Nous allons maintenant démontrer notre théorème. Supposons d'abord que les relations (10) aient lieu en chaque point de la courbe C. En tenant compte du fait que les vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont indépendants nous pouvons tirer des égalités:

$$\lambda\, \mathbf{x}_i = - g^{jm} L_{im}\, \mathbf{x}_j \tag{17}$$

comme conséquences les égalités suivantes:

$$\begin{cases} \lambda = - g^{1m} L_{1m} = - g^{2m} L_{2m} & (18) \\ - g^{2m} L_{1m} = - g^{1m} L_{2m} = 0\,. & (19) \end{cases}$$

Le système (18)—(19) peut être résolu par rapport à L_{ik} ce qui donne le résultat

$$L_{11} = - \frac{\lambda\, g^{22}}{g^*}\,, \quad L_{12} = \frac{\lambda\, g^{12}}{g^*}\,, \quad L_{22} = - \frac{\lambda\, g^{11}}{g^*} \tag{20}$$

où nous avons posé:

$$g^* = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Mais on sait d'autre part que l'on a:

$$\frac{g^{11}}{g^*} = g_{22}\,, \quad \frac{g^{12}}{g^*} = - g_{12}\,, \quad \frac{g^{22}}{g^*} = g_{11}\,, \tag{22}$$

ce qui, confronté avec (20) nous fournit finalement

$$L_{ik} = - \lambda \,.\, g_{ik} \qquad (i, k = 1, 2)\,. \tag{23}$$

Les relations (23) sont caractéristiques pour les points ombilics. La suffisance des conditions est ainsi prouvée. Réciproquement la démonstration de la nécessité de ces conditions est plus facile. Si l'on suppose (23), on parvient sans difficulté aux équations (10).

Sur une surface sphérique, qui ne se compose que de points ombilics, chaque courbe régulière est en même temps une courbe spéciale de courbure. Les courbes spéciales sur les autres surfaces de révolution sont uniquement des cercles parallèles à l'équateur pour lesquels le centre de courbure de la section normale correspondante est situé sur l'axe de révolution.

Il faut remarquer que la démonstration de notre théorème au moyen des méthodes analytiques serait beaucoup plus longue, si on ne s'était pas servi du calcul tensoriel.

Sur les zéros des polynomes et de leurs dérivées successives *)

O punktach zerowych wielomianów i ich kolejnych pochodnych

Par

JAN G.-MIKUSIŃSKI (Lublin)

Soit $f(x)$ une fonction continue, ayant des dérivées d'ordre n continues dans un intervalle (a, b). Supposons que toutes les racines de l'équation

$$(1) \qquad f^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n),$$

contenues dans (a, b) soient simples et désignons leur nombre par r_i [si $i = 0$, on considère l'équation $f(x) = 0$].

En vertu du théorème de Rolle, les nombres $r_0, r_1, \dots, r_n$ satisfont aux inégalités

$$(2) \qquad r_{i-1} \leqslant r_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Considérons maintenant le problème inverse: Etant donné un système quelconque de $n+1$ nombres entiers et non négatifs $r_0, r_1, \dots, r_n$, et qui satisfont aux inégalités (2), existe-t-il une fonction $f(x)$ dont la i-ème dérivée $(i = 0, 1, \dots, n)$ ait exactement r_i zéros simples dans un intervalle

*) Le résultat contenu dans cet article a été communiqué en 1939 dans les C. R. Acad. Sc. Paris 208, p. 1966—67.. Or, sa démonstration qui devait paraître la même année dans les „Prace Matematyczno-Fizyczne", n'avait pu être publiée jusqu'à maintenant à cause de l'invasion allemande. Le texte présent ne diffère que légèrement de celui que l'auteur avait présenté en 1939 au feu rédacteur des *Prace Mat.-Fiz.* Prof. S. Dickstein.

(a, b)? En d'autres termes, il s'agit de constater, si „le théorème de Rolle constitue *l'unique limitation* qu'on puisse imposer au nombre des zéros d'une fonction réelle et de ses dérivées successives dans un intervalle ouvert donné" *).

La réponse à ce problème est positive. Il est même possible de renforcer la proposition, en déterminant *un polynome*

$$W(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 \qquad (m = r_n + n)$$

qui satisfait à toutes les conditions exigées. Le degré $m = r_n + n$ de $W(x)$ ne peut plus être abaissé, car la n-ième dérivée $W^{(n)}(x)$ qui possède r_n zéros, est de degré r_n au moins.

La détermination directe du polynome $W(x)$ est difficile. Nous y parvenons, dans le présent article, en considérant une suite de polynomes

$$W_1(x), W_2(x), \ldots, W_{q-1}(x), W_q(x), \tag{3}$$

formés de manière que

1⁰ $w_{j+1} \geq w_j \quad (j = 1, 2, \ldots, q-1)$;

2⁰ $r_{ij} < r_{i, j+1} \leq r_j \quad (i = 0, 1, \ldots, w_j;\ j = 1, 2, \ldots, q-1)$;

3⁰ $\sum_{i=1}^{w_i} r_{ij} < \sum_{i=1}^{w_i} r_{i, j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, q-1)$,

où w_j est le degré du polynome $W_j(x)$ et r_{ij} $(i = 0, 1, \ldots, w_j;\ j = 1, 2, \ldots, q)$ est le nombre des zéros de $W_j^{(i)}(x)$ dans (a, b).

Si r_0 est pair, on pose $W_1(x) = 1$; dans le cas contraire on pose $W_1(x) = x^p - x^{p-1} - \cdots - 1$, où p est le plus petit nombre naturel, tel que r_p soit pair. Le premier terme $W_1(x)$ de la suite (3) étant ainsi déterminé, on démontre qu'il est possible de déterminer successivement d'autres termes $W_2(x)$, $W_3(x)$, ... de manière que le dernier terme $W_q(x)$ soit le polynome cherché $W(x)$.

Pour rendre les calculs plus symétriques, nous employons souvent, dans le présent article, le symbole $f^{(0)}(x)$ au lieu de $f(x)$, ce qui veut dire que la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle même.

Théorème 1. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions réelles, continuement dérivables dans un intervalle $[a, b]$. On suppose que*

*) Ce dernier énoncé du problème est dû à M. G. Pólya.

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) \neq 0 \quad (a < x_0 < b)$$

et que x_0 est la racine unique de $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Cela posé, il est toujours possible de déterminer un nombre positif ε, tel que, si

(4) *et* (5) $\quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ *et* $|f'(x) - g'(x)| < \varepsilon$ *dans* $[a, b]$,

alors

$$f(a) \cdot g(a) > 0, \quad f(b) \cdot g(b) > 0 \tag{6}$$

et

$$g(x_0') = 0, \quad g'(x_0') \neq 0 \quad \textit{pour un certain } x_0' \quad (a < x_0' < b).$$

Démonstration. En supposant que $f'(x_0) > 0$, on établit un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ contenu dans $[a, b]$, dans lequel $f'(x) > q > 0$. On fixe ensuite un nombre $p > 0$, tel que

$$\begin{cases} f(x) < -p & \text{pour} \quad a \leq x \leq x_0 - h, \\ f(x) > p & \text{pour} \quad x_0 + h \leq x \leq b. \end{cases} \tag{7}$$

Cela étant, nous montrerons qu'il suffit de poser, dans notre théorème $\varepsilon \leq \frac{p}{2}, \frac{q}{2}$. En effet, en vertu des inégalités (4) et (7) on a (6) et la fonction $g(x)$ ne peut s'annuler dans les intervalles $[a, x_0 - h]$ et $[x_0 + h, b]$. Elle s'annule cependant dans $(x_0 - h, x_0 + h)$, car elle est des signes opposés aux deux extremités de cet intervalle. Or, la racine de $g(x)$ contenue dans $(x_0 - h, x_0 + h)$ est sûrement unique, car $g'(x) > \frac{q}{2}$ dans cet intervalle.

Le théorème est ainsi démontré pour $f'(x_0) > 0$. Le cas $f'(x_0) < 0$ se réduit au précédent, en posant $f(x) = -f_1(x)$.

Corollaire. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continuement dérivables dans un intervalle $[a, b]$. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement n racines simples $x_1, \ldots, x_n$ à l'intérieur de (a, b) et qu'il n'y a plus de racines dans $[a, b]$.*

Cela posé, il est toujours possible de déterminer un nombre positif ε, tel que, si

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \textit{et} \quad |f'(x) - g'(x)| < \varepsilon \quad \textit{dans} \quad [a, b], \tag{8}$$

alors

$$f(a) \cdot g(a) > 0, \qquad f(b) \cdot g(b) > 0 \tag{9}$$

et il existe à l'interieur de (a, b) exactement n racines simples $x_1', \ldots, x_n'$ de l'équation $g(x) = 0$ et il n'y a plus de racines dans $[a, b]$.

Démonstration. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $\delta_1, \ldots, \delta_n$ dont chacun contient à son intérieur exactement l'un des points $x_1, \ldots, x_n$. D'après le théorème précédent on peut déterminer n nombres positifs $\varepsilon_i > 0$, tels que, si

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon_i, \qquad |f'(x) - g'(x)| < \varepsilon_i,$$

alors l'équation $g(x) = 0$ possède dans δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ exactement une racine simple x_i et l'on a $g'(x_i') \neq 0$. Cela étant, il suffit de prendre pour ε le moindre des nombres $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Théorème 2. *Soit donné un polynome de degré $t-1$*

$$W_t(x) = b_{t-1} x^{t-1} + \cdots + b_s x^s - b_{s-1} x^{s-1} - \cdots - b_q x^q + W_q(x)$$
$$(0 < q < s < t),$$

où les coefficients b_i $(i = t-1, \ldots, q)$ sont positifs et $W_q(x)$ est un polynome de degré $q-1$. On suppose que

$$W_q^{(i)}(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant k > 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Cela posé, il existe un nombre positif ε [qui dépend en général de $W_q(x)$] tel que, si

$$b_i < \varepsilon \qquad (i = t-1, \ldots, s)$$

alors l'équation

$$W_t^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, q-1) \tag{10}$$

est dépourvue de racines ou en a exactement deux qui sont $> k$.

Démonstration. Soit m le moindre des nombres

$$W_q^{(i)}(k) \qquad (i = 0, 1, \ldots, q-1).$$

En posant

$$\varepsilon = \frac{m}{(t-s)(t-1)!\,k^{t-1}},$$

on a pour $i = 0, 1, \ldots, q-1$

$$|W_t^{(i)}(k) - W_q^{(i)}(k)| = i!\left|\binom{t-1}{i} b_{t-1} k^{t-i-1} + \cdots + \binom{s}{i} b_s k^{s-i} - \binom{s-1}{i} b_{s-1} k^{s-i-1} - \binom{q}{i} b_q k^{q-i}\right|$$

et, en vertu de $\quad i!\binom{t-1}{i}, \ldots, i!\binom{s}{i} < (t-1)!,$

$$|W_t^{(i)}(k) - W_q^{(i)}(k)| < (t-1)!\,(b_{t-1} k^{t-i-1} + \cdots + b_s k^{s-1});$$

comme $k > 1$, on a à plus forte raison

$$|W_t^{(i)}(k) - W_q^{(i)}(k)| < (t-1)!\,k^{t-1}(b_{t-1} + \cdots + b_s) < (t-1)!\,k^{t-1}(t-s)\,\varepsilon = m.$$

D'où $W_t^{(i)}(k) > W_q^{(i)}(k) - m$ et, en vertu de $W_q^{(i)}(k) \geqslant m$, $W_t^{(i)}(k) > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, q-1)$. La supposition que tous les b_i sont positifs entraîne $\lim_{x \to +\infty} W_t^{(i)}(x) = +\infty$, donc l'équation (10) possède sûrement un nombre *pair* de racines $> k$.

Supposons maintenant que le nombre de racines $> k$ de

$$W_t^{(i)}(x) = 0 \qquad (0 \leqslant i \leqslant q-2)$$

soit > 2, donc $\geqslant 4$. Alors l'équation

$$W_t^{(i+1)}(x) = 0$$

a, d'après le théorème de Rolle, au moins 3 racines $> k$; le nombre de ces racines étant pair, il s'ensuit qu'il y en a 4, au moins; par récurrence on voit que l'équation $W_t^{(q-1)}(x) = 0$ possède encore au moins 4 racines $> k$.

Ensuite, toujours d'après le théorème de Rolle, le nombre de racines $> k$ de l'équation

$$W_t^{(q)}(x) = q!\left\{\binom{t-1}{q} b_{t-1} x^{t-q-1} + \cdots + \binom{s}{q} b_s x^{s-q} - \binom{s-1}{q} b_{s-1} x^{s-q-1} + \cdots + \binom{q}{q} b_q\right\} = 0$$

est $\geqslant 3$. Or, ceci n'est pas possible, car d'après la règle de Descartes il n'existe qu'une seule racine, le nombre des variations de signe étant égal à 1.

Théorème 3. *Etant donné un polynome*

$$W_m(x) = a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \cdots + a_0,$$

où $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, désignons par ρ_i le nombre des racines positives de l'équation

$$W_m^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1); \tag{11}$$

on suppose que toutes ces racines sont simples.

Cela posé, il est possible de déterminer, pour tout système de quatre nombres entiers p, q, s, t, $(0 \leq p \leq m \leq q < s < t,\ p < q)$, un polynome

(12) $$W_t(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \cdots + a_m x^m + W_m(x),$$

où $a_i \neq 0$ $(i = m, m+1, \ldots, t-1)$, tel que toutes les racines positives de l'équation

(13) $$W_t^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, t-1)$$

sont simples et qu'on a exactement

1° ρ_i *racines positives, si* $0 \leq i \leq p-1$;
2° $\rho_i + 2$ „ „ *si* $p \leq i \leq m-1$;
3° 2 „ „ *si* $m \leq i \leq q-1$;
4° 1 „ „ *si* $q \leq i \leq s-1$;
5° 0 „ „ *si* $s \leq i \leq t-1$.

Démonstration. On peut supposer, sans restreindre la généralité de la démonstration, que $a_{m-1} > 0$. [Si $a_{m-1} < 0$, il suffirait de poser $\overline{W}_m(x) = -W_m(x)$ et d'opérer avec le polynome $\overline{W}_m(x)$]. Cela étant, il existe un nombre $k > 1$, tel que

(14) $$W_m^{(i)}(x) > 0 \qquad (i = 0, \ldots, m-1)$$

pour $x \geq k$. En vertu du théorème 1, on peut déterminer un nombre $\varepsilon > 0$, tel que, si

(15) $$|W_t^{(i)}(x) - W_m^{(i)}(x)| < \varepsilon \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

dans l'intervalle $[0, k]$, alors l'équation (13) possède, pour $i = 0, 1, \ldots, m-2$, exactement ρ_i racines simples dans $(0, k)$ et l'on a

(16) $$W_t^{(i)}(k) > 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, m-2.$$

Nous choisirons les valeurs de $a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots, a_m$ de manière que l'inégalité (15) ait lieu dans l'intervalle $[0, k]$.

En dérivant (12) i fois, il vient

$$W_t^{(i)}(x) - W_m^{(i)}(x) = i!\left\{\binom{t-1}{i} a_{t-1} x^{t-i-1} + \binom{t-2}{i} a_{t-2} x^{t-i-2} + \cdots + \binom{m}{i} a_m x^{m-i}\right\}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, t-1$. On en déduit, pour $0 \leq x \leq k$,

$$|W_t^{(i)}(x) - W_m^{(i)}(x)| \leq i!\left\{\binom{t-1}{i}|a_{t-1}|k^{t-i-1} + \binom{t-2}{i}|a_{t-2}|k^{t-i-2} + \cdots + \binom{m}{i}|a_m|k^{m-i}\right\};$$

en vertu de

$$i!\binom{t-1}{i},\ i!\binom{t-2}{i},\ \ldots,\ i!\binom{m}{i} < (t-1)!,$$

on a donc, pour $k > 1$,

$$|W_t^{(i)}(x) - W_m^{(i)}(x)| < (t-1)!\,k^{t-1}(|a_{t-1}| + |a_{t-2}| + \cdots + |a_m|).$$

En choisissant les $|a_i|$ $(i = m, \ldots, t-1)$ de manière que

(17) $$|a_i| < \eta = \frac{\operatorname{Min}[\varepsilon, (m-1)!\,a_{m-1}]}{(t-m)(t-1)!\,k^{t-1}},$$

on aura (15) et, en plus,

$$W_t^{(m-1)}(x) > W_m^{(m-1)}(x) - (m-1)!\,a_{m-1} \quad \text{dans} \quad [0, k].$$

Dans ce cas, l'équation (13) a exactement ρ_i racines dans l'intervalle $[0, k]$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, car les deux équations (11) et (13) sont dépourvues de racines dans $[0, k]$, lorsque $i = m-1$.

Posons maintenant

(18) $$\begin{cases} a_{t-1} = \cdots = a_s = \alpha + \delta, \\ a_{s-1} = \cdots = a_q = \beta, \\ a_{q-1} = \cdots = a_m = \gamma, \end{cases}$$

où γ est un nombre quelconque, satisfaisant aux inégalités $0 < \gamma < \eta$; les nombres α, β, δ seront fixés dans la suite.

On peut écrire

$$W_t(x) = (\alpha + \delta)\varphi(x) + \beta\psi(x) + W_q(x),$$

où

$$\varphi(x) = x^{t-1} + \cdots + x^s,$$
$$\psi(x) = x^{s-1} + \cdots + x^q,$$
$$W_q(x) = \gamma(x^{q-1} + \cdots + x^m) + W_m(x).$$

Choisissons les α et β de manière que

$$W_t^{(p-1)}(x_0) - \delta\,\varphi^{(p-1)}(x_0) = \alpha\,\varphi^{(p-1)}(x_0) + \beta\,\psi^{(p-1)}(x_0) + W_q^{(p-1)}(x_0) = 0,$$
$$W_t^{(p)}(x_0) - \delta\,\varphi^{(p)}(x_0) = \alpha\,\varphi^{(p)}(x_0) + \beta\,\psi^{(p)}(x_0) + W_q^{(p)}(x_0) = 0,$$

où x_0 est un nombre positif.

En résolvant le système d'équations ci-dessus par rapport à α et β, on obtient

$$\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} W_q^{(p-1)}(x_0), & \psi^{(p-1)}(x_0) \\ W_q^{(p)}(x_0), & \psi^{(p)}(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi^{(p-1)}(x_0), & \psi^{(p-1)}(x_0) \\ \varphi^{(p)}(x_0), & \psi^{(p)}(x_0) \end{vmatrix}}, \qquad \beta = -\frac{\begin{vmatrix} \varphi^{(p-1)}(x_0), & W^{(p-1)}(x_0) \\ \varphi^{(p)}(x_0), & W_q^{(p)}(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi^{(p-1)}(x_0), & \psi^{(p-1)}(x_0) \\ \varphi^{(p)}(x_0), & \psi^{(p)}(x_0) \end{vmatrix}}.$$

En posant les abréviations:

$$\varphi^{(p-1)}(x) = \varphi_0\, x^{t-p} + \cdots,$$
$$\psi^{(p-1)}(x) = \psi_0\, x^{s-p} + \cdots,$$
$$W_q^{(p-1)}(x) = w_0\, x^{q-p} + \cdots,$$

on voit facilement que les coefficients initiaux φ_0, ψ_0, w_0 sont positifs.

En développant suivant les puissances de x_0 le numérateur et le dénominateur des expressions obtenues pour α et β, il vient

$$\alpha = \frac{(s-q)\,w_0\,x^{s+q-2p-1} + \cdots}{(t-s)\,\varphi_0\,x^{t+s-2p-1} + \cdots}, \qquad \beta = -\frac{(t-q)\,w_0\,x^{t+q-2p-1} + \cdots}{(t-s)\,\psi_0\,x^{t+s-2p-1} + \cdots}.$$

On voit que, pour x_0 assez grand, le nombre α est positif et le nombre β négatif, et qu'en vertu de $q < s < t$, les deux nombres α, β tendent vers zéro pour $x_0 \to +\infty$.

En vertu du théorème 2 on peut déterminer un nombre $\varepsilon_1 > 0$ tel que, si

(19) $$0 < \alpha + \delta < \varepsilon_1,$$

l'équation (13) possède, pour $i = 0, 1, \ldots, q$, 0 ou 2 racines $> k$. Posons

(20) $$\lambda = \mathrm{Min}\,(\varepsilon_1, \eta).$$

On peut choisir x_0 de manière que

(21) $$-\lambda < \beta < 0 < \alpha < \frac{\lambda}{2}.$$

En vertu du théorème 2, le point x_0 est la racine unique (double) $> k$ de l'équation

(22) $$\alpha\,\varphi^{(p-1)}(x) + \beta\,\psi^{(p-1)}(x) + W_q^{(p-1)}(x) = 0;$$

cependant l'équation

(23) $$\alpha\,\varphi^{(p)}(x) + \beta\,\psi^{(p)}(x) + W_q^{(p)}(x) = 0$$

a deux racines simples k. En effet, l'une d'elle est le point x_0; ce point ne peut pas être une racine double de (23), parce qu'il serait dans ce cas une racine triple de (25), ce qui est en contradiction avec le théorème 2. Comme (23) ne peut posséder que 0 ou 2 racines $> k$, il s'ensuit qu'il existe nécessairement une autre racine x_1 différente de x_0.

Fixons arbitrairement un nombre l supérieur à x_0 et x_1 et désignons par M un nombre tel que

(24) $$\varphi^{(p)}(x) < M \quad \text{et} \quad \varphi^{(p+1)}(x) < M$$

dans $[k, l]$. Fixons ensuite un nombre $\varepsilon_2 > 0$, tel que, si

(25) $$\delta\,\varphi^{(p)}(x) < \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \delta\,\varphi^{(p+1)}(x) < \varepsilon_2$$

dans l'intervalle $[k, l]$, alors l'équation

(26) $$W_t^{(p)}(x) = [\alpha\,\varphi^{(p)}(x) + \beta\,\psi^{(p)}(x)\,W_q^{(p)}(x)] + \delta\,\varphi^{(p)}(x)$$

possède dans $[k, l]$ le même nombre de racines que (23), c'est-à-dire exactement 2 (l'existence d'un tel nombre ε_2 est assurée par le théorème 2). Posons enfin

(27) $$\delta = \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{\varepsilon_2}{M}\right).$$

Tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont ainsi déterminés. Cela étant, nous démontrerons que le polynome $W_t(x)$ satisfait à toutes les conditions exigées.

1⁰ On conclut d'après (18), (20), (21) et (27) que l'inégalité (17) est remplie; l'équation (13) possède donc, dans $[0, k]$, exactement ρ_i racines pour $0 \leq i \leq m-1$.

L'équation (22) a une racine unique $x_0 > k$ qui est double; le coefficient de la puissance la plus élévée de x étant positif, on a donc constamment

$$W_t^{(p-1)}(x) - \delta\,\varphi^{(p-1)}(x) = \alpha\,\varphi^{(p-1)}(x) + \beta\,\psi^{(p-1)}(x) + W_q^{(p-1)}(x) \geq 0$$

pour $x > k$. En vertu de $\delta > 0$ et de $\varphi^{(p-1)}(x) > 0$ pour $x > 0$, le polynome $W_t^{(p-1)}(x)$ est constamment positif pour $x > k$ et l'équation (13) est ainsi dépourvue de racines $> k$ pour $i = p - 1$.

On conclut ensuite d'après (20), (21) et (27) que l'inégalité (19) a lieu; l'équation (13) possède donc, pour $0 \leqslant i \leqslant m-1$, 0 ou 2 racines $> k$. Supposons pour moment que cette équation (13) ait, pour $0 \leqslant i \leqslant m-2$, 2 racines $> k$; alors l'équation $W_t^{(i+1)}(x) = 0$ possède encore, d'après le théorème de Rolle, quelque racine $> k$, donc exactement 2 racines $> k$. On déduit par récurrence que, si l'une des équations (13) $(i = 0, 1, ..., p-2)$ possédait des racines $> k$, alors l'équation (13) en possederait encore pour $i = p - 1$, ce qui est en contradiction avec les considérations précédentes.

2⁰ Les relations (24) et (27) entraînent (25); l'équation (26) a donc exactement 2 racines $> k$. En tenant compte de l'alternative que l'équation (13) possède, pour $i = 0, 1, ..., m-1$, 0 ou 2 racines $> k$, on conclut par récurrence, en appliquant le théorème de Rolle, que chaque de ces équations (13) $(i = 0, 1, ..., m-1)$ possède exactement 2 racines $> k$. Chacune de ces équations possède, en plus, exactement ρ_i racines dans l'intervalle $[0, k]$, elle possède donc, en somme, $\rho_i + 2$ racines positives.

3⁰ Si $m \leqslant i \leqslant q-1$, les $t-s$ coefficients initiaux de $W_t^{(i)}(x)$ sont positifs, les $s-q$ suivants sont négatifs et les $q-1$ derniers sont positifs. On en déduit, d'après le théorème de Descartes, que l'équation (13) possède, pour $m \leqslant i \leqslant q-1$, 0 ou 2 racines positives. Or, nous avons démontré que l'équation $W_t^{(m-1)}(x) = 0$ possède 2 racines $> k$; par conséquent l'équation $W_t^{(m)}(x)$ en possède au moins l'une, donc exactement 2 racines. Pareillement, en appliquant les théorèmes de Rolle et de Descartes, on démontre facilement par induction que chacune des équations (13) possède, pour $m \leqslant i \leqslant q-1$, exactement 2 racines positives.

4⁰ Si $q \leqslant i \leqslant s-1$, les $t-s$ coefficients initiaux de $W_t^{(i)}(x)$ sont positifs, et tous les coefficients restants sont négatifs. Dans ce cas, l'équation (13) a donc, d'après la règle de Descartes, exactement 1 racine positive.

5⁰ Si $s \leqslant i \leqslant t-1$, tous les coefficients de $W_t^{(i)}(x)$ sont positifs, L'équation (13) n'a pas alors de racines positives.

Remarque. La démonstration ci-dessus est exacte pour $p > 0$. Si $p = 0$, on définit, en plus, les fonctions $W_t^{(p-1)}(x) = W_t^{(-1)}(x)$ et $W_m^{(p-1)}(x) = W_m^{(-1)}(x)$, en posant $W_t^{(-1)}(x) = 1 + \int_0^x W_t(x)dx$, $W_m^{(-1)}(x) = 1 + \int_0^x W_m(x)dx$ et on considère ces deux fonctions avec les autres. Cette modification ne change en rien la démonstration.

Théorème 4. *Etant donné un polynome*

$$W_m(x) = a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_0,$$

où $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$, *désignons par* ρ_i *le nombre de racines positives de l'équation*

$$W_m^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, ..., m-1); \tag{28}$$

on suppose que toutes ces racines sont simples.

Cela posé, il est possible de déterminer, pour tout nombre entier $p > m$, *un polynome*

$$W_p(x) = a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_m x^m + W_m(x),$$

où $a_i \neq 0$ $(i = m, m+1, ..., p-1)$, *tel que toutes les racines positives de l'équation*

$$W_p^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, ..., m-1) \tag{29}$$

sont simples et qu'on a exactement

1⁰ ρ_i *racines positives, si* $0 \leqslant i \leqslant m-1$;

2⁰ 0 „ „ *si* $m \leqslant i \leqslant p-1$.

Démonstration. On peut supposer, comme dans la démonstration du théorème précédent, que $a_{m-1} > 0$. Alors il existe un nombre $k > 1$, tel que $W_m^{(i)}(x) > 0$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$ pour $x > k$. Posons $W_p(x) = \alpha\varphi(x) + W_m(x)$, où $\varphi(x) = x^{p-1} + \cdots + x^m$.

En vertu du corollaire du théorème 1 il est possible de déterminer un nombre $\varepsilon_1 > 0$ tel que, si $|W_p^{(i)}(x) - W_m^{(i)}(x)| < \varepsilon_1$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$, alors l'équation

$$W_p^{(i)}(x) = 0 \tag{30}$$

possède, pