σ_i' et Σ_k', et un troisième espace quelconque Σ_l, *qui n'appartienne pas au faisceau* (6). Entre ces espaces — ainsi que au N⁰ 1 — établissons *les collinéations générales:*

$$\Sigma_i' \barwedge \Sigma_k' \; \Sigma_l \tag{11}$$

où $i \neq k \neq l$; $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$. Prenons dans l'espace par ex. Σ_i' — conformément aux conditions du N⁰ 9 — la quadrique $\Omega_i'^2$, deux génératrices concourantes quelconques t_i' et v_i' de cette quadrique, et le cône circonscrit $\Gamma_i'^2$ à cette quadrique par le point quelconque C_i'. Alors de la relation (11) résultent directement *les collinéations* entre les gerbes des plans de second degré:

$$(\Omega_i'^2) \barwedge (\Omega_k'^2) \barwedge (\Omega_l^2) \tag{12}$$

dont les bases sont les quadriques homologues $\Omega_i'^2, \Omega_k'^2, \Omega_l'^2$ des espaces collinéaires au (11), et les éléments sont les plans tangents homologues α_i', α_k' et α_l; β_i', β_k' et β_l; ... de ces quadriques. Des relations (11) et (12) résultent les projectivités entre les faisceaux des plans suivants:

$$\Gamma_i'^2(\alpha_i', \beta_i', \ldots) \barwedge \Gamma_k'^2(\alpha_k', \beta_k', \ldots) \barwedge \Gamma_l^2(\alpha_l, \beta_l, \ldots) \tag{13}$$

$$t_i'(\alpha_i', \ldots) \barwedge t_k'(\alpha_k', \ldots) \barwedge t_l(\alpha_l, \ldots) \tag{14}$$

$$v_i'(\beta_i', \ldots) \barwedge v_k'(\beta_k', \ldots) \barwedge v_l'(\beta_l, \ldots) \tag{15}$$

Les gerbes $(\Omega_i'^2) \varkappa (\Omega_k'^2)$, remplissant la relation (12) et la relation (7) du N° 9, engendrent la congruence K_{ik}. Si nous considérons — voir la relation (12) — deux gerbes collinéaires $(\Omega_i'^2) \varkappa (\Omega_l^2)$, resp. $(\Omega_k'^2) \varkappa (\Omega_l^2)$, les plans homologues de ces gerbes se couperont suivant les droites $a_{il}'=\alpha_i'\alpha_l$, $b_{il}'=\beta_i'\beta_l$, ..., resp. $a_{kl}'=\alpha_k'\alpha_l$, $b_{kl}'=\beta_k'\beta_l$, ... de la congruence K_{il}', resp. K_{kl}'. Ce deux congruences sont (N° 2) d'ordre 2, de la classe 6 et d'espèce II. La congruence K_{il}' possède en les sommets S_{il}' du tétraedre coïncident Θ_{il}' des espaces collinéaires $\Sigma_i' \varkappa \Sigma_l$ quatre points singuliers de degré 4. Quatre couples de génératrices concourantes homologues t_i' et t_l et quatre couples de même génératrices v_i' et v_l des quadriques fondamentales $\Omega_i'^2$ et Ω_l^2 des gerbes au (12) déterminent 8 points $T_{il}'=t_i't_l$ et $V_{il}'=v_i'v_l$, qui sont (N° 2) les points singuliers de second degré de la congruence K_{il}'. La congruence K_{kl}' possède analogiquement quatre points singuliers S_{kl}' de degré 4 et huit points singuliers $T_{kl}'=t_k't_l$, $V_{kl}'=v_k'v_l$ du second degré.

Les deux congruences K_{il} et K_{kl}, que nous avons obtenu au N° 2. et *les congruences K_{il}', K_{kl}'*, ... construites ci-dessus *ont la propriété caractéristique, que leurs droites* par ex. $a_{il}=\alpha_i\alpha_l$, $a_{kl}=\alpha_k\alpha_l$, $a_{il}'=\alpha_i'\alpha_l$, $a_{kl}'=\alpha_k'\alpha_l$, ... *sont afférentes au plan α_l de la gerbe* (Ω_l^2) et *se coupent* (voir N° N° 7, 8, 9) *en le point* $A=\alpha_i\alpha_k\alpha_l=a_{ik}\alpha_l=\alpha_i'\alpha_k'\alpha_l$ *de la surface étudiée* Ψ^6.

Analogiquement comme dans le N° 2 nous pouvons démontrer, que: Par chaque point singulier de degré 4 S_{il}' (resp. S_{kl}') de la congruence K_{il}' (resp. K_{kl}') passent *deux triplets* de plans homologues des gerbes collinéaires au (12).

Par chaque point singulier de degré 2 T_{il}' ou V_{il}' (resp. T_{kl}' ou V_{kl}') de la congruence K_{il}' (resp. K_{kl}') passe *un triplet* de plans homologues des gerbes au (12).

11. Théorèmes pricipaux. En le point quelconque H de la courbe gauche R_3^6 se coupent (N° 3) trois droites homologues h_i, h_k et h_l de trois espaces collinéaires, remplissant la relation (1) du N° 1. Par le

point $H=h_ih_kh_l$ passent (N° 3) deux triplets de plans homologues $\alpha_i\alpha_k\alpha_l$ et $\beta_i\beta_k\beta_l$ de trois gerbes collinéaires, satisfaisant la relation (2) du N° 1, où $h_i=\alpha_i\beta_i$, $h_k=\alpha_k\beta_k$, $h_l=\alpha_l\beta_l$. Par ce point H passent donc (N° 2) deux droites $a_{ik}=\alpha_i\alpha_k$ et $b_{ik}=\beta_i\beta_k$ de la congruence K_{ik}, et puisque ces droites (N° 9) sont les droites $a_{ik}=\alpha_i'\alpha_k'$ et $b_{ik}=\beta_i'\beta_k'$, alors par H passent de même *deux triplets* de plans homologues $\alpha_i'\alpha_k'\alpha_l$ et $\beta_i'\beta_k'\beta_l$ des gerbes, remplissant la relation (12) du N° 10, et *trois* droites homologues $h_i'=\alpha_i'\beta_i'$, $h_k'=\alpha_k'\beta_k'$ et $h_l=\alpha_l\beta_l$ des trois espaces collinéaires au (11) du N° 10. En d'autres mots: Par le point quelconque $H=h_ih_kh_l$ de la courbe gauche R_3^6 passent les droites homologues h_i', h_k',... des autres espaces du faisceau d'espaces collinéaires au (6) du N° 9 et deux groupes de plans homologues $\alpha_l\alpha_i\alpha_k\alpha_i'\alpha_k'$ ... et $\beta_l\beta_i\beta_k\beta_i'\beta_k'$ ... des gerbes collinéaires, satisfaisant la relation (13) du N° 10 et la relation (7) du N° 9. Pour $i\neq k\neq l$; $i=1,2,3$; $k=1,2,3$; $l=1,2,3$ — nous avons donc démontré la justesse des théorèmes suivants:

Si entre l'un des espaces du faisceau d'espaces collinéaires $\Sigma_i \varkappa \Sigma_k \varkappa \varkappa \Sigma_i' \varkappa \Sigma_k'$ ... et un espace quelconque Σ_l, qui n'appartient pas à ce faisceau, nous établissons une collinéation générale, alors:

Par chaque point d'intersection $H=h_ih_kh_l$ des trois droites homologues des espaces collinéaires $\Sigma_i \varkappa \Sigma_k \varkappa \Sigma_l$ passent les droites h_i', h_k', ... (qui correspondent à ces trois droites h_i, h_k, h_l) des espaces restants $\Sigma_i' \varkappa \Sigma_k' \varkappa$ ... de ce faisceau. L'ensemble de ces points $H=h_lh_ih_kh_i'h_k'$ ..., appartient à la courbe gauche R_3^6 d'ordre 6 *et de genre* 3.

Par chaque point de la ligne gauche R_3^6 passent deux groupes de plans homologues $\alpha_l\alpha_i\alpha_k\alpha_i'\alpha_k'$ ... et $\beta_l\beta_i\beta_k\beta_i'\beta_k'$ ... *des gerbes collinéaires* $(\Omega_l^2) \varkappa (\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2) \varkappa (\Omega_i'^2) \varkappa (\Omega_k'^2) \varkappa$ ..., qui satisfont les relations (7), (12) et *correspondent entre eux dans l'espace Σ_l et les espaces du faisceau d'espaces collinéaires* au (6).

Des considérations précédentes du N° N° 3, 4, 6 et 10 il résulte, que: *Sur la ligne gauche R_3^6 sont situés tous les points singuliers du quatrième degré S_{ik}, S_{il}, S_{kl}, S_{il}', S_{kl}', ... des congruences étudiées K_{ik}, K_{il}, K_{kl}, K_{il}', K_{kl}', ...*

Ces congruences possèdent 12 droites communes s^ι, où $\iota=1, 2, \ldots, 12$, *et chacune de ces droites s^ι est la trisécante de la ligne gauche R_3^6.*

Dans les gerbes citées ci-dessus *il y a 12 groupes de plans homologues* $\sigma_l^\iota\sigma_i^\iota\sigma_k^\iota\sigma_i'^\iota\sigma_k'^\iota$ ..., ... tels, *que chaque groupe se coupe suivant une droite s^ι, qui est trisécante de la ligne gauche R_3^6.*

Nous pouvons considérer un point quelconque $A=\alpha_i\alpha_k\alpha_l$ (voir N° 7) de la surface étudiée Ψ^6 comme (N° 8) point $A=a_{ik}\alpha_l$, et la droite a_{ik} de la congruence K_{ik} comme (N° 9) un élément $a_{ik}=\alpha_i\alpha_k=\alpha_i'\alpha_k'$. Les trois plans homologues α_i', α_k' et α_l des gerbes, satisfaisant la relation (12) du N⁰ 10, se coupent donc en le point $A = \alpha_i' \alpha_k' \alpha_l$ de la surface Ψ^6. Ces considérations et celles du N⁰ 7 démontrent la justesse du théorème général:

Si nous établissons les collinéations générales citées au (12) *du* N⁰ 10 *entre les plans de la gerbe* (Ω_l^2) *et les plans de chacune des deux gerbes collinéaires quelconques* $(\Omega_i'^2) \varkappa (\Omega_k'^2)$, *appartenant* (relation (7) du N⁰ 9) *au faisceau d'espaces collinéaires et ayant la congruence commune des droites* K_{ik} — alors:

L'ensemble des points d'intersection des différents triplets de plans homologues de ces trois gerbes engendrera une surface curviligne Ψ^6 *d'ordre* 6, *ayant la ligne gauche double* R_3^6 *d'ordre* 6 *et de genre* 3.

