we get for φ_1 and φ_2 the system of differential equations given for instance by Bethe [5]).

In the first moment it seems perhaps surprising that the substitution (9a, b) leads to the differential equations which appear if we treat the problem in coordinate representation. Let us introduce into T, Eq. (1), instead of the Cartesian space and momentum coordinates x, y, z and ξ, η, ζ the polar coordinates r, Θ, Φ and p, ϑ, φ respectively and replace r by $r = \frac{h}{4\pi p_0}\rho$ and p by $p = p_0 \sigma$ where $p_0 = \frac{E_0}{c}\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Applying the procedure used by Podolsky and Pauling [6]) for a non relativistic hydrogen atom we obtain:

$$T\, Y_{l,m}(\Theta,\Phi)\, h(\rho) = Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)\, i^l \frac{(h/2\pi)^{3/2}}{4\sqrt{2}\, p_0^3} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\infty} h(\rho)\, J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho\sigma}{2}\right) \rho^{3/2}\, d\rho\,.$$

Te application of T to a function of the form:

$$h(\rho)\, Y_{l,m}(\Theta,\Phi) \tag{12}$$

replaces only the variables Θ, Φ of the spherical harmonic by ϑ, φ, while the radial function $h(\rho)$ is subjected to a transformation of the form (9a, b). The factor $i^l \frac{(h/2\pi)^{3/2}}{4\sqrt{2}\, p_0^3}$ causes that eigenfunctions normalized in coordinate representation are transformed into eigenfunctions normalized in momentum representation. i^l settles especially the phases of the particular components of the momentum representation. In accordance with the fact, that the components of the solution of our relativistic problem are in the momentum representation of the form (12), our substitution (9a, b) reintroduces again the radial functions of the space coordinate representation.

Our last considerations give us also another proof for our supposition, that in both the representations the components of the solutions depend upon the harmonics in the same manner.

---

[5]) Cp. H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV/1, sec. ed. Berlin 1933, p. 313, Eq. (9.19).

[6]) E. Podolsky and L. Pauling, Phys. Rev. 34, 109, 1929.

Sur l'équation $\frac{\Delta^2 y}{h^2} + A(x)\, y = 0$

Par

MIECZYSŁAW BIERNACKI (Lublin)

§ 1. On doit à Sturm de celèbres théorèmes de comparaison dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre. En particulier, étant données les deux équations:

(A) $$y''(x) + A(x)\, y(x) = 0$$

(B) $$z''(x) + a(x)\, z(x) = 0$$

où les fonctions $A(x)$ et $a(x)$ sont continues et où $A(x) \geqslant a(x) > 0$ dans un intervalle I, il résulte des théorèmes de Sturm que si les distances entre les zéros consécutifs, situés dans I, de toute intégrale de (B) ne dépassent pas un nombre d, il en est de même avec une intégrale quelconque de (A). En posant $a(x) = m$, on voit ainsi que, si l'on a $A(x) \geqslant m > 0$, les distances entre les zéros consécutifs d'une intégrale quelconque de (A) ne dépassent pas $\pi m^{-\frac{1}{2}}$. Si $A(x)$ est continue et $\geqslant m > 0$ pour tout $x > x_0$ ou pour tout $x < x_0$ toute intégrale de (A) est oscillante c.-à-d. possède quelque soit $x_1 > x_0$ (ou $x_1 < x_0$) des zéros plus grands (ou plus petits) que x_1.

Dans ce travail je me propose d'obtenir des résultats analogues dans le cas d'une équation aux différences finies:

$$\frac{\Delta^2 y}{h^2} + A(x)\, y = 0 \;{}^{1)} \qquad [\Delta^2 y = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]\,.$$

---

[1]) En employant la notation utilisée, par exemple, par N. E. Nörlund (Differenzenrechnung, Berlin, J. Springer, 1924) il faudrait écrire:

$$\overset{2}{\underset{h}{\Delta}} y + A(x)\, y = 0\,.$$

Je vais supposer dans tout ce qui suit que h est positif.

§ 2. Je vais établir tout d'abord un théorème d'oscillation:

Théorème I. *Toute solution continue de l'équation:*

$$\frac{\Delta^2 y}{h^2} + A(x)\, y = 0$$

où $A(x)$ est continue et $\geqslant m > 0$ (m est une constante) pour $x > x_0$ (ou $x < x_0$) est oscillante pour $x > x_0$ (ou $x < x_0$).

Supposons, par exemple, que $A(x)$ soit continue et $\geqslant m$, pour $x > x_0$ et que la solution $y(x)$ soit positive pour $x \geqslant x_1 > x_0$.

