On peut supposer dans la démonstration que $y(x) > 0$ pour $a < x < b$.

On a généralement: $\Delta(\Delta y)^2 = 2\Delta y \Delta^2 y + (\Delta^2 y)^2$, $\Delta(A y^2) = 2 A y \Delta y + A(\Delta y)^2 + [y^2 + \Delta(y^2)]\Delta A$ et par suite, en tenant compte de l'équation proposée: $\Delta(\Delta y)^2 + h^2 \Delta(A y^2) = h^2 (y + \Delta y)^2 \Delta A + h^2 A (\Delta y)^2 + (\Delta^2 y)^2$, donc, $A(x)$ étant positive et le cas $\Delta y = \Delta^2 y = 0$ étant exclu on a: $\Delta(\Delta y)^2 > h^2 [-\Delta(A y^2) + (y + \Delta y)^2 \Delta A]$. En posant dans cette inégalité successivement $x = c - k h$, $x = c - (k-1) h \cdots x = c + (s-1) h$ et en faisant la somme on obtient l'inégalité:

$$(\Delta y)^2_{x=c+sh} - (\Delta y)^2_{x=c-kh} > h^2 [A(c-kh) y^2 (c-kh) - A(c+sh) y^2 (c+sh)] + h^2 \sum_{x=c-kh}^{c+(s-1)h} (y + \Delta y)^2 \Delta A.$$

Or $y^2(c-kh) \geqslant y^2(c+sh)$ donc on a *a fortiori*:

$$(13) \qquad (\Delta y)^2_{x=c+sh} - (\Delta y)^2_{x=c-kh} > h^2 \sum_{x=c-kh}^{c+(s-1)h} [(y + \Delta y)^2 - y^2(c+sh)] \Delta A.$$

Les deux suites $y(c)$, $y(c-h) \cdots y(c-rh)$ et $y(c)$, $y(c+h), \ldots y(c+nh)$ sont non croissantes (en y supprimant le terme $y(c)$ on obtient même des suites décroissantes) on a donc, en tenant compte des hypothèses de l'énoncé, les inégalités:

$$y^2(c+ih) \geqslant y^2(c+sh) \quad (i = -(k-1) \ldots 0, 1 \ldots s).$$

Ainsi donc le 2 membre de (13) est non négatif et le théorème IV en résulte.

Sur les propriétés du potentiel retardé

O własnościach potencjału opóźnionego

Par

WITOLD POGORZELSKI (Warszawa)

Nous démontrerons ici quelques propriétés du potentiel retardé, analogues aux propriétés du potentiel newtonien.

I. On appelle *potentiel retardé d'une charge spatiale* au point $M(x, y, z)$ et au moment t l'intégrale triple suivante:

$$(1) \qquad V(M, t) = \iiint_D \frac{\mu\left(P, t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\tau_P$$

étendue au domaine mesurable D. La fonction $\mu(P, t)$ des coordonnées (ξ, η, ζ) du point d'intégration P et de la variable t est dite la *densité* de la charge spatiale au point P et au moment t. La variable r désigne la distance entre le point d'intégration $P(\xi, \eta, \zeta)$ et le point arbitraire $M(x, y, z)$:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

et enfin c désigne une constante positive.

Nous supposons que la fonction $\mu(\xi, \eta, \zeta; t)$ est définie et admet les dérivées

$$\frac{\partial \mu}{\partial \xi}, \frac{\partial \mu}{\partial \eta}, \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial t}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta \partial t}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta \partial t}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}$$

bornées et intégrables à tous les points intérieurs (ξ, η, ζ) du domaine D et dans l'intervalle $t_0 < t < T$.

Nous allons démontrer que le potentiel retardé de la charge spatiale (1) satisfait au point intérieur quelconque $M_0(x_0, y_0, z_0)$ du domaine D et au moment t, à l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)_{M_0}=-4\pi\mu(M_0, t). \tag{2}$$

On suppose bien entendu que les valeurs de la variable t sont telles que la différence $t-\frac{r}{c}$ est comprise dans l'intervalle (t_0, T).

Pour démontrer la relation (2), considérons la sphère K de centre M_0 située à l'intérieur du domaine D, et décomposons le potentiel $V(M, t)$ au point $M(x, y, z)$ à l'intérieur de la sphère K en deux parties:

$$V(M, t)=V_K(M, t)+V_{D-K}(M, t) \tag{3}$$

égales aux intégrales triples étendues au domaine K et au domaine $D-K$ extérieur à la sphère K.

La partie V_{D-K} admet les dérivées du second ordre qui remplissent la relation

$$\Delta^2 V_{D-K}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V_{D-K}}{\partial t^2}=0 \tag{4}$$

puisque le point $M(x, y, z)$ est extérieur au domaine $D-K$ (Δ^2 désigne l'opérateur de *Laplace*).

Pour calculer les dérivées de la composante $V_K(M, t)$, remarquons qu'on a

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x}=-\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \xi}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

en posant

$$\bar{\mu}(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)=\frac{\mu\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{c}\right)}{r}$$

donc

$$\frac{\partial V_K}{\partial x}=-\iiint\limits_K \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \xi}\cdot d\tau+\iiint\limits_K \frac{1}{r}\frac{\partial \mu\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{c}\right)}{\partial \xi}\, d\tau= \tag{5}$$

$$=-\iint\limits_S \frac{\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\cos\alpha\cdot d\sigma_P+\iiint\limits_K \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)\right] d\tau_P$$

S étant la surface de la sphère K et α l'angle que fait avec l'axe des x la normale extérieure à la surface S au point P.

Il résulte de l'expression (4) l'existence de la seconde dérivée au point $M(x, y, z)$ de la sphère K sous la forme

$$\frac{\partial^2 V_K}{\partial x^2}=-\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]\cos\alpha\cdot d\sigma_P-$$

$$-\iiint\limits_K \frac{x-\xi}{r^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}\right)_{t-\frac{r}{c}} d\tau_P-\frac{1}{c}\iiint\limits_K \frac{x-\xi}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi\,\partial t}\right)_{t-\frac{r}{c}}\cdot d\tau_P=$$

$$=\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]\cos\alpha\cdot d\sigma_P-\iint\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos\alpha\cdot d\sigma_P$$

$$-\iiint\limits_K \frac{x-\xi}{r^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}+\frac{r}{c}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi\,\partial t}\right)_{t-\frac{r}{c}}\cdot d\tau_P.$$

Nous calculerons de la même façon les secondes dérivées par rapport aux variables y et z et nous aurons la relation

$$\Delta^2 V_K-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V_K}{\partial t^2}= \tag{6}$$

$$=\iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\gamma\right]_{t-\frac{r}{c}} d\sigma_P+$$

$$-\iint\limits_S \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi}\cos\alpha+\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\cos\beta+\frac{\partial \mu}{\partial \zeta}\cdot\cos\gamma\right]_{t-\frac{r}{c}}\cdot d\sigma_P+$$

$$-\iiint\limits_K \frac{x-\xi}{r^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}+\frac{r}{c}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi\,\partial t}\right)_{t-\frac{r}{c}} d\tau_P-\iiint\limits_K \frac{y-\eta}{r^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \eta}+\frac{r}{c}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta\,\partial t}\right)_{t-\frac{r}{c}} d\tau_P$$

$$-\iiint\limits_K \frac{z-\zeta}{r^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}+\frac{r}{c}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta\,\partial t}\right)_{t-\frac{r}{c}}\cdot d\tau_P-\frac{1}{c^2}\iiint\limits_K \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}\right)_{t-\frac{r}{c}}\cdot d\tau_P.$$

Si le point M coïncide avec le centre M_0 de la sphère K, on a

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cos\gamma=\frac{d}{dn}\left(\frac{\mu}{r}\right)=-\frac{\mu}{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\mu}{dn}$$

$\frac{d}{dn}$ désignant la dérivée suivant la normale extérieure et ρ — le rayon de la sphère K; il en résulte que la première intégrale dans la relation (6) tend vers la limite

$$-4\pi\mu(M_0,t)$$

si ρ tend vers zéro. Toutes les autres intégrales dans cette relation tendent évidemment vers zéro avec ρ et comme le potentiel $V=V_K+V_{D-K}$ ne dépend pas de la sphère K, nous en concluons, rémarque faite de l'équation (4), que les secondes dérivées du potentiel $V(M,t)$ remplissent, au point arbitraire M_0 du domaine D et au moment t, l'équation:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)_{M_0}=-4\pi\mu(M_0,t).$$

II. On appelle *potentiel retardé* au point $M(x,y,z)$ au moment t *d'une couche double* répartie sur une surface S, l'intégrale suivante:

$$U(M,t)=\iint_S \frac{d}{dn}\left[\frac{\mu\left(P,t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]d\sigma_P= \tag{7}$$

$$=\iint_S \frac{\mu\left(P,t-\frac{r}{c}\right)}{r^2}\cos\varphi\,.\,d\sigma_P+\frac{1}{c}\iint_S \frac{\mu_t'\left(P.\,t-\frac{r}{c}\right)}{r}\cos\varphi\,.\,d\sigma_P$$

où par $\mu(P,t)$ on comprend la densité de la couche. C'est une fonction définie à tous les points P de la surface S et pour toutes les valeurs t dans un intervalle (t_0,T); r désigne la distance entre le point P de la surface S et le point arbitraire $M(x,y,z)$ de l'espace; φ désigne l'angle de la normale intérieure à la surface S au point P avec le vecteur $\overrightarrow{PM}$.

Nous supposons que la fonction $\mu(P,t)$ est continue par rapport au point P sur la surface S et qu'elle admet une dérivée bornée et intégrable par rapport à la variable t. En outre nous supposons que la surface S possède dans tous les points un plan tangent continu.