La surface Ψ^6 *a* 12 *droites, qui sont les trisécantes de la ligne gauche double* R_3^6 *de cette surface. Chacune de ces droites* $s^\iota = \sigma_i'^\iota \sigma_k'^\iota \sigma_l^\iota$, où $\iota = 1, 2, \ldots, 12$, *est l'arête d'intersection des trois plans homologues* $\sigma_i'^\iota$, $\sigma_k'^\iota$ et σ_l^ι *de ces trois gerbes collinéaires*, satisfaisant la relation (12) du N⁰ 10.

12. Lignes gauche unicursales C^6 sur la surface Ψ^6. Soit donné dans l'espace Σ_i un point quelconque C_i, qui *n'est un point ni* (N⁰ 1) *de la quadrique* Ω_i^2 *ni* (N⁰ 4) *d'aucun des* 12 *plans* σ_i^ι, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$. Si Γ_i^2 est le cône circonscrit à la quadrique Ω_i^2 par le point C_i, alors pour les faisceaux projectifs des plans, satisfaisant les relations (3) du N⁰ 1 et (13) du N⁰ 10, leurs différents triplets de plans homologues se coupent[9]) en les points $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l = \alpha_i' \alpha_k' \alpha_l$, $B = \beta_i \beta_k \beta_l = \beta_i' \beta_k' \beta_l$, ... de la ligne gauche C^6 d'ordre 6. Car les plans homologues par ex. α_i, α_k, α_l, α_i' et α_k' de ces faisceaux sont de même les éléments des gerbes de degré 2, remplissant les relations (2) et (12), donc le point quelconque A de la ligne gauche C^6 appartient à la surface Ψ^6. On a donc[9]):

Les faisceaux projectifs des plans, satisfaisant les relations (3) et (13), *engendrent la courbe gauche* C^6 *d'ordre* 6 et *de genre* 0 *(unicursale), située sur la surface* Ψ^6. *La courbe gauche* C^6, *par laquelle passe une seule surface curviligne de troisième ordre* Γ^3, *possède* 6 *quadrisécantes.*

La ligne gauche unicursale C^6 est[10]) de la classe 12, de rang 10 et possède en générale 10 points doubles apparents. Dans le N⁰ 13 nous construirons des lignes gauches C^6 telles que, chaque possèdera un point double.

[9]) R. Sturm, l. c. 2), Nr. 497, 498.

[10]) Dr. A. Plamitzer, Erzeugnisse projektiver Involutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind. (I. u. II. Mitteilung), Sitzungsber, d. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Abt. II a., Bd. 125 (1916) u. 126 (1917), Nr, 40 u. 43.

Pour déterminer cette surface curviligne Γ^3 considérons les points C_i, C_k, C_i', C_k', ..., qui sont les sommets des cônes fondamentaux d'ordre 2 des faisceaux projectifs, satisfaisant les relations (3), (13) et (8). Considérons ces points comme sommets des gerbes collinéaires:

$$(C_i) \varkappa (C_k) \varkappa (C_i') \varkappa (C_k') \varkappa \ldots \tag{16}$$

appartenant aux faisceaux des espaces collinéaires, citées au (6) du N⁰ 9. Les plans homologues des gerbes par ex. $(C_i) \varkappa (C_k)$ se coupent suivant les droites $x_{ik} = \xi_i \xi_k$, ..., qui sont comme on sait les droites de la congruence (1, 3), d'ordre 1 et de la classe 3, des bisécantes de la courbe gauche du troisième ordre C_{ik}^3. La ligne C_{ik}^3 est le lieu géométrique des points d'intersection de droites homologues de ces gerbes et passe par leurs sommets C_i, C_k. Mais par la droite p. ex. $x_{ik} = \xi_i \xi_k$ de cette congruence passent aussi les autres plans homologues ξ_i', ξ_k', ... des espaces collinéaires au (6), et de même des gerbes collinéaires au (16). Nous en concluons, que les gerbes collinéaires au (16) engendreront la congruence (1, 3) des bisécantes $x_{ik} = \xi_i \xi_k \xi_i' \xi_k' \ldots$, de la ligne gauche C_{ik}^3 et les sommets C_i, C_k, C_i', C_k', ... de ces gerbes sont les points de la ligne gauche C_{ik}^3. Les gerbes citées au (16) appartiennent[11]) alors à *„une série de gerbes collinéaires"*. Mais les gerbes collinéaires:

$$(C_i) \varkappa (C_k) \varkappa (C_l) \tag{17}$$

$$(C_i') \varkappa (C_k') \varkappa (C_l) \tag{18}$$

n'appartiennent pas à „la série de gerbes collinéaires", car elles correspondent entré elles en ces espaces collinéaires, qui remplissent les relations (1) du N⁰ 1 et (11) du N⁰ 10, et n'appartiennent pas aux faisceaux d'espaces collinéaires. Les plans homologues de ces gerbes aux (17) et (18) se coupent en les points $X = \xi_i \xi_k \xi_l = x_{ik} \xi_l = \xi_i' \xi_k' \xi_l$, ... de la surface curviligne cherchée Γ^3.

A la surface Γ^3 appartiennent naturellement la courbe gauche du troisième ordre C_{ik}^3 et les lignes gauches du troisième ordre C_{il}^3, C_{kl}^3, $C_{il}'^3$ et $C_{kl}'^3$, dont les bisécantes sont respectivement les arêtes d'intersection des plans homologues de chaques deux gerbes collinéaires aux (17) et (18). Puisque à ces gerbes appartiennent aussi les faisceaux des plans, satisfaisant les relations (3) et (13), alors la ligne gauche C^6 est située sur Γ^3. En considérant le N⁰ 11 nous concluons, que sur Γ^3 est située aussi la courbe gauche R_3^6. Et alors:

[11]) Th. Reye, Journal für Mathematik, 1887, Bd. 10., S. 214.

A la surface curviligne du troisième ordre Γ^3, *qui est engendrée par les gerbes collinéaires aux* (17) et (18), *appartiennent la ligne gauche unicursale* C^6, *la courbe gauche* R_3^6 *et les lignes gauches du troisième ordre* C_{ik}^3, C_{il}^3, C_{kl}^3, $C_{il}'^3$, $C_{kl}'^3$, ...

En considérant le N⁰ 5 et le N⁰ 8 au b) nous avons profité de la surface unicursale Γ_{ik}^4 gauche de degré 4 et de rang 6, ayant la ligne gauche double du troisième ordre C_{ik}^3 et les génératrices $a_{ik} = \alpha_i \alpha_k = \alpha_i' \alpha_k'$, $b_{ik} = \beta_i \beta_k = \beta_i' \beta_k'$, ..., qui sont les bisécantes de cette courbe C_{ik}^3. Cette surface, voir les relations (3) et (13), était engendrée par les faisceaux de plans projectifs $(\Gamma_i^2) \barwedge (\Gamma_k^2)$ ou $(\Gamma_i'^2) \barwedge (\Gamma_k'^2)$. Nous pouvons construire analogiquement les surfaces gauches unicursales du quatrième degré et du sixième rang:

$$\Gamma_{il}^4,\ \Gamma_{kl}^4,\ \Gamma_{il}'^4,\ \Gamma_{kl}'^4,\ \ldots,$$

qui sont engendrées respectivement par les faisceaux de plans projectifs:

$$(\Gamma_i^2) \barwedge (\Gamma_l^2),\quad (\Gamma_k^2) \barwedge (\Gamma_l^2),\quad (\Gamma_i'^2) \barwedge (\Gamma_l^2),\quad (\Gamma_k'^2) \barwedge (\Gamma_l^2),\ \ldots .$$

Par ex. la surface $\Gamma_{il}'^4$ a la ligne gauche double $C_{il}'^3$ et les génératrices $a_{il}' = \alpha_i' \alpha_l$, $b_{il}' = \beta_i' \beta_l$, ..., qui sont les bisécantes de la courbe $C_{il}'^3$.

A l'aide des relations (3) et (13) nous pouvons établir la projectivité:

$$\Gamma_{ik}^4 (a_{ik}, b_{ik}, \ldots) \barwedge \Gamma_l^2 (\alpha_l, \beta_l, \ldots) \tag{19}$$

entre les génératrices $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ de la surface Γ_{ik}^4 et les plans tangents $\alpha_l, \beta_l, \ldots$ du cône Γ_l^2. Le lieu géometrique des points d'intersection $A = a_{ik} \alpha_l = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$, $B = b_{ik} \beta_l = \beta_i \beta_k \beta_l$, ... des éléments homologues de cette projectivité est [12]) *la courbe gauche unicursale* C^6, d'ordre 6, de la classe 12, de rang 10, ayant 10 points doubles apparents. La surface Γ_{ik}^4 *passe* donc par la courbe gauche C^6 et les génératrices $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ de cette surface sont *les unisécantes* de la courbe C^6.

A l'aide des relations (3), (13) et (8) nous pouvons établir toute la classe des projectivités:

$$(\Gamma_{il}^4) \barwedge (\Gamma_k^2),\quad (\Gamma_{kl}^4) \barwedge (\Gamma_i^2),\quad (\Gamma_{il}'^4) \barwedge (\Gamma_k'^2),\quad (\Gamma_{kl}'^4) \barwedge (\Gamma_i'^2),\ \ldots \tag{20}$$

et les éléments homologues de ces projectivités se coupent [12]) en les points $A = a_{il} \alpha_k = a_{kl} \alpha_i = a_{il}' \alpha_k' = a_{kl}' \alpha_i' = \cdots$, de la ligne gauche étudiée C^6. On a donc:

[12]) A. Plamitzer, l. c. 10), Nr. 32; — Ueber mehrdeutige Verwandtschaften auf unikursalen Trägern, Prace Matematyczno-Fizyczne, T. 30., (1919), Nr. 12.