Supposons, en premier lieu, que l'on ait $y(x_1 + h) \leqslant y(x_1)$, les différences, $\Delta^2 y(x_1 + nh)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ étant toutes négatives les différences $\Delta y(x_1 + nh)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ sont aussi négatives tandis que leurs valeurs absolues vont en croissant, il en résulte que $y(x_1 + nh) < y(x_1) - n|\Delta y(x_1 + h)|$, d'où une contradiction lorsque $n > y(x_1)\,|\Delta y(x_1 + h)|^{-1}$.

Supposons donc, que la suite $y(x_1 + nh)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ soit croissante. Les différences $\Delta^2 y(x_1 + nh)$ étant toutes négatives, la suite $\Delta y(x_1 + nh)$ est décroissante et tend vers une limite finie, il en résulte, que la suite $\Delta^2 y(x_1 + nh)$ tend vers zéro. Or cela est impossible, car $|\Delta^2 y(x_1 + ny)| > m h^2 y(x_1)$.

La démonstration est toute pareille dans le cas où $A(x)$ est continue et $\geqslant m$ pour $x < x_0$.

§ 3. Considérons maintenant les équations:

$$\frac{\Delta^2 y}{h^2} + A(x)\, y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\Delta^2 z}{h^2} + a(x)\, z = 0 \tag{2}$$

où les fonctions $A(x)$ et $a(x)$ sont continues et où $A(x) \geqslant a(x) > 0$ dans un intervalle I. Je vais établir au sujet de ces équations, deux „théorèmes de comparaison".

Théorème II-a (de comparaison). *Considérons une solution $y(x)$ de (1) définie dans un intervalle (α, β), contenu dans I, telle que $y(\alpha) \geqslant 0$ et que $y(x) > 0$ pour $\alpha < x \leqslant \beta$. Soit n l'entier positif tel que $nh \leqslant \beta - \alpha < (n+1)h$. Si une solution $z(x)$ de (2) est telle que $z(\beta) = y(\beta)$ et $z(\beta - h) = y(\beta - h)$ on a $z(\beta - ih) \geqslant y(\beta - ih)$ $(i = 2, 3, \ldots n)$.*

En supposant que pour $x = \beta - 2h$ on a $z < y$, on obtient des équations (1) et (2) l'inegalité $\Delta^2 y < \Delta^2 z$, donc ausi $\Delta y > \Delta z$ et $z > y$, en contradiction avec notre hypothèse. Ainsi donc on a $z(\beta - 2h) \geqslant y(\beta - 2h)$. Supposons qu'il existe un entier k $(3 \leqslant k \leqslant n)$ tel que l'on ait:

$$z(\beta - ih) \geqslant y(\beta - ih) \qquad (i = 1, 2, \ldots k - 1)$$

et

$$z(\beta - kh) < y(\beta - kh).$$

De la formule générale:

$$\Delta(z\Delta y - y\Delta z) = z\Delta^2 y - y\Delta^2 z + \Delta^2 y\,\Delta z - \Delta^2 z\,\Delta y \tag{3}$$

on tire, en tenant compte de (1) et (2):

$$h^{-2}\Delta(z\Delta y - y\Delta z) = a(z\Delta y - y\Delta z) + (a - A)(z + \Delta z)\, y. \tag{4}$$

En posant pour abréger $z^* = z + \Delta z$ et $y^* = y + \Delta y$ on a $z\Delta y - y\Delta z = z y^* - y z^*$. Pour $x = \beta - 2h$, $z\Delta y - y\Delta z$ est donc égal à $y^*(z - y)$ et par suite positif ou nul, d'après ce qui précède. Au contraire, pour $x = \beta - kh$ l'expression $z\Delta y - y\Delta z$ est négative. En effet, on a alors $y > 0$, $y^* > 0$ et $z^* > 0$, notre assertion est donc évidente lorsque $z < 0$.

Supposons maintenant que $z > 0$, comme on a $z < y$ et $z^* \geqslant y^*$ on a bien $z y^* - y z^* < 0$. Il existe donc un entier s $(2 \leqslant s \leqslant k - 1)$ tel que l'on a:

$$z\Delta y - y\Delta z \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad x = \beta - sh$$

et

$$z\Delta y - y\Delta z < 0 \quad \text{pour} \quad x = \beta - ih \qquad (i = s + 1, \ldots k - 1, k).$$

Remplaçons maintenant x dans l'égalité (4) successivement par des valeurs $\beta - (s+1)h, \ldots \beta - (k-1)h, \beta - kh$, en faisant la somme des égalités obtenues on obtient la suivante:

$$h^{-2}\left[(z\Delta y - y\Delta z)_{x=\beta-sh} - (z\Delta y - y\Delta z)_{x=\beta-kh}\right] = \tag{5}$$

$$= \sum_{x=\beta-kh}^{\beta-(s+1)h} a(z\Delta y - y\Delta z) + \sum_{x=\beta-kh}^{\beta-(s+1)h} (a - A)(z + \Delta z)\, y.$$