Si le point M coïncide avec un point P_0 de la surface S même, la fonction $U(M,t)$ est définie par l'intégrale *impropre*

$$U(P_0,t)=\iint_S \frac{d}{dn}\left[\frac{\mu\left(P,t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]_{r_0}d\sigma_P= \tag{8}$$

$$=\iint_S \frac{\mu\left(P,t-\frac{r_0}{c}\right)}{r_0^2}\cos\varphi_0\,.\,d\sigma_P+\frac{1}{c}\iint_S \frac{\mu_t'\left(P,t-\frac{r_0}{c}\right)}{r_0}.\cos\varphi_0\,d\sigma_P$$

r_0 étant la distance P_0P et φ_0 — l'angle de la normale intérieure au point P avec le vecteur $\overrightarrow{PP_0}$. Notre but est d'étudier la discontinuité de la fonction $U(M,t)$ lorsque le point M tend vers le point P_0 de la surface S.

Considérons donc la différence

$$W(M,t)=U(M,t)-\iint_S \frac{\mu(P,t)}{r^2}\cos\varphi\,.\,d\sigma_P \tag{9}$$

entre le potentiel retardé $U(M,t)$ et le potentiel newtonien de double couche de densité $\mu(P,t)$.

On a

$$W(M,t)=\iint_S \frac{\mu\left(P,t-\frac{r}{c}\right)-\mu(P,t)}{r^2}\cos\varphi\,.\,d\sigma+ \tag{9'}$$

$$+\frac{1}{c}\iint_S \frac{\mu_t'\left(P,t-\frac{r}{c}\right)}{r}\cos\varphi\,.\,d\sigma\,.$$

Or, la fonction $\mu(P,t)$ étant dérivable par rapport à la variable t, il existe une constante positive k telle qu'on a

$$\left|\mu\left(P,t-\frac{r}{c}\right)-\mu(P,t)\right|<kr \tag{10}$$

pour tous les points P de la surface S et pour tous les points M d'un domaine borné D' contenant le domaine D limité par la surface S.

Deux intégrales (9') sont donc évidemment continues si le point M traverse la surface S, c. à d. on a

$$\lim_{M\to P_0} W(M,t) = W(P_0,t) = U(M_0,t) - \iint_S \frac{\mu(P,t)}{r_0^2}\cos\varphi_0 \,.\, d\sigma_P \,.$$

Mais on sait bien qu'on a

$$\lim_{M\to P_0} \iint_S \frac{\mu(P,t)}{r^2}\cos\varphi \,.\, d\sigma = \iint_S \frac{\mu(P,t)}{r_0^2}\cos\varphi_0\, d\sigma \pm 2\pi\mu(P_0,t)$$

où le signe supérieure + concerne la valeur limite intérieure à la surface S. Nous avons donc la discontinuité suivante du potentiel retardé de double couche:

$$\lim_{M\to P_0} \iint_S \frac{d}{dn}\left[\frac{\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right] d\sigma_P = \iint_S \frac{d}{dn}\left[\frac{\mu\left(P, t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]_{r_0} d\sigma_P \pm 2\pi\mu(P_0,t).$$

Varsovie, décembre 1947.

Surface d'ordre 6 ayant une courbe gauche double d'ordre 6 et de genre 3

Powierzchnia rzędu szóstego z krzywą skośną podwójną rzędu szóstego i rodzaju trzeciego

Par

ANTONI PLAMITZER (Kraków)

Dans le traité présent j'établis les méthodes d'engendrement projectif d'une surface curviligne Ψ^6 d'ordre 6, ayant une courbe gauche double R_3^6 d'ordre 6 et de genre 3. À cet effet je prends dans trois espaces collinéaires, qui n'appartiennent pas au même faisceau, des surfaces homologues du second degré comme bases pour trois gerbes collinéaires. Je démontre que les triplets des plans homologues de ces gerbes se coupent aux points de la surface étudiée Ψ^6. La courbe double R_3^6 de cette surface est le lieu géométrique des points d'intersection des triplets de droites homologues de ces trois espaces collinéaires. On sait, que les deux de ces trois gerbes collinéaires déterminent la congruence (2,6) du second ordre, de la sixième classe et de la seconde espèce. Parmi les droites de cette congruence et les plans de la troisième gerbe j'établis la correspondance (1,1), et les points d'intersection des éléments homologues de cette correspondance biunivoque sont les points de la surface étudiée Ψ^6. Pour trois congruences je construis 12 droites communes et je montre, qu'elles sont les trisécantes de la courbe R_3^6 et qu'elles sont situées sur la surface Ψ^6. Je donne une généralisation des méthodes projectives mentionnées ci dessus d'engendrement de la surface Ψ^6 en utilisant un faisceau d'espaces collinéaires. Ensuite j'examine les cour-