La courbe gauche unicursale C^6, *située sur la surface étudiée* Ψ^6, *est engendrée par les projectivités aux* (19) et (20).

Par la courbe C^6 *passe toute la classe des surfaces unicursales gauches de quatrième degré et de sixième rang* Γ_{ik}^4, Γ_{il}^4, Γ_{kl}^4, $\Gamma_{il}'^4$, $\Gamma_{kl}'^4$, ..., *ayant pour génératrices les unisécantes de la courbe gauche* C^6.

Les génératrices des surfaces gauches Γ_{il}^4, Γ_{kl}^4, $\Gamma_{il}'^4$, $\Gamma_{kl}'^4$, ..., *qui sont afférentes au plan quelconque* α_l *du faisceau* (Γ_l^2), *engendrent le faisceau de droites* $A\,(a_{il}, a_{kl}, a_{il}', a_{kl}', \ldots)$, *dont le sommet est le point* $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l = \alpha_i' \alpha_k' \alpha_l = \cdots$ *de la courbe gauche unicursale* C^6.

13. Suite des propriétés des lignes gauches unicursales C^6 de la surface Ψ^6.

Pour un point donné C_i de l'espace Σ_i nous avons obtenu, comme il résulte du N⁰ 12, une seule courbe gauche unicursale C^6 strictement déterminée sur la surface Ψ^6. Pour tous les points différents $C_i, \ldots$ de l'espace Σ_i, nous obtiendrons un ensemble ∞^3 de lignes $C^6, \ldots$ sur la surface Ψ^6. On a donc:

Sur la surface étudiée Ψ^6 *il y a* ∞^3 *de courbes gauches unicursales de sixième ordre* $C^6, \ldots$, *dont chacune a* 6 *quadrisécantes.*

Soit le point $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ le point simple quelconque de la surface Ψ^6 *qui ne soit pas* situé sur aucune des 12 droites $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ de cette surface. Alors pour le point quelconque C_i dans le plan α_i, la ligne gauche C^6 construite de la même manière passe naturellement par ce point $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$. Pour tous les points différents $C_i, \ldots$ du plan α_i, nous obtiendrons sur la surface Ψ^6 l'ensemble ∞^2 de lignes gauches $C^6, \ldots$, qui passent par le point A et forment *la gerbe* des courbes C^6.

Si sur la surface Ψ^6 nous prenons *deux* points simples quelconques $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ et $B = \beta_i \beta_k \beta_l$, alors pour les points différents $C_i, \ldots$ de la droite $e_i = \alpha_i \beta_i$ nous obtiendrons sur Ψ^6 l'ensemble ∞^1 des lignes gauches $C^6, \ldots$, qui passent par ces points A, B et forment *le faisceau* de courbes C^6. Si $C = \gamma_i \gamma_k \gamma_l$ est le troisième point simple de la surface Ψ^6, pour le point $C_i = \alpha_i \beta_i \gamma_i$ nous obtiendrons une seule ligne gauche C^6, qui passe par ces trois points A, B et C. Alors:

Par chaque point simple de la surface Ψ^6, *non situé sur aucune droite* s^ι, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$, *de cette surface, passe une gerbe de courbes gauche unicursales* C^6, *appartenant à cette surface.*

Par tous les deux points simples de la surface Ψ^6 *passe un faisceau de ces lignes gauches unicursales* C^6.

Par tous les trois points simples de la surface Ψ^6 *il ne passe qu'une seule courbe gauche unicursale* C^6.

Soit donné sur la courbe gauche double R_3^6 de la surface Ψ^6 (N⁰ 3) le point quelconque $H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$, respectivement (N⁰ 6) un des trois points de rencontre $S^\iota = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ de la courbe R_3^6 et de la droite s^ι de la surface Ψ^6. De la même manière nous pouvons démontrér, que:

Par chaque point double H de la surface Ψ^6, non situé sur aucune des 12 droites s^ι de cette surface, *passent deux gerbes de lignes gauches unicursales C^6, qui appartiennent à Ψ^6. Par chaque tel point H passe un faisceau de courbes gauches C^6* et *chacune de ces courbes a en le point H un point double.*

Par chacun des 36 points doubles S^ι de la surface Ψ^6, qui sont les points de rencontre des 12 droites s^ι et la courbe gauche double R_3^6 de cette surface, *passe une gerbe de lignes gauches unicursales C^6*.

Nous démontrons la justesse du théorème:

Si la ligne gauche unicursale C^6 de la surface Ψ^6 coupe une des 12 *droites s^ι* de cette surface, *alors un tel point de rencontre appartient à la courbe gauche double R_3^6 de la surface Ψ^6.*

En effet, par un tel point de rencontre passent (voir N⁰ 4) deux triplets de plans homologues $\alpha_i \alpha_k \alpha_l$ et $\sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ des gerbes, satisfaisant la relation (2) du N⁰ 1. Un tel point devrait coïncider (voir N⁰ 6) avec un des trois points d'intersection S^ι de la droite $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ avec la courbe gauche double R_3^6 de la surface Ψ^6.

Nous pouvons déterminer facilement sur la surface Ψ^6 les courbes gauches C^6, qui passent en même temps par ex. par les points: a) A, H et S, b) A et H, c) H, H' et S, d) H, S et S', e) S, S' et S''....

14. Points de rencontre des lignes gauches C^6 et R_3^6. Soient données sur la surface Ψ^6 deux lignes quelconque gauches unicursales du sixième ordre C^6 et D^6, qui sont engendrées respectivement par les faisceaux projectifs des plans:

$$(\Gamma_i^2) \barwedge (\Gamma_k^2) \barwedge (\Gamma_l^2) \tag{3}$$

$$(\Delta_i^2) \barwedge (\Delta_k^2) \barwedge (\Delta_l^2) \tag{3a}$$

P. ex. les sommets C_i et D_i des cônes Γ_i^2 et Δ_i^2 sont des points quelconques, qui ne sont situés (N⁰ 12) ni sur la quadrique Ω_i^2 ni dans aucun des 12 plans σ^ι, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$. Par la droite $g_i = C_i D_i$ passent deux plans tangents α_i et β_i à la quadrique Ω_i^2, qui sont les éléments communs du faisceau (Γ_i^2) et (Δ_i^2) de l'espace Σ_i. De la relation (1) du N⁰ 1 il résulte, que leur correspondent les éléments α_k et β_k de l'espace Σ_k,

resp. α_l et β_l de l'espace Σ_l, où $g_k = C_k D_k = \alpha_k \beta_k$ et $g_l = C_l D_l = \alpha_l \beta_l$, et les plans α_k, β_k, resp. α_l, β_l sont les éléments communs des faisceaux (Γ_k^2) et (Δ_k^2), resp. (Γ_l^2) et (Δ_l^2). Nous en concluons que les points $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ et $B = \beta_i \beta_k \beta_l$ sont situés en même temps sur les lignes gauches C^6 et D^6.

On doit remarquer, que les lignes gauches C^6 et D^6, a part les points A et B, peuvent avoir encore d'autres points communs. Pour indiquer des exemples, prenons (N⁰ 3) le point quelconque $H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$ de la courbe gauche R_3^6. Si les sommets C_i et D_i des cônes Γ_i^2 et Δ_i^2 sont les points $C_i = g_i \varepsilon_i$ et $D_i = g_i \varphi_i$, le point $H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l$ est le point de la courbe C^6 et l'élément $H = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$ est le point de la ligne D^6. Les lignes C^6 et D^6 se coupent en les trois points A, B et H. Prenons encore deux points quelconques $H' = \varepsilon_i' \varepsilon_k' \varepsilon_l' = \varphi_i' \varphi_k' \varphi_l'$ et $H'' = \varepsilon_i'' \varepsilon_k'' \varepsilon_l'' = \varphi_i'' \varphi_k'' \varphi_l''$ sur la courbe R_3^6. Si les droites $e_i = \varepsilon_i \varepsilon_i'$ et $f_i = \varphi_i \varphi_i'$ coupent l'arête $g_i = \alpha_i \beta_i$ en les points $C_i = e_i g_i$, $D_i = f_i g_i$, nous obtiendrons alors les courbes gauches C^6 et D^6, possèdant quatre points communs A, B, S et S'. Pour les points $C_i = \varepsilon_i \varepsilon_i' \varepsilon_i''$ et $D_i = \varphi_i \varphi_i' \varphi_i''$ de la droite $g_i = \alpha_i \beta_i$ nous obtenous les courbes gauches C^6 et D^6, qui se coupent en 5 points A, B, S, S' et S''.

Les points de rencontre A et B des lignes gauches C^6 et D^6 sont en général les points *simples* de la surface Ψ^6. Les points A et B, conformément au dernier théorème du N⁰ 13, ne peuvent se trouver sur aucune droite s^ι de la surface Ψ^6.

Mais chacun de ces points A et B peut être un point double de cette surface. Si par ex. les plans $\beta_i = \varphi_i$ coïncident, les courbes gauches C^6 et D^6 se couperont en les points A et $B = S = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$. Si les plans $\alpha_i = \varepsilon_i$ et $\beta_i = \varphi_i$ coïncident, les sommets C_i et D_i sont les points de la droite $g_i = \varepsilon_i \varphi_i$, alors les lignes gauches C^6 et D^6 se couperont au point $A = B = H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$, qui est le *point commun double* de ces courbes. On a donc:

Deux lignes gauches quelconques unicursales du sixième ordre C^6 et D^6, situées sur la surface Ψ^6, *se coupent* en général *en deux points.*

Si ces deux points d'intersection sont des points simples de la surface Ψ^6, ils ne peuvent être situés sur aucune des 12 droites s^ι de cette surface. Les courbes gauches C^6 et D^6 peuvent se couper alors en d'autres points, qui doivent être situés sur la ligne gauche double R_3^6 de la surface Ψ^6.

Chacun de ces deux points de rencontre des lignes C^6 et D^6 peut être le point double de la surface Ψ^6 *et il est ou un point quelconque* *de la courbe $R_3{}^6$ ou un point de rencontre de la courbe $R_3{}^6$* et *de la droite s^ι de cette surface Ψ^6.*

Si ces deux points d'intersection coïncident en un point quelconque de la courbe gauche $R_3{}^6$, cet élément sera le point commun double des lignes gauches unicursales C^6 et *D^6.*

Nous pouvons démontrer aussi la justesse du premier théorème de la manière suivante:

Par la ligne gauche C^6 passe (N^0 12) une seule surface curviligne du troisième ordre Γ^3, qui est engendrée par les gerbes collinéaires, citées à la relation (17) du N^0 12. De même par la ligne gauche D^6 passe une seule surface curviligne du troisième ordre Δ^3, qui est engendrée par les gerbes collinéaires:

$$(D_i) \varkappa (D_k) \varkappa (D_l) \tag{17a}$$

Le faisceau de plans $g_i(\alpha_i, \beta_i, \ldots)$, ayant l'axe $g_i = C_i D_i$, appartient en même temps aux gerbes (C_i) et (D_i). De la relation (1) du N^0 1 il résulte, que dans les espaces collinéaires $\Sigma_k \varkappa \Sigma_l$ les faisceaux de plans, leur correspondants, ayant les axes g_k et g_l appartiennent respectivement aux gerbes (C_k) et (D_k), relativ. (C_l) et (D_l). Nous voyons alors, que la courbe gauche du troisième ordre G^3, qui engendre les faisceaux projectifs $(g_i) \,\overline{\wedge}\, (g_k) \,\overline{\wedge}\, (g_l)$, appartient en même temps aux deux surfaces Γ^3 et Δ^3. Nous savons (N^0 12), que sur les surfaces Γ^3 et Δ^3 est située aussi la courbe gauche $R_3{}^6$, qui est la courbe double de la surface Ψ^6.

Les surfaces Γ^3 et Δ^3 se coupent suivant la ligne gauche d'ordre 9, qui se décompose en les courbes gauches $R_3{}^6$ et G^3. Ces courbes $R_3{}^6$ et G^3 ont [13]) 8 *points de rencontre* Q. La ligne d'intersection d'ordre 18 des surfaces Ψ^6 et Γ^3 se décompose en une courbe gauche $R_3{}^6$ comptée doublement et en une courbe gauche C^6; la ligne d'intersection d'ordre 18 des surfaces Ψ^6 et Δ^3 se décompose en une courbe $R_3{}^6$ doublement comptée et en une courbe gauche D^6. La ligne gauche G^3 coupe la surface Ψ^6 en 18 points et chacun des 8 points d'intersection Q des lignes gauches G^3 et $R_3{}^6$ doit être compté doublement. Les deux points restants de rencontre A et B de la ligne G^3 et de la surface Ψ^6 ne se trouvent pas en général sur la ligne $R_3{}^6$, mais ils sont les points communs des trois surfaces Ψ^6, Γ^3 et Δ^3. Cependant les points A et B comme appartenant aux surfaces: a) Ψ^6 et Γ^3, respectiv. b) Ψ^6 et Δ^3, doivent être situés sur la ligne courbe: a) C^6 et b) D^6. Puisque A et B sont les points de la ligne courbe G^3, ils sont les points d'intersection $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ et $B = \beta_i \beta_k \beta_l$ des plans homologues des faisceaux $(g_i) \,\overline{\wedge}\, (g_k) \,\overline{\wedge}\, (g_l)$ cités ci-dessus. Mais comme A et B sont les points de la surface Ψ^6, les plans p. ex. α_i et β_i du faisceau (g_i) passent par les sommets C_i et D_i des cônes, qui sont les bases des faisceaux au (3) et (3a). Les points d'intersection A et B ainsi obtenus des lignes gauches C^6 et D^6 sont identiques aux points A et B, que nous avons déterminés au commencement de ces numéro. Nous concluons des considérations précédentes que dans *les cas singuliers* ces points A et B peuvent appartenir à la ligne gauche $R_3{}^6$. Les points A et B qui sont situées sur les lignes courbes G^3 et $R_3{}^6$ doivent être les points indiqués au dessus par Q. Il reste à considérer 8 points Q, qui sont les points de rencontre des lignes courbes G^3 et $R_3{}^6$. Par le point quelconque Q de la courbe $R_3{}^6$ passent (N^0 3) deux groupes de plans homologues $\varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l$ et $\varphi_i \varphi_k \varphi_l$ des gerbes collinéaires au (2) du N^0 1. Dans le cas général les éléments par ex. ε_i et φ_i n'appartiennent pas aux faisceaux satisfaisant les relations (3) et (3a). Nous en concluons, que les lignes C^6 et D^6 ne se coupent pas en le point Q. On a donc:

Les courbes gauches C^6 et D^6 se coupent en général *en deux points A* et *B,* c. q. f. d.

Par les points A et B passent, conformément à ces considérations, trois lignes gauches C^6, D^6 et G^3. La courbe C^6 coupe la surface Δ^3 en deux points A, B et en 16 autres points P. Puisque les points P appartiennent aux surfaces Γ^3 et Δ^3, ils doivent être situés sur leurs courbes d'intersection $R_3{}^6 + G^3$. Il est facile de démontrer que chacun des 16 points P est situé sur la courbe $R_3{}^6$. Supposons, qu'un des points P est situé sur la courbe G^3. Ce point P, comme point de la courbe C^6 est un point de la surface Ψ^6, il est ainsi le point de rencontre de la courbe G^3 et de la surface Ψ^6. Mais P étant différent des points A et B, il doit coïncider avec l'un des 8 points de rencontre Q des lignes courbes G^3 et $R_3{}^6$. L'élément P est situé donc sur $R_3{}^6$, c. q. f. d. Nous avons donc démontré la justesse du théorème:

La courbe gauche unicursale du sixième ordre C^6, située sur la surface étudiée Ψ^6, *coupe la courbe gauche double $R_3{}^6$* de cette surface *en 16 points.*

15. Courbes gauches unicursales C^5 sur la surface Ψ^6. Dans les trois derniers numéros nous avons observé de tels points C_i de l'espace Σ_i, qui n'étaient situés ni sur la quadrique $\Omega_i{}^2$ ni sur aucun des 12 plans $\sigma_i{}^\iota$, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$. Supposons maintenant, que le point C_i n'appartient pas à la quadrique $\Omega_i{}^2$, mais il est dans un seul plan $\sigma_i{}^\iota$. Les faisceaux

[13]) R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung. — Leipzig 1867, Nr. 64.

de plans, sitisfaisant les relations (3) et (13), engendrent alors la courbe C^6, qui (N^0 11 et N^0 12) se décompose en la droite $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota = \sigma_i'^\iota \sigma_k'^\iota \sigma_l^\iota$ et en [14]):
la courbe gauche unicursale C^5 *d'ordre* 5, située sur la surface curviligne Ψ^6. *La courbe* C^5, pour laquelle *cette droite* s^ι *est unisécante, possède une quadrisécante.*

Nous appelons cette droite s^ι *une droite adjointe* de la courbe C^5. Des considérations du N^0 12 nous voyons que: La ligne gauche unicursale C^5 est engendrée par les projectivités aux (19) et (20). Par C^5 passent la surface curviligne Γ^3 d'ordre 3 et les surfaces gauches unicursales de degré 4 et de rang 6 Γ_{ik}^4, Γ_{il}^4, Γ_{kl}^4, $\Gamma_{il}'^4$, $\Gamma_{kl}'^4$, ..., pour lesquelles la droite adjointe s^ι est la génératrice commune. Les génératrices de ces surfaces gauches sont les unisécantes de la courbe C^5. Pour les points différents C_i du plans σ_i^ι, qui ne sont situés ni sur la quadrique Ω_i^2 ni sur aucune des 11 autres plans σ_i^ι, nous obtiendrons sur la surface Ψ^6 l'ensemble ∞^2 *(une gerbe)* de lignes courbes C^5. Si $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_i$ est un point simple quelconque de la surface Ψ^6, alors à l'aide des points différents C_i de l'arête $a_i = \sigma_i^\iota \alpha_i$ nous obtiendrons sur Ψ^6 *le faisceau* de lignes gauches C^5, passant par le point A. Si nous prenons pour deux points simples $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ et $B = \beta_i \beta_k \beta_l$ de la surface Ψ^6 le point de rencontre de la droite $e_i = \alpha_i \beta_i$ et du plan σ_i^ι comme sommet C_i, nous obtiendrons une courbe C^5, passant par les deux points A et B. En prenant en considération (N^0 4) tous les 12 plans σ_i^ι de l'espace Σ_i, nous arrivons aux relations suivantes:

Sur la surface curviligne Ψ^6 *il y a* ∞^2 *de lignes gauches unicursales d'ordre* 5 C^5, *qui forment* 12 *gerbes. Chaque droite* s^ι, $\iota = 1, 2, ..., 12$, de cette surface *est la droite adjointe des lignes courbes* C^5, *appartenant à une gerbe.*

Par chaque point simple de la surface Ψ^6, *qui n'est situé sur aucune droite* s^ι, *passent* 12 *faisceaux des courbes* C^5, *appartenant à* Ψ^6.

Par chacun des deux points simples da la surface Ψ^6 *passent* 12 *courbes* C^5. Nous démonstrerons facilement (voir N^0 12 la justesse des relations:

Par chaque point double H *de la surface* Ψ^6, qui n'est situé sur aucune des 12 droites s^ι de cette surface, *passent* 24 *faisceaux de courbes* C^5 *appartenant à* Ψ^6. *Par chaque tel point double* H *passent* 12 *courbes* C^5, *et chacune de ces courbes possède au point* H *un point double.*

[14]) R. Sturm, l. c. 2), Nr. 497.

Par chacun de tels 36 *points doubles* S^ι *de la surface* Ψ^6, qui sont les points de rencontre des 12 droites s^ι avec la courbe double R_3^6 de cette surface, *passent* 12 *faisceaux de courbes gauches* C^5.

Si la courbe C^5, située sur la surface Ψ^6 et coupant en un point sa droite adjointe s^ι, *coupe une de ces* 11 *restantes droites* s^ι de cette surface, *ce point d'intersection appartiendra à la courbe gauche double* R_3^6 de la surface Ψ^6.

Puisque la courbe C^5 et sa droite adjointe s^ι peuvent être considérees comme courbe C^6, et la droite s^ι est (N^0 7) la trisécante de la courbes R_3^6, donc du dernier théorème du N^0 14 il résulte directement:
La ligne gauche unicursale C^5 *de la surface* Ψ^6 *coupe la courbe gauche double* R_3^6 de cette surface *en* 13 *points.*

16. Lignes gauches unicursales C^4 sur la surface Ψ^6. Supposons que le sommet C_i du cône Γ_i^2 n'appartient pas à la quadrique Ω_i^2, mais il est un point de l'arête $u_i = \sigma_i^1 \sigma_i^2$ des deux plans quelconques des 12 plans σ_i^ι. Les faisceaux de plans, satisfaisant les relations (3) et (13), engendrent alors la courbe C^6, qui (N^0 11 et N^0 12) se décompose en deux droites $s^1 = \sigma_i^1 \sigma_k^1 \sigma_l^1$ et $s^2 = \sigma_i^2 \sigma_k^2 \sigma_l^2$ et en [15]):
la ligne gauche unicursale C^4 *d'ordre* 4 *et d'espèce* 2, située sur la surface curviligne Ψ^6. *Ces droites* s^1 et s^2 sont appelées *les droites adjointes* de la courbes C^4 et *sont les unisécantes de la courbe* C^4.

De ces considérations du N^0 12 il résulte, que: La courbe gauche unicursale C^4 d'ordre 4 et d'espèce 2 est engendrée par les projectivités aux (19) et (20). Par C^4 passent la surface curviligne Γ^3 d'ordre 3 et les surfaces gauches de quatrième degré et de sixième rang Γ_{ik}^4, Γ_{il}^4, Γ_{kl}^4, $\Gamma_{il}'^4$, $\Gamma_{kl}'^4$, ..., pour lesquelles les droite adjointes s^1 et s^2 sont les génératrices communes. Les génératrices de ces surfaces gauches sont les unisécantes de la courbe C^4.

Pour les points différents C_i de la droite $u_i = \sigma_i^1 \sigma_i^2$, qui ne sont situés ni sur la quadrique Ω_i^2 ni sur aucune des 10 plans restants σ_i^ι, nous obtiendrons l'ensemble ∞^1 (un faisceau) de lignes courbes C^4. Après avoir considéré touts les couples des plans σ_i^ι, où $\iota = 1, 2, ..., 12$, nous obtiendrons $\binom{12}{2} = 66$ faisceaux de courbes C^4. Si le point $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ est un point simple de la surface Ψ^6, le point $H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$ est un point quelconque de la courbe R_3^6, respectiv. le point $S^\iota = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ est un point de rencontre de la droite s^ι avec la courbe gauche R_3^6, —

[15]) R. Sturm, l. c. 2), Nr. 497.

alors à l'aide des points d'intersection C_i de la droite $u_i = \sigma_i^1 \sigma_i^2$ et des plans α_i, ε_i et φ_i nous obtiendrerons: a) une courbe C^4 passant par ce point A, b) deux courbés C^4, qui passent par le point H, c) une courbe C^4 passant par le point S^ι. Puisque il y a 66 droites $u_i = \sigma_i^1 \sigma_i^2$, alors:

Sur la surface étudiée Ψ^6 *il y a* ∞^1 *de lignes gauches unicursales* C^4 *d'ordre* 4 *et d'espèce* 2, *formant* 66 *faisceaux. Toutes les deux droites* s^ι, où $\iota = 1, 2, \ldots, 12$, *de la surface* Ψ^6 *sont les droites adjointes à ces courbes* C^4, *qui appartiennent à un faisceau.*

Par chaque point simple de la surface Ψ^6, qui n'est situé sur aucune droite s^ι de cette surface, *passent* 66 *courbes* C^4 *appartenant à* Ψ^6.

Par chaque point double H de la surface Ψ^6, qui n'est situé sur aucune droite s^ι de cette surface, *passent* 132 *lignes courbes* C^4, *appartenant à* Ψ^6.

Par chacun de tels 36 *points doubles* S^ι de la surface Ψ^6, qui sont les points de rencontre de 12 droites s^ι avec la courbes double R_3^6 de cette surface, *passent* 66 *courbes* C^4, *situées sur* Ψ^6.

Par analogie comme dans le numéro 13, nous pouvons démontrer que: *Si la courbe* C^4, située sur la surface Ψ^6 et coupant en un point chacune des deux droites adjointes s^1 et s^2 de cette courbe C^4, *coupe une des* 10 *droites restantes* s^ι de cette surface, — alors *le point d'intersection appartient à la ligne gauche double* R_3^6 de la surface Ψ^6.

Puisque la courbe C^4 et leurs deux droites adjointes s^1 et s^2 peuvont être considérees comme courbe C^6, et la droite s^ι est (N⁰ 7) la trisécante de la courbe R_3^6, donc du dernier théorème du N⁰ 14 il résulte directement:

La ligne gauche unicursale C^4 *d'ordre* 4 *et d'espèce* 2, située sur la surface étudiée Ψ^6, *coupe la courbe gauche double* R_3^6 de cette surface *en* 10 *points.*

17. Lignes gauches C^3 sur la surface Ψ^6. Supposons, que la sommet C_i du cône Γ_i^2 est le point d'intersection $C_i = \sigma_i^1 \sigma_i^2 \sigma_i^3$ de trois plans quelconques des 12 plans σ_i^ι. Les faisceaux de plans, satisfaisant les relations (3) et (13), engendrent alors la courbe C^6, qui (N⁰ 11 et N⁰ 12) décompose en trois droites $s^1 = \sigma_i^1 \sigma_k^1 \sigma_l^1$, $s^2 = \sigma_i^2 \sigma_k^2 \sigma_l^2$, $s^3 = \sigma_i^3 \sigma_k^3 \sigma_l^3$ et en [16]): *la ligne courbe gauche du troisième ordre* C^3, située sur la surface Ψ^6. *Ces droites* s^1, s^2 *et* s^3, appelés *droites adjointes* de la courbe C^3, *sont les unisécantes de la ligne* C^3.

[16]) R. Sturm, l. c. 2), Nr. 497.

Il résulte des considérations du N⁰ 12, que: La ligne gauche C^3 de la surface Ψ^6 est engendrée par les projectivités aux (19) et (20). Par C^3 passent la surface curviligne Γ^3 et les surfaces gauches unicursales de quatrième degré et de sixième rang Γ_{ik}^4, Γ_{il}^4, Γ_{kl}^4, $\Gamma_{il}'^4$, $\Gamma_{kl}'^4$, ..., pour lesquelles les droites adjointes s^1, s^2 et s^3 de la courbe C^3 sont les génératrices communes. Les génératrices de ces surfaces gauches sont les unisécantes de la courbe C^3.

Après avoir considéré tous les triplets de plans σ_i^ι, où $\iota = 1, 2, \ldots, 12$, nous obtiendrons $\binom{12}{3} = 220$ points $C_i = \sigma_i^1 \sigma_i^2 \sigma_i^3$. Alors nous concluons, que: *Sur la surface curviligne* Ψ^6 *il y a* 220 *lignes gauches* C^3.

Par analogie comme dans le numéro 13 et 16, nous pouvons démontrer: *Si la ligne gauche* C^3, située sur la surface Ψ^6 et coupant en un point chacune des trois droites leur adjointes s^1, s^2 et s^3, *coupe une des* 9 *droites restantes* s^ι de cette surface, alors *le point d'intersection appartient à la ligne courbe double* R_3^6 de cette surface.

La courbe gauche C^3, située sur la surface Ψ^6, *coupe la courbe gauche double* R_3^6 de cette surface *en* 7 *points.*

18. Lignes gauches T^3 et V^3 sur la surface Ψ^6. Supposons maintenant (voir N⁰ 12), que le point C_i est un point quelcouque de la quadrique Ω_i^2 et n'est situé sur aucun des 12 plans σ_i^ι. Soient t_i et v_i les deux génératrices de la quadrique Ω_i^2, qui se coupent en le point $C_i = t_i v_i$. Les différents triplets de plans homologues des faisceaux projectifs, satisfaisant les relations (4), respectiv. (5) du N⁰ 1, se coupent en les points $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l, \ldots$ de la ligne gauche du troisième ordre T^3, respectiv. en les points $B = \beta_i \beta_k \beta_l, \ldots$ de la courbe gauche du troisième ordre V^3. Puisque les plans homologues de ces faisceaux sont aussi les éléments homologues des gerbes de second degré, remplissant la relation (2), il résulte donc du N⁰ 7, que les courbes T^3 et V^3 sont situées sur la surface Ψ^6. Mais par ex. le point $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ de la surface Ψ^6 est (N⁰ 11) le point $A = \alpha_i' \alpha_k' \alpha_l$, où les plans α_i', α_k' et α_l sont les éléments homologues des gerbes, satisfaisant la relation (12) du N⁰ 10, et sont les éléments des faisceaux aux (14). Nous concluons, que la courbe T^3 est engendrée par les faisceaux aux (14) et la courbe V^3 est engendrée par les faisceaux aux (15) du N⁰ 10. On a donc:

Les faisceaux projectifs des plans, satisfaisant les relations (4) et (14), respectiv. (5) et (15), *sont les courbes gauches du troisième ordre* T^3, resp. V^3, *situées sur la surface étudiée* Ψ^6.

Pour les génératrices différentes $t_i, \ldots$ de la quadrique Ω_i^2, qui appartiennent à un système, nous obtiendrons ∞^1 de courbes $T^3, \ldots$ et pour les génératrices différentes $v_i, \ldots$ du second système de cette quadrique nous obtiendrons ∞^1 de courbes $V^3, \ldots$. Soit donné sur la surface Ψ^6 un point simple quelconque $D = \delta_i \delta_k \delta_l$. Puisque δ_i est le plan tangent à la quadrique Ω_i^2 et la coupe suivant les génératrices t_i et v_i, par le point D passe donc une ligne courbe T^3 et une courbe V^3. Nous déterminerons facilement les courbes T^3 et V^3, qui passent: a) par le point double $H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$, b) par le point double $S^\iota = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ de la surface Ψ^6. Alors:

Sur la surface curviligne Ψ^6 il y a deux systèmes ∞^1 de lignes gauches d'ordre 3: un système de courbes T^3 et un système de courbes V^3.

Par chaque point simple de la surface Ψ^6, qui n'est situé sur aucune des 12 droites s^ι de cette surface, *passent une courbe T^3 et une courbe V^3,* appartenant à la surface Ψ^6.

Par chaque point double de la surface Ψ^6, qui n'est situé sur aucune droite s^ι de cette surface, *passent deux courbes T^3 et deux courbes V^3,* appartenant à Ψ^6.

Par chacun des tels 36 points doubles de la surface Ψ^6, qui sont les points de rencontre de 12 droites s^ι avec la courbe gauche double R_3^6 de cette surface, *passent une courbe T^3 et une courbe V^3,* appartenant à Ψ^6.

Par analogie, comme dans le N⁰ 13, nous pouvons démontrer: *Si la courbe T^3* (ou V^3), située sur la surface Ψ^6, *coupe l'une des* 12 *droites s^ι* de cette surface, alors *le point d'intersection appartient à la courbe double R_3^6* de cette surface.

Deux génératrices quelconques t_i et v_i de la quadrique Ω_i^2 se coupent en le point D et déterminent le plan tangent $\delta_i = t_i v_i$. Le plan δ_i est l'élément commun des faisceaux (t_i) et (v_i). Alors les courbes T^3 et V^3, qui sont engendrées par les faisceaux aux (4) et (5), ont un point commun $D = \delta_i \delta_k \delta_l$. Si D est le point simple de la surface Ψ^6, conformément au principe adopté, il ne peut se trouver sur aucune droite s^ι de cette surface. Si le point D est le point double $H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$ ou $S^\iota = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$, alors le plan par ex. δ_i doit coïncider avec la plan ε_i.

Il faut rémarquer, que les courbes T^3 et V^3 — peuvent avoir encore à part le point D un second point d'intersection. En effet par le point double quelconque H de la surface Ψ^6 passent, comme nous savons, deux courbes T^3 et T_0^3 et deux courbes V^3 et V_0^3. Pour T^3 et V^3 les faisceaux relatifs (t_i) et (v_i) au (4) et (5) ont le plan commun p. ex. $\delta_i = \varepsilon_i = t_i v_i$. Par analogie pour les courbes T_0^3 et V_0^3 les faisceaux relatifs (t_i^0) et (v_i^0) ont le plan commun $\varphi_i = t_i^0 v_i^0$, où t_i^0 et v_i^0 sont les génératrices de la quadrique Ω_i^2. Si nous prénons en considération, que le plan tangent $\alpha_i = t_i v_i^0$ à la quadrique Ω_i^2 est un élément commun des faisceaux (t_i) et (v_i^0), les courbes T^3 et V_0^3, à part le point H, possèdent alors le point commun $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$. En même temps le plan tangent $\beta_i = t_i^0 v_i$ à la quadrique Ω_i^2 est un élément commun des faisceaux (t_i^0) et (v_i). Les lignes courbes T_0^3 et V^3 se coupent donc en les points H et $B = \beta_i \beta_k \beta_l$. Et alors:

Deux lignes gauches quelconques du troisième ordre T^3 et V^3, situées sur la surface Ψ^6 et appartenant aux systèmes différents, *se coupent* en général *en un point.*

Si ce point d'intersection est un point simple de la surface Ψ^6 *il ne peut être situé sur aucune des* 12 *droites s^ι* de cette surface.

Si le point de rencontre des courbes T^3 et V^3 est un point double de la surface Ψ^6 *il est alors soit un point quelconque de la courbe double R_3^6* de la surfaae Ψ^6 *soit un point de rencontre de la courbe R_3^6 avec la droite s^ι* de cette surface.

Si les courbes T^3 et V^3 se coupent en deux points, l'un d'eux *est un point simple et le second un point double* de la surface Ψ^6.

Pour chaque génératrice t_i (respectiv. v_i) de la quadrique Ω_i^2 nous obtiendrons sur la surface Ψ^6 — conformément à la relation (4), resp. (5) — la courbe T^3 (resp. V^3). Puisque chaque génératrice t_i de la quadrique Ω_i^2 coupe toutes génératrices v_i de cette quadrique et réciproquement, on a donc:

Chaque ligne gauche T^3 (resp. V^3) de la surface Ψ^6 *coupe toutes les lignes gauches V^3* (resp. T^3) de cette surface.

Des considérations précedentes il résulte, que deux courbes T^3 et T_0^3, resp. V^3 et V_0^3, qui appartiennent au même système, peuvent se couper seulement en le point $H = \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi_i \varphi_k \varphi_l$ de la courbe double R_3^6 de la surface Ψ^6. Nous démontrerons plus loin, que la courbe p. ex. T^3 coupe R_3^6 en 8 point H. Chaque courbe T^3 coupe donc 8 courbes T^3 et ne coupe pas ∞^1 d'autres courbes T^3. Les courbes du système V^3 ont la même propriété. On a donc:

Deux lignes gauches quelconques du troisième ordre T^3 et T_0^3, resp. V^3 et V_0^3, situées sur la surface Ψ^6 et appartenant au même système, *n'ont* en général *aucun point commun.*

Si deux des courbes T^3 et T_0^3 (resp. V^3 *et* V_0^3) *se coupent, le point de rencontre est le point double* de la surface Ψ^6 *et n'est situé sur aucune des* 12 *droites s^ι* de cette surface.

Chaque courbe T^3 (resp. V^3) *coupe* 8 *courbes* T^3 (resp. V^3) *appartenant au même système.*

Des considérations du N⁰ 14 on sait que: a) les surfaces curviligne Γ^3 et Δ^3 se coupent suivant la courbe, qui se décompose en courbes R_3^6 et G^3, b) les lignes gauches C^6, D^6 et G^3 ont deux points communs A et B, c) la courbe C^6 coupe la surface Δ^3 en les points A, B et 16 points restants P, d) les points P sont les points d'intersection des courbes C^6 et R_3^6. Conformément à nos considérations les sommets C_i et D_i des cônes Γ_i^2 et Δ_i^2, qni sont les bases des faisceaux aux (3) et (3a), n'étaient pas situés sur la quadrique Ω_i^2.

Etant donné les points quelconques $C_i = t_i v_i$ et $D_i = t_i^0 v_i^0$ de la quadrique Ω_i^2, le faisceau de plans (Γ_i^2), resp. (Δ_i^2) se décompose en deux faisceaux (t_i) et (v_i), resp. (t_i^0) et (v_i^0), cités aux (4) et (5). Alors la ligne gauche C^6 se décompose en deux courbes T^3, V^3 et la courbe gauche D^6 se décompose en deux courbes T_0^3 et V_0^3, où les points A et B, désignes au b), sont naturellement les points d'intersection des courbes T^3 et V_0^3, resp. T_0^3 et V^3. Conformément à la condition au c), la courbe T^3 coupe la surface Δ^3 en le point A et en les 8 points P. La courbe V^3 rencontre Δ^3 en le point B et en les 8 points P. De la relation au d) il résulte directement le théorème:

Chaque ligne courbe gauche du troisième ordre T^3 (resp. V^3), située sur la surface curviligne Ψ^6, *coupe la courbe gauche double* R_3^6 de cette surface *en* 8 *points.*

19. Coniques sur la surface Ψ^6. Supposons maintenent (voir N⁰ 18), que le point C_i est situé *sur la quadrique* Ω_i^2 *et dans l'un* des 12 *plans* σ_i^ι, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$. L'élément σ_i^ι est le plan tangent à la quadrique Ω_i^2 et le coupe suivant deux génératrices t_i^ι et v_i^ι. Faisons de sorte que ces génératrices soient les axes des faisceaux de plans au (4) et (5) du N⁰ 1. Les faisceaux de plans, satisfaisant la relation (14), engendrent alors la ligne gauche T_ι^3 d'ordre 3, qui (N⁰ 18) appartient à la surface Ψ^6 et qui se décompose en la droite $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ et en *la conique* T_ι^2, dont les points sont les éléments $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l, \ldots$. Les faisceaux aux (5) engendrent la ligne gauche V_ι^3, qui appartient à Ψ^6 et se décompose en la droite s^ι et en *la conique* V_ι^2, ayant les points $B = \beta_i \beta_k \beta_l, \ldots$. Nous appellerons cette droite s^ι *la droite adjointe* de la conique T_ι^2 et de la conique V_ι^2. Comme dans nos considérations il y a 12 plans $\sigma_i^\iota = t_i^\iota v_i^\iota$, nous obtiendrons donc sur la surface Ψ^6 12 coniques T_ι^2 et 12 coniques V_ι^2.

Le point p. ex. $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ de la conique T_ι^2 et de la surface Ψ^6 est (N⁰ 11) le point $A = \alpha_i' \alpha_k' \alpha_i$, où les plans α_i', α_k' et α_l sont les éléments homologues des gerbes, satisfaisant la relation (12) du N⁰ 10, et les éléments des faisceaux au (14). Il est évident, que la conique T_ι^2 est aussi engendrée par les faisceaux aux (14), et la conique V_ι^2 par les faisceaux aux (15). On a donc:

Sur la surface curviligne Ψ^6 *il y a* 24 *coniques, qui se divisent en groupe de* 12 *coniques* T_ι^2 *et en groupe de* 12 *coniques* V_ι^2, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$. *Chaque conique* T_ι^2, resp. V_ι^2, *est engendrée par les faisceaux projectifs des plans*, satisfaisant les relations (4) et (14), resp. (5) et (15). *Chaque droite* $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$ de la surface Ψ^6 *est la droite adjointe à une conique* T_ι^2 et *à une conique* V_ι^2.

Des relations (4) et (5) nous voyons, que les faisceaux $(t_i) \barwedge (t_k)$ engendrent la quadrique Γ_{ik}^2, ayant les génératrices $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$, $a_{ik} = \alpha_i \alpha_k, \ldots$, et les faisceaux $(v_i) \barwedge (v_k)$ engendrent la quadrique Δ_{ik}^2, ayant les génératrices s^ι, $b_{ik} = \beta_i \beta_k, \ldots$. Le point p. ex. $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$ de la quadrique T_ι^2 est le point de rencontre $A = a_{ik} \alpha_l$ de la génératrice a_{ik} de la quadrique Γ_{ik}^2 avec de plan α_l. Le point $B = \beta_i \beta_k \beta_l$ de la conique V_ι^2 est le point de rencontre $B = b_{ik} \beta_l$ de la génératrice b_{ik} avec de plan β_l. Nous concluons de là, que la conique T_ι^2 est située sur la quadrique Γ_{ik}^2, et la conique V_ι^2 est située sur la quadrique Δ_ι^2, et les génératrices s^ι, $a_{ik}, \ldots$ sont les unisécantes de la conique T_ι^2 et les génératrices s^ι, $b_{ik}, \ldots$ sont les unisécantes de la conique V_ι^2.

Si la conique T_ι^2 coupait une droite s^ι de la surface Ψ^6, par ex. la droite $s^1 = \sigma_i^1 \sigma_k^1 \sigma_l^1$ en un point $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l$, par A passeraient deux triplets de plans homologues $\alpha_i \alpha_k \alpha_l$ et $\sigma_i^1 \sigma_k^1 \sigma_l$, alors A devrait coïncider avec un des trois points d'intersection S^1 de la droite s^1 avoc la courbe gauche double R_3^6 de la surface Ψ^6. On a donc:

Chaque droite $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$, *de la surface* Ψ^6, *qui est la droite adjointe à deux coniques* T_ι^2 et V_ι^2 de cette surface, *est l'unisécante de la conique* T_ι^2 et *de la conique* V_ι^2.

Nous pcuvcns considérer (N⁰ 18) la conique T_ι^2 et sa droite adjointe s^ι comme une courbe déformée T^3 d'ordre 3. Puisque T^3 coupe (voir N⁰ 18) la courbe double R_3^6 de la surface Ψ^6 en 8 points et la droite s^ι est (N⁰ 11) la trisécante de la courbe R_3^6, il en résulte la justesse du théorème:

Chaque conique de la surface curviligne Ψ^6 *coupe la courbe double* R_3^6 de cette surface *en* 5 *points.*

Pour $\iota = 1, 2$ nous aurons deux coniques T_1^2 et T_2^2, et deux coniques V_1^2 et V_2^2. Etant donnés — (voir les relations (4) et (5)) — les faisceaux de plans (t_i^1), (t_i^2), (v_i^1) et (v_i^2), nous remarquerons facilement, que ni les deux premiers faisceaux ni les deux derniers faisceaux ne peuvent posséder un plan commun, mais le premier et le quatrième faisceaux possèdent un plan commun $\gamma_i = t_i^1 v_i^2$, et le second et le troisième faisceaux possèdent un plan commun $\delta_i = t_i^2 v_i^1$. Les coniques T_1^2 et T_2^2 (resp. V_1^2 et V_2^2) n'ont pas en général de point commun, mais les coniques T_1^2 et V_2^2 se coupent en le point $C = \gamma_i \gamma_k \gamma_l$, et les coniques T_2^2 et V_1^2 se coupent en un point $D = \delta_i \delta_k \delta_l$. Et alors:

Chaque deux coniques de la surface Ψ^6, *qui appartiennent au même groupe de coniques* T_ι^2, resp. V_ι^2, *n'ont* en général *aucun point commun.*

Chaque deux conique de la surface Ψ^6, *qui appartiennent aux différents groupes et qui n'ont pas de droite adjointe commune* $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$, *se coupent* en général *en un point.*

20. Sections planes de la surface Ψ^6. En vertu des considérations précédentes nous démontrerons, que:

Le plan quelconque π, qui ne passe ni par aucune droite $s^\iota = \sigma_i^\iota \sigma_k^\iota \sigma_l^\iota$, ni par aucune conique T_ι^2, resp. V_ι^2, de la survace curviligne Ψ^6, *coupe cette surface suivant la courbe* P^6 *d'ordre* 6. *La courbe plane* P^6 a 6 *points doubles,* appartenant à la courbe double R_3^6 de la surface Ψ^6, elle est donc en général une *courbe de la classe* 18 et *de genre* 4.

Si le plan sécant π *est le plan tangent* au point simple quelconque à la surface Ψ^6, alors: *la courbe d'intersection* P^6 *possède* 7 *points doubles* et *elle est de la classe* 16 et *de genre* 3.

Si le plan sécant π *passe par l'une des* 12 *droites* s^ι de la surface Ψ^6, alors π *coupe cette surface* Ψ^6 *suivant cette droite* s^ι et *suivant la courbe* P^5 *d'ordre* 5. *Les trois points de rencontre de la droite* s^ι *avec la courbe double* R_3^6 de la surface Ψ^6 *sont les points simples de la courbe* P^5. *La courbe* P^5 *est* en général *de la classe* 14, *de genre* 3 et *elle a* 3 *points doubles,* situés sur la courbe R_3^6.

Si sur le plan sécant π *est située l'une des* 24 *coniques* de la surface Ψ^6, l'élément π *coupe cette surface encore suivant la courbe* P^4 *d'ordre* 4. *Chacun des* 5 *points d'intersection* de cette conique avec la ligne gauche double R_3^6 de la surface Ψ^6 *est un point simple de la courbe* P^4. *La courbe* P^4 *est de la classe* 10, *de genre* 2 et *elle a un point double,* situé sur la courbe R_3^6.

21. Transformations planes de la surface Ψ^6. La surface curviligne Ψ^6 est engendrée (N^0 7) par les trois gerbes collinéaires des plans du second degré:

$$(\Omega_i^2) \varkappa (\Omega_k^2) \varkappa (\Omega_l^2) \tag{2}$$

où $i \neq k \neq l$; $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$. Faisons correspondre ces gerbes entre elles dans les espaces collinéaires:

$$\Sigma_i \varkappa \Sigma_k \varkappa \Sigma_l \tag{1}$$

qui n'appartiennent pas (N^0 1) au même faisceau d'espaces collinéaires.

Pour *transformer* la surface Ψ^6 en un plan quelconque établissons d'abord *la collinéation générale*

$$\Sigma_l \varkappa \Sigma_0 \tag{21}$$

entre l'espace Σ_l et l'espace nouveau Σ_0. De la relation (21) résulte directement la collinéation entre les gerbes de plans de degré 2:

$$\Omega_l^2(\alpha_l, \beta_l, \ldots, \rho_l, \ldots) \varkappa \Omega_0^2(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \rho_0, \ldots) \tag{22}$$

dont les bases sont les quadriques homologues Ω_l^2 et Ω_0^2 de ces espaces. Ensuite entre les plans de la gerbe ainsi obtenus (Ω_0^2) et les droites du système plan (ρ_0), ayant pour base un plan tangent quelconque ρ_0 à la quadrique Ω_0^2, établissons cette *correspondance* (1, 1):

$$\Omega_0^2(\alpha_0, \beta_0, \ldots) \ \vartheta^* \ \rho_0(a_0, b_0, \ldots) \tag{23}$$

où aux différents plans tangents $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ à la quadrique Ω_0^2 faisons correspondre les droites $a_0 = \rho_0 \alpha_0$, $b_0 = \rho_0 \beta_0, \ldots$, qui sont les arêtes du plan fondamental ρ_0 avec ces plans tangents. Dans la correspondance biunivoque (Ω_0^2) ϑ^* (ρ_0) construite de cette manière *le plan* ρ_0 et *les génératrices* t_0^* et v_0^* de la quadrique Ω_0^2, qui sont afférentes au plan ρ_0, sont nommés *les éléments principaux.* En effet au plan ρ_0, considéré comme élément de la gerbe (Ω_0^2), faisons correspondre toutes les droites du système plan (ρ_0) et aux droites t_0^* et v_0^* du système plan (ρ_0) faisons correspondre dans la gerbe (Ω_0^2) les faisceaux de plans (t_0^*) et (v_0^*). Si le plan ρ_0 coupe les génératrices quelconques t_0 et v_0 de la quadrique Ω_0^2 en les points $T_0 = \rho_0 t_0$ et $V_0 = \rho_0 v_0$, de la relation (23) résultent directement les perspectivités des faisceaux:

$$t_0(\nu_0 = t_0 v_0^*, \alpha_0, \ldots) \overline{\overline{\wedge}} \ T_0(v_0^*, a_0, \ldots)$$

$$\text{et} \quad v_0(\tau_0 = v_0 t_0^*, \beta_0, \ldots) \overline{\overline{\wedge}} \ V_0(t_0^*, b_0, \ldots). \tag{24}$$

D'un point quelconque C_0 de l'espace Σ_0, qui n'est situé ni sur Ω_0^2 ni sur ρ_0, déterminons le cône circonscrit Γ_0^2 à la quadrique Ω_0^2 et coupons — le par le plan ρ_0 suivant la conique C_0^2. Les plans $\varepsilon_0 = C_0 t_0^*$, $\varphi_0 = C_0 v_0^*$, α_0, $\beta_0, \ldots$ de la gerbe (Ω_0^2), passant par le point C_0, engendreront un faisceau de plans (Γ_0^2), dont la base sera le cône Γ_0^2, et les droites homologues t_0^*, v_0^*, a_0, $b_0, \ldots$ du système plan (ρ_0) formeront un faisceau de droites tangentes (C_0^2) à la conique C_0^2, et la perspectivité suivante a naturellement lieu:

$$\Gamma_0^2(\varepsilon_0 = C_0\, t_0^*,\ \varphi_0 = C_0\, v_0^*,\ \alpha_0,\ \beta_0, \ldots) \overline{\wedge}\ C_0^2(t_0^*,\ v_0^*,\ a_0,\ b_0, \ldots) \tag{25}$$

Profitant de ces relations nous pouvons *transformer la surface curviligne* Ψ^6 *en un plan* ρ_0; à chaque *point* simple quelconque $A = \alpha_i\, \alpha_k\, \alpha_l$ de la surface Ψ^6 (N^0 7) — à l'aide du plan α_0 de la gerbe (Ω_0^2) — correspond une seule *droite* $a_0 = \rho_0\, \alpha_0$ dans le plan ρ_0, et réciproquement. A chaque point double $B = \beta_i\, \beta_k\, \beta_l = \beta_{i'}\, \beta_{k'}\, \beta_{l'}$ de la surface Ψ^6, située sur la ligne gauche double R_3^6, correspondent deux droites $b_0 = \rho_0\, \beta_0$ et $b_0^1 = \rho_0\, \beta_0^1$ dans le plan ρ_0. A chaque droite $s^\iota = \sigma_i^1\, \sigma_k^1\, \sigma_l^1$, $\iota = 1, 2, \ldots, 12$, de la surface Ψ^6 correspond une seule droite $s_0^\iota = \rho_0\, \sigma_0^\iota$ dans le plan ρ_0. Prenant en considération la relation (3) du N^0 1 nous constaterons facilement, que les points différents $A = \alpha_i\, \alpha_k\, \alpha_l$, $B = \beta_i\, \beta_k\, \beta_l, \ldots$ de la ligne gauche unicursale C^6 d'ordre 6, située (N^0 12) sur la surface Ψ^6, se transformeront — voir la relation (25) — en les droites tangentes $a_0 = \rho_0\, \alpha_0$, $b_0 = \rho_0\, \beta_0, \ldots$ à la conique C_0^2, dont les tangentes sont aussi les droites principales t_0^* et v_0^*. Si la courbe C^6 se décompose (N^0 15) en la droite $s = \sigma_i\, \sigma_k\, \sigma_l$ et en la ligne gauche C^5 d'ordre 5, la courbe unicursale C^5 se transformera en la conique C_0^2, dont les tangentes sont les droites pricipales t_0^*, v_0^* et la droite $s_0 = \rho_0\, \sigma_0$.

Si la ligne gauche C^6 se décompose (N^0 16) en deux droites $s^1 = \sigma_i^1\, \sigma_k^1\, \sigma_l^1$, $s^2 = \sigma_i^2\, \sigma_k^2\, \sigma_l^2$ et en la courbe gauche unicursale C^4 d'ordre 4, alors dans le plan ρ_0 l'image de la courbe C^4 sera la conique C_0^2, dont les tangentes sont les droites principales t_0^*, v_0^* et le droites $s_0^1 = \rho_0\, \sigma_0^1$, $s_0^2 = \rho_0\, \sigma_0^2$. De même si la ligne gauche C^6 se décompose (N^0 17) en trois droites s^1, s^2, s^3 et un une courbe gauche C^3 d'ordre 3, aux points différents A, $B, \ldots$ de la courbe C^3 correspondent les tangentes a_0, $b_0, \ldots$ de la conique C_0^2, dont les tangentes sont aussi les droites pricipales t_0^*, v_0^* et les droites s^1, s^2, s^3. Nous constaterons facilement, que les points différents A, $B, \ldots$ de la ligne gauche T^3 d'ordre 3, située (N^0 18) sur la surface Ψ^6, se transformeront en droites du faisceau (T_0), dont le sommet $T_0 = t_0\, \rho_0$ est sur la droite principale v_0^* du système plan (ρ_0). Par analogie la ligne gauche V^3 d'ordre 3, située sur la surface Ψ^6, se transformera en un faisceau de droites (V_0), dont le sommet $V_0 = v_0\, \rho_0$ est sur la droite principale t_0^* du système plan (ρ_0). Enfin on doit remarquer, que la conique T_ι^2, située (N^0 19) sur la surface Ψ^6, se transformera en un faisceau de droites (T_0^ι), dont le sommet est le point de rencontre $T_0^\iota = v_0^*\, s_0^\iota$ des droites v_0^* et $s_0^\iota = \rho_0\, \sigma_0^\iota$. La conique V_ι^2, située sur la surface Ψ^6, se transformera en un faisceau de droites (V_0^ι), dont le sommet est le point $V_0^\iota = t_0^*\, s_0^\iota$.

Nous pouvons construire *une telle transformation* de la surface curviligne Ψ^6 en un plan ω', où à chaque *point* simple A de la surface Ψ^6 correspond un seul *point* A' dans le plan ω', et réciproquement. Dans cebut nous profiterons de toutes les relations de ce numéro et en outre nous établirons *la corrélation générale:*

$$\rho_0(a_0,\ b_0, \ldots,\ t_0^*,\ v_0^*, \ldots)\ \pi\ \omega'(A',\ B', \ldots,\ T^*,\ V^*, \ldots) \tag{26}$$

entre le système plan (ρ_0) au (23) et le système plan (ω'), dont la base est un plan quelconque ω'. De cette corrélation — voir les relations (24) et (25) — nous obtiendrons les projectivités suivantes:

$$T_0(v_0^*,\ a_0, \ldots) \overline{\wedge}\ t'(V^*,\ A', \ldots) \quad \text{et} \quad V_0(t_0^*,\ b_0, \ldots) \overline{\wedge}\ v'(T^*,\ B', \ldots) \tag{24a}$$

$$C_0^2(t_0^*,\ v_0^*,\ a_0,\ b_0, \ldots) \overline{\wedge}\ C'^2(T^*,\ V^*,\ A',\ B', \ldots) \tag{25a}$$

Des relations géométriques (23) et (26) résulte directement *une correspondance biunivoque:*

$$\Omega_0^2(\alpha_0,\ \beta_0, \ldots)\ \vartheta\ \omega'(A',\ B', \ldots) \tag{27}$$

où aux plans tangents différents α_0, $\beta_0, \ldots$ à la quadrique Ω_0^2 correspondent les points A', $B', \ldots$ du système plan (ω'). Au plan ρ_0, passant par les génératrices t_0^* et v_0^* de la quadrique Ω_0^2, correspondent tous les points du système (ω'); aux points T^* et V^* du système plan (ω') correspondent les faisceaux de plans (t_0^*) et (v_0^*) dans la gerbe (Ω_0^2). Le plan ρ_0 et les points T^*, V^* sont donc les *éléments principaux* de la correspondance (1, 1), citée au (27).

De ces considérations résulte *la transformation de la surface curviligne* Ψ^6 *en un plan* ω', où à chaque *point* simple $A = \alpha_i\, \alpha_k\, \alpha_l$ de la surface Ψ^6 (N^0 7) — à l'aide du plan α_0 de la gerbe (Ω_0^2), de la droite $a_0 = \rho_0\, \alpha_0$ du système plan (ρ_0) et de la corrélation $(\rho_0)\ \pi\ (\omega')$ — correspond un seul *point* A' dans le plan ω', et réciproquement. A chaque point double $B = \beta_i\, \beta_k\, \beta_l = \beta_i^1\, \beta_k^1\, \beta_l^1$ de la surface Ψ^6 correspondent deux points B' et $B^{1'}$ dans le plan ω'. A chaque droite $s^\iota = \sigma_i^\iota\, \sigma_k^\iota\, \sigma_l^\iota$ de la surface Ψ^6 correspondent — à l'aide du plan σ_0^ι de la gerbe (Ω_0^2), de la droite $s_0^\iota = \rho_0\, \sigma_0^\iota$ du système plan (ρ_0) et de la corrélation au (26) — un seul point $S^{\iota'}$ dans le plan ω'.

Nous constaterons facilement, que les points différents $A = \alpha_i \alpha_k \alpha_l, \ldots$ de la ligne gauche unicursale C^6 d'ordre 6, située (N^0 12) sur la surface Ψ^6, se transformeront en les points $A', \ldots$ de la conique C'^2, située dans le plan ω' et passant par ses points principaux T^*, V^*. Si la courbe C^6 (reg. $N^0 N^0$ 15, 16 et 17) — se décompose: a) en la droite $s^1 = \sigma_i^1 \sigma_k^1 \sigma_l^1$ et en la ligne gauche unicursale C^5 d'ordre 5; b) en deux droites s^1, s^2 et en la ligne gauche unicursale C^4 d'ordre 4; c) en trois droites s^1, s^2, s^3 et en la ligne gauche C^3 d'ordre 3, alors: les courbes C^5, C^4 et C^3 se transformeront respectiv. en la conique C'^2, qui passe: par les points principaux T^*, V^* et dans le cas: a) par le point $S^{1\prime}$, b) par les points $S^{1\prime}$ et $S^{2\prime}$, c) par les points $S^{1\prime}$, $S^{2\prime}$ et $S^{3\prime}$. Mais les points différents de la courbe gauche T^3 d'ordre 3, située (N^0 18) sur la surface Ψ^6, se transforment en les points de la série (t'), dont la base t' passe par le point principal V^*. Par analogie les points de la ligne gauche V^3 d'ordre 3, située sur la surface Ψ^3, se transforment en les points de la série (v'), dont la base v' passe par le point principal T^*. Enfin les points différents de la conique T_t^2, située (N^0 19) sur la surface Ψ^6, se transforment en les points de la série (t_t'), dont la base est $t' = V^* S^{t\prime}$, et les points de la conique V_t^2, située sur Ψ^6, se transforment en les points de la série (v_t') dont la base est $v_t' = T^* S^{t\prime}$.

Léopol, juin 1941. — Cracovie, octobre 1946.

Exemples des groupes de transformations d'une droite en elle-même qui dépendent de quatre paramètres essentiels

Przykłady grup przekształceń prostej w siebie, które zależą od czterech parametrów istotnych

Par

T. WAŻEWSKI (Cracovie)

Considérons un groupe de transformations

$$\bar{\xi} = \psi(\xi, t_1, \ldots, t_p) \tag{1}$$

où ξ est un point variable sur la droite et $t_1, \ldots, t_p$ désignent les paramètres.

Supposons d'abord que ψ soit une fonction analytique des variables $\xi, t_1, \ldots, t_p$. Depuis Lie on sait que, dans ce cas, le groupe peut dépendre tout au plus de trois paramètres essentiels. Si donc $p > 3$ les paramètres $t_1, \ldots, t_p$ ne peuvent pas être essentiels.

Supposons maintenant que ψ soit de classe C^∞ dans un ensemble Z composé des points $\xi, t_1, \ldots, t_p$ tels que ξ appartient à un intervalle ouvert Δ et $(t_1, \ldots, t_p)$ appartient à un ensemble ouvert Ω qui fait partie de l'espace cartésien à p dimensions.

Ceci veut dire que ψ possède des dérivées partielles (relatives à $\xi, t_1, \ldots, t_p$) de tous les ordres qui sont continues dans Z.

Nous dirons que le groupe (1) jouit au point ξ^* (appartenant à Δ) de la proprieté $W_p(\xi^*)$ lorsque ce groupe envisagé dans un voisinage quelconque (donc arbitrairement petit) de ξ^* dépend de p paramètres *essentiels* $t_1, \ldots, t_p$.

Dans le présent travail nous construisons (cf. Théorème 1 du § 5) l'exemple d'un groupe (1) de classe C^∞ qui jouit de la proprieté $W_4(\xi^*)$