Il résulte des inégalités qui viennent d'être écrites que le premier membre de l'égalité (5) est positif, il résulte aussi de ces inégalités et de la condition $a(x) > 0$ que la première somme du 2-me membre de (5) est négative. Or il résulte de la condition $A(x) \geqslant a(x)$ que la deuxième somme du 2-me membre de (5) est négative ou nulle, pourvu que $z+\Delta z>0$; cette condition est vérifiée, car si $z>0$ et $\Delta z<0$ on a $|\Delta z|<z$ et si $z<0$ on a $\Delta z>|z|$. Nous aboutissons donc à une contradiction qui montre que l'entier k n'existe pas, d'où il résulte l'exactitude de l'énoncé II a. On peut remarquer qu'il existe toujours une solution $z(x)$ de (2), continue dans (α, β) et telle que $z(\beta)=y(\beta)$, $z(\beta-h)=y(\beta-h)$ [2].

Théorème II-b (de comparaison). *Considérons une solution $y(x)$ de (1) définie dans un intervalle (α,β), contenu dans I, telle que $y(\beta)\geqslant 0$ et que $y(x)>0$ pour $\alpha\leqslant x<\beta$. Soit n l'entier positif tel que $nh\leqslant\beta-\alpha<(n+1)h$. Si une solution $z(x)$ de (2) est telle que $z(\alpha)=y(\alpha)$, $z(\alpha+h)=y(\alpha+h)$ on a $z(\alpha+ih)\geqslant y(\alpha+ih)$ $(i=2,3\ldots n)$.*

La démonstration est toute pareille à celle du théorème II-a.

Il résulte des équations (1) et (2) que pour $x=\alpha$ on a $\Delta^2 y\leqslant\Delta^2 z$, donc pour $x=\alpha+h$ on a $\Delta y\leqslant\Delta z$ et par suite $z(\alpha+2h)\geqslant y(\alpha+2h)$. Supposons qu'il existe un entier $k\,(3\leqslant k\leqslant n)$ tel que l'on ait.

$$z(\alpha+ih)\geqslant y(\alpha+ih) \qquad (i=1,2\ldots k-1)$$

et

$$z(\alpha+kh)<y(\alpha+kh).$$

Pour $x=\alpha+h$ on a $z\Delta y-y\Delta z=y(\Delta y-\Delta z)\leqslant 0$, d'après ce qui précède. Au contraire, pour $x=\alpha+(k-1)h$ l'expression $z\Delta y-y\Delta z$ est positive.

En posant encore $y^*=y+\Delta y$ et $z^*=z+\Delta z$ on a $z\Delta y-y\Delta z=zy^*-yz^*$ et comme $y>0$, $y^*>0$ et $z>0$ notre assertion est évidente lorsque $z^*\leqslant 0$.

Supposons maintenant que $z^*>0$, comme on a $z\geqslant y$ et $z^*<y^*$ on a bien $zy^*-yz^*>0$. Il existe donc un entier $s\,(2\leqslant s\leqslant k-1)$ tel que l'on a:

$$z\Delta y-y\Delta z\leqslant 0 \quad \text{pour} \quad x=\alpha+ih \qquad (i=1,2\ldots s-1)$$

et

$$z\Delta y-y\Delta z>0 \quad \text{pour} \quad x=\alpha+sh.$$

[2]) Comme on peut fixer arbitrairement les valeurs d'une solution $z(x)$ dans l'intervalle $\beta-h\leqslant x\leqslant\beta$, on peut supposer que $z(x)$ est continue dans cet intervalle. La valeur $z(\beta-2h)$ est alors déterminée par l'équation (2). On peut encore supposer que dans l'intervalle $\beta-2h\leqslant x\leqslant\beta-h$ $z(x)$ est égale à une fonction continue arbitraire pourvu que cette fonction prenne aux points $\beta-2h$ et $\beta-h$ des valeurs précedement fixées. L'équation (2) fournit alors successivement des valeurs de $z(x)$ pour tout $x<\beta$ et la solution ainsi déterminée est continue.

Remplaçons maintenant x dans l'égalité (4) successivement par des valeurs $\alpha+h$, $\alpha+2h, \ldots \alpha+(s-1)h$, en faisant la somme des égalités obtenues on obtient la suivante:

(6) $$h^{-2}\left[(z\Delta y-y\Delta z)_{x=\alpha+sh}-(z\Delta y-y\Delta z)_{x=\alpha+h}\right]=$$
$$=\sum_{x=\alpha+h}^{\alpha+(s-1)h} a(z\Delta y-y\Delta z)+\sum_{x=\alpha+h}^{\alpha+(s-1)h}(a-A)(z+\Delta z)\,y.$$

Il résulte des inégalités qui viennent d'être écrites que le premier membre de l'égalité (6) est positif, il résulte aussi de ces inégalités et de la condition $a(x)>0$ que la première somme du 2-me membre de (6) est négative ou nulle. Il résulte de la condition $A(x)\geqslant a(x)$ qu'il en est de même avec la deuxième somme du 2-me membre de (6), pourvu que l'on ait $z+\Delta z>0$; or cette condition est vérifiée car les valeurs $z^*=z+\Delta z$ correspondent à des valeurs de x qui ne dépassent pas $\alpha+sh\leqslant\alpha+(k-1)h$ et l'on a $z(\alpha+ih)\geqslant y(\alpha+ih)>0$ pour $i=1,2\ldots k-1$. Nous aboutissons donc à une contradiction qui montre que l'entier k n'existe pas, d'où il résulte l'exactitude du théorème II-b. On peut remarquer qu'il existe toujours une solution de (2), continue dans (α,β) et telle que $z(\alpha)=y(\alpha)$, $z(\alpha+h)=y(\alpha+h)$ on le voit p. ex. en employant un raisonnement analogue à celui exposé au renvoi [2]).

§ 4. Soient a et b deux zéros consécutifs d'une solution $y(x)$ de l'équation:

(1) $$\frac{\Delta^2 y}{h^2}+A(x)y=0, \qquad A(x)\geqslant m>0.$$

Supposons que la fonction $y(x)$ soit continue et positive dans (a,b) et soit c le point (ou l'un des points) où $y(x)$ atteint son maximum dans (a,b); définissons l'entier n par les inégalités: $c+nh\leqslant b<c+(n+1)h$. La suite $y(c)$, $y(c+h)\cdots y(c+nh)$ est en vertu de (1) concave et non croissante, on a donc, en posant:

$$mh^2=p$$

$$|\Delta y(c+ih)|\geqslant p\,y(c) \qquad (i=1,2\ldots n-1)$$

et par suite

$$(n-1)\,p\,y(c)\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}|\Delta y(c+ih)|\leqslant y(c)$$

donc $n \leqslant 1 + p^{-1}$ et comme $b - c < (n+1)h$ on obtient l'inégalité:

$$b - c < \left(2 + \frac{1}{p}\right) h. \tag{7}$$

Nous allons maintenant comparer la solution $y(x)$ de (1) avec une solution $u(x)$ de l'équation différentielle:

$$u''(x) + (m - \varepsilon) u(x) = 0 \tag{8}$$

où ε est un petit nombre positif.

Nous supposerons maintenant que $p < 2$, alors il existe une solution $u(x)$ de (8) qui satisfait aux conditions:

$$u(c) = y(c), \quad u(c+h) = y(c+h).$$

(En effet, la solution générale de (8) est égale à $C_1 \cos(\sqrt{m-\varepsilon}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{m-\varepsilon}\, x)$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. On peut déterminer ces constantes de manière que $u(x)$ prenne aux points c et $c+h$ des valeurs arbitraires pourvu que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{m-\varepsilon}\, c), & \sin(\sqrt{m-\varepsilon}\, c) \\ \cos[\sqrt{m-\varepsilon}\,(c+h)], & \sin[\sqrt{m-\varepsilon}\,(c+h)] \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas; or ce déterminant est égal à $\sin\sqrt{m-\varepsilon}\, h$ et cette quantité ne s'annule pas, car $mh^2 = p < \pi^2$). Les distances entre les zéros consécutifs de $u(x)$ étant égales à $\pi(m-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$, il résulte aussi de la condition $p < 2$ que la solution considérée $u(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $(c, c+h)$. Soit (γ, δ) cet intervalle entre les zéros consécutifs γ et δ de la solution $u(x)$ en question qui contient l'intervalle $(c, c+h)$ à son intérieur. On a $y(c+h) \leqslant y(c)$ donc le maximum de $u(x)$ dans (γ, δ) est atteint pour une valeur de x plus petite que $c+h$. Il est bien connu que l'on a $\Delta^2 u = h^2 u''(\xi)$ avec $x < \xi < x + 2h$[3]). L'équation (8) peut donc s'écrire sous la forme:

$$\frac{\Delta^2 u}{h^2} + a(x) u = 0 \quad \text{où} \quad a(x) = \frac{(m-\varepsilon) u(\xi)}{u(x)} \quad \text{et} \quad x < \xi < x + 2h \tag{8'}$$

[3]) Cf. par exemple N. E. Nörlund, loc. cit. sous [1]), p. 13, la formule en question n'est d'ailleurs qu'un cas particulier da la formule d'interpolation de Lagrange avec le reste de Cauchy.

$\xi(x)$ n'est pas en général une fonction continue de x mais $u''(\xi)$ et par suit $u(\xi)$ l'est bien, donc $a(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (γ, δ). On s'assure d'autre part aisément que $a(x) > 0$ tant que $u(x) > 0$ et $u(x+h) > 0$, donc à l'intérieur de l'intervalle $(\gamma, \delta - h)$.

Cela est évident lorsque $u(x + 2h) \geqslant 0$, car les distances entre les zéros consécutifs de $u(x)$ sont supérieurs à $\pi m^{-\frac{1}{2}} > h$ et l'on a par suite $u(\xi) > 0$. Supposons maintenant que $u(x + 2h) < 0$. En ajoutant au besoin une constante à x et en posant ensuite $\sqrt{m-\varepsilon}\, x = t$, $\sqrt{m-\varepsilon}\, h = h'$ on aura $u(x) = C \sin t$ où C est une constante positive et $\Delta^2 u(x) = C \Delta^2 \sin t$, pourvu que l'on remplace dans les différences relatives à la fonction $\sin t$, h par h'. Supposons donc que l'on ait $\sin t > 0$, $\sin(t + h') > 0$, $\sin(t + 2h') < 0$ et par exemple $0 < t < t + h' \leqslant \pi < t + 2h' < 2\pi$. $\left(\text{D'après la condition } p = mh^2 < 2, \text{ on a } h' < \frac{\pi}{2}\right)$.

D'après (8') il suffit de montrer que l'on a $\Delta^2 \sin t < 0$ c'est-à-dire $\sin(t + 2h') - \sin(t + h') < \sin(t + h') - \sin t$, or la dernière inégalité peut s'écrire

$$\int_0^{h'} \cos(t + h' + s)\, ds < \int_0^{h'} \cos(t + h' - s)\, ds$$

et ceci résulte de l'inégalité $\cos(t + h' + s) < \cos(t + h' - s)$ valable pour $0 < s < \frac{\pi}{2}$.

Nous allons maintenant choisir le nombre ε de manière que l'on ait $a(x) \leqslant m \leqslant A(x)$ dans l'intervalle $(c, \delta - h)$.

Comme $u(c+h) \leqslant u(c)$ le maximum de $u(x)$ dans (γ, δ) a lieu pour une valeur de x qui ne dépasse pas $c + \frac{1}{2}h$, l'inégalité $a(x) < m$ est donc évidente lorsque $c + \frac{1}{2}h < x < \delta - h$ car alors $u(\xi) < u(x)$. Lorsque $c \leqslant x < c + \frac{1}{2}h$ le rapport $u(\xi) : u(x)$ ne surpasse pas $(\cos\frac{1}{2}h\sqrt{m-\varepsilon})^{-1}$, on a donc $a(x) \leqslant (m-\varepsilon)(\cos\frac{1}{2}h\sqrt{m-\varepsilon})^{-1}$. Pour que l'on ait $a(x) \leqslant m$ il suffit de choisir ε de manière que l'on ait $\cos\frac{1}{2}h\sqrt{m-\varepsilon} = 1 - \frac{1}{8}h^2(m-\varepsilon) + \cdots > 1 - \varepsilon m^{-1}$ et a fortiori il suffit que $\frac{1}{8}h^2(m-\varepsilon) = \varepsilon m^{-1}$ c. à. d. que

$$\varepsilon = \frac{m^2 h^2}{mh^2 + 8} = \frac{mp}{p + 8}.$$

ε étant ainsi choisi il suffit de reprendre la démonstration de l'enoncé II-b, en y remplaçant α par c, β par δ et $z(x)$ par $u(x)$ et en tenant compte du fait que dans l'équation (6) on a $s - 1 \leqslant k - 2 \leqslant n - 2$ pour voir que la conclusion de cet énoncé s'applique aux solutions considérées des équations (1) et (8'): si l'entier n est défini par des inégalités $c+nh\leqslant b<c+(n+1)h$ on a $y(c+ih)\leqslant u(c+ih)$ $(i=0,1\dots n)$. Or les distances entre les zéros consécutifs de $u(x)$ sont toutes égales à $\pi(m-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ et ce nombre est supérieur à h, d'après la condition $p<2$; on a donc $u(x)>0$ dans tout l'intervalle $(c,c+nh)$. D'autre part le maximum de $u(x)$ dans (γ,δ) est atteint pour une valeur de x au plus égale à $c+\frac{1}{2}h$ donc $u(x)$ s'annule certainement dans l'intervalle $\left(c,c+\frac{1}{2}h+\frac{\pi}{2}(m-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\right)$, il en résulte que l'on a $b-c<(n+1)h<\frac{3}{2}h+\frac{\pi}{2}(m-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$, donc d'après la valeur choisie pour ε on a:

$$(9)\qquad b-c<\frac{\pi}{2\sqrt{m}}+\left[\frac{3}{2}+\frac{\pi(\sqrt{p+8}-\sqrt{8})}{4\sqrt{2p}}\right]h\qquad(p<2)$$

et l'on constate sans peine que le coefficient de h dans le second membre de cette inégalité est une fonction croissante de p. Pour $p=2$ la valeur de ce cofficient est inférieure à $2+p^{-1}=2\frac{1}{2}$. Or nous avons obtenu au début de ce § l'inégalité (valable pour tout $p>0$):

$$(7)\qquad b-c<\left(2+\frac{1}{p}\right)h$$

et nous aboutissons ainsi à l'inégalité:

$$(10)\qquad b-c<\frac{\pi}{2\sqrt{m}}+\frac{5}{2}h.$$

§ 5. $y(x)$ étant une solution continue de (1) où $A(x)$ est continue et $A(x)\geqslant m>0$ nous supposerons toujours que $y(x)$ s'annule pour $x=a$ et $x=b$, que $y(x)>0$ dans l'intervalle $a<x<b$ et que cette fonction atteint son maximum dans (a,b) pour $x=c$.

Nous venons d'obtenir une limite supérieure du nombre $b-c$, nous allons maintenant chercher une limite supérieure de $c-a$.

Nous utiliserons dans ce but les deux lemmes qui suivent.

Lemme 1. *Soit $y(x)$ une solution (pas nécessairement continue) de l'équation:*

$$(1')\qquad \frac{\Delta^2 y}{h^2}+my=0\qquad(m>0).$$

Supposons que $y=\omega(x)$ soit l'équation d'une ligne polygonale pour laquelle les différences des abscisses des sommets consécutifs sont toutet égales à h et dont les sommets sont situés sur la courbe $y=y(x)$. La fonction $\omega(x)$ est aussi une solution de l'équation (1').

Pour établir ce lemme il suffit de remarquer que, si x_0, x_0+h, $x_0+2h,\dots$ sont des abscisses des sommets de la ligne polygonale et si $x_0<x<x_0+h$ on a $\omega(x)=py(x_0)+qy(x_0+h)$, $\omega(x+h)=py(x_0+h)+qy(x_0+2h)$ et $\omega(x+2h)=py(x_0+2h)+qy(x_0+3h)$ avec $p>0$, $q>0$, $p+q=1$. En portant ces valeurs de $\omega(x)$, $\omega(x+h)$, $\omega(x+2h)$ dans l'équation $\Delta^2\omega+h^2m\omega=0$ on obtient de suite le résultat.

Lemme 2. *Si $y(x)$ est une solution de l'équation* (1') *qui possède une dérivée droite $\overset{+}{y'}(x)$, cette dérivée est aussi une solution de* (1').

En effet, le quotient $[y(x+k)-y(x)]:k$ où k est positif est évidemment une solution de (1'), lorsque k tend vers zéro ce quotient tend vers $\overset{+}{y'}(x)$, d'où le résultat.

Soit maintenant $y(x)$ une solution de (1') qui jouit des propriétés énoncées au début de ce §. Définissons l'entier r par des inégalités: $rh\leqslant c-a<(r+1)h$ et considérons la ligne polygonale inscrite dans la courbe $y=y(x)$ et dont les sommets ont des abscisses: $c-rh$, $c-(r-1)h,\dots c-h,c$, soit $y=z(x)$ l'équation de cette ligne polygonale. D'après les lemmes 1 et 2 $\overset{+}{z'}(x)$ est une solution (discontinue) de (1'), cette solution est décroissante et non négative dans l'intervalle $c-rh<x<c$. La courbe $y=\overset{+}{z'}(x)$ est composée des segments horizontaux, tous de longueur h, en joignant les milieux de ces segments par de nouvaux segments nous obtenons une ligne polygonale de l'équation $y=\omega(x)$ et d'après le lemme 1 $\omega(x)$ est encore une solution de (1'), $\omega(x)$ est d'ailleurs continue, non négative et décroissante dans l'intervalle $c-(r-\frac{1}{2}h)<x<c-\frac{1}{2}h$.

Appliquons maintenant à $\omega(x)$ les considérations du § 4, en y remplaçant l'intervalle (c,b) par l'intervalle $(c-(r-\frac{1}{2}h),\ c-\frac{1}{2}h)$.

Les raisonnements employées au début de ce § conduisent à l'inégalité analogue à (7): $(r-1)h<(1+p^{-1})h$, tandis que les raisonnements qui suivaient fournissent l'inégalité analogue à (9):

$$(r-1)\,h < \frac{\pi}{2\sqrt{m}} + \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi(\sqrt{8+p}-\sqrt{8})}{4\sqrt{2p}}\right]h, \qquad (p<2)\ ^{4)}.$$

On trouve ainsi, tout pareillement qu'au § 4:

$$(11) \qquad (r-1)\,h < \frac{\pi}{2\sqrt{m}} + \frac{3}{2}h.$$

Revenons au cas où $y(x)$ est une solution de l'équation (1) dans laquelle $A(x)$ ne se réduit pas nécessairement à la constante m.

Soit $z(x)$ une solution de (1′) satisfaisant aux conditions: $z(c)=y(c)$, $z(c-h)=y(c-h)$ (une telle solution existe cf. le renvoi [2])).

L'entier n étant défini par les inégalités: $nh \leqslant c-a < (n+1)\,h$, considérons la ligne polygonale inscrite dans la courbe $y=z(x)$ et dont les sommets ont des abscisses $c-nh,\ c-(n-1)\,h, \dots c-h, c$ et soit $y=\bar{z}(x)$ l'équation de cette ligne polygonale. D'après le lemme 1 $\bar{z}(x)$ est aussi une solution de (1′). En appliquant aux équations (1) et (1′) le théorème de comparaison II-a, où l'on a posé $\alpha=a$ et $\beta=c$ on constate que l'on a $\bar{z}(x)>0$ dans tout intervalle $(c-nh<x\leqslant c)$; $\bar{z}(x)$ est d'ailleurs non décroissante dans cet intervalle, on a donc d'après (11) (où l'on remplace r par n) l'inégalité:

$$nh < \frac{\pi}{2\sqrt{m}} + \frac{5}{2}h$$

et puisque $c-a<(n+1)\,h$:

$$(12) \qquad c-a < \frac{\pi}{2\sqrt{m}} + \frac{7}{2}h.$$

Si $A(x)$ est définie dans un intervalle I on peut toujours étendre sa définition à toutes les valeurs de x, de manière que $A(x) \geqslant m > 0$ et que $A(x)$ soit continue. Comme toute solution continue de (1) est oscillante (théorème I) nous aboutissons, en tenant compte des inégalités (10) et (12) à l'énoncé suivant:

---

[4]) Tandis que dans le cas général on peut seulement affirmer (voir le § 4) que $b-c<(n+1)\,h$, le cas considéré correspond au cas dans lequel on aurait au § 4 $b-c=nh$, il en résulte que l'on peut remplacer dans l'inégalité (7) le nombre 2 par 1 et dans l'inégalité (9) le nombre $^3/_2$ par $^1/_2$.

Théorème III. *Considérons l'équation* $\Delta^2 y + h^2 A(x)\,y = 0$, *où* $A(x)$ *est continue et* $A(x) \geqslant m > 0$ *dans un intervalle I. Chaque intervalle situé dans I et dont la longueur dépasse*

$$\frac{\pi}{\sqrt{m}} + 6\,h$$

contient un zéro au moins de toute solution continue dans I de l'équation. Si a *et* b *sont des zéros consécutifs, situés dans I, d'une solution continue dans cet intervalle et si* c *et est le point où la valeur absolue de cette solution atteint son maximum dans* (a,b) *on a:*

$$c-a < \frac{\pi}{2\sqrt{m}} + 3\tfrac{1}{2}\,h \quad \text{et} \quad b-c < \frac{\pi}{2\sqrt{m}} + 2\tfrac{1}{2}\,h.$$

En faisant tendre h vers 0 on voit qu'il n'est pas possible de remplacer dans cet énoncé $\pi m^{-\frac{1}{2}}$ et $\frac{\pi}{2} m^{-\frac{1}{2}}$ par des nombres moindres. Au contaire, les coefficients de h ne sont pas les meilleurs possibles, on voit cependant aisément (cf. le revoi [2])) qu'aucun des nombres $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ et 6 ne saurait être remplacé par un nombre inférieur à 2.

§ 6. Je vais établir un théorème relatif au cas où $A(x)$ est non décroissante.

Théorème IV. *Les hypothèses et les notations du théorème III étant maintenues désignons par* $y(x)$ *une solution de l'équation* $\Delta^2 y + h^2 A(x)\,y = 0$, *continue dans I et supposons que* $A(x)$ *soit non décroissante dans* (a,b). *Définissons les entiers* r *et* n *par des inégalités;* $rh \leqslant c-a < (r+1)\,h$ *et* $nh \leqslant b-c < (n+1)\,h$. k *étant l'un des nombres* $1, 2, \dots r$ *supposons qu'il existe un entier* s $(1 \leqslant s \leqslant n)$ *tel que l'on ait:*

$$|y(c+(s-1)\,h)| \geqslant |y(c-kh)| \geqslant |y(c+sh)|.\ ^{5)}$$

Dans ces conditions on a:

$$|\Delta y(c-kh)| < |\Delta y(c+sh)|.\ ^{6)}$$

---

[5]) Les deux signes d'égalité ne peuvent avoir lieu à la fois.

[6]) En faisant tendre h vers 0 on obtient le résultat suivant: si $y(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + A(x)\,y = 0$, où $A(x)>0$ et $A'(x)>0$ et si l'on a $y(x_1)=y(x_2)$ $(a<x_1<x_2<b)$ alors on a $|y'(x_1)| \leqslant |y'(x_2)|$. J'ai obtenu ce résultat directement dans mon travail: „Sur l'équation différentielle $x''+A(t)\,x=0$", Prace mat.-fiz. 40, 1933.

On peut supposer dans la démonstration que $y(x) > 0$ pour $a < x < b$.

On a généralement: $\Delta(\Delta y)^2 = 2\Delta y \Delta^2 y + (\Delta^2 y)^2$, $\Delta(A y^2) = 2 A y \Delta y + A(\Delta y)^2 + [y^2 + \Delta(y^2)]\Delta A$ et par suite, en tenant compte de l'équation proposée: $\Delta(\Delta y)^2 + h^2 \Delta(A y^2) = h^2 (y + \Delta y)^2 \Delta A + h^2 A (\Delta y)^2 + (\Delta^2 y)^2$, donc, $A(x)$ étant positive et le cas $\Delta y = \Delta^2 y = 0$ étant exclu on a: $\Delta(\Delta y)^2 > h^2 [-\Delta(A y^2) + (y + \Delta y)^2 \Delta A]$. En posant dans cette inégalité successivement $x = c - kh$, $x = c - (k-1)h \cdots x = c + (s-1)h$ et en faisant la somme on obtient l'inégalité:

$$(\Delta y)^2_{x=c+sh} - (\Delta y)^2_{x=c-kh} > h^2 [A(c-kh)\, y^2(c-kh) - $$

$$- A(c+sh)\, y^2(c+sh)] + h^2 \sum_{x=c-kh}^{c+(s-1)h} (y + \Delta y)^2 \Delta A .$$

Or $y^2(c-kh) \geqslant y^2(c+sh)$ donc on a *a fortiori*:

$$(\Delta y)^2_{x=c+sh} - (\Delta y)^2_{x=c-kh} > h^2 \sum_{x=c-kh}^{c+(s-1)h} [(y + \Delta y)^2 - y^2(c+sh)]\, \Delta A . \tag{13}$$

Les deux suites $y(c)$, $y(c-h) \cdots y(c-rh)$ et $y(c)$, $y(c+h), \ldots y(c+nh)$ sont non croissantes (en y supprimant le terme $y(c)$ on obtient même des suites décroissantes) on a donc, en tenant compte des hypothèses de l'énoncé, les inégalités:

$$y^2(c+ih) \geqslant y^2(c+sh) \quad (i = -(k-1) \ldots 0, 1 \ldots s).$$

Ainsi donc le 2 membre de (13) est non négatif et le théorème IV en résulte.

Sur les propriétés du potentiel retardé

O własnościach potencjału opóźnionego

Par

WITOLD POGORZELSKI (Warszawa)

Nous démontrerons ici quelques propriétés du potentiel retardé, analogues aux propriétés du potentiel newtonien.

I. On appelle *potentiel retardé d'une charge spatiale* au point $M(x, y, z)$ et au moment t l'intégrale triple suivante:

$$V(M, t) = \iiint_D \frac{\mu\left(P, t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, d\tau_P \tag{1}$$

étendue au domaine mesurable D. La fonction $\mu(P, t)$ des coordonnées (ξ, η, ζ) du point d'intégration P et de la variable t est dite la *densité* de la charge spatiale au point P et au moment t. La variable r désigne la distance entre le point d'intégration $P(\xi, \eta, \zeta)$ et le point arbitraire $M(x, y, z)$:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

et enfin c désigne une constante positive.

Nous supposons que la fonction $\mu(\xi, \eta, \zeta; t)$ est définie et admet les dérivées

$$\frac{\partial \mu}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta d t}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}$$

bornées et intégrables à tous les points intérieurs (ξ, η, ζ) du domaine D et dans l'intervalle $t_0 < t < T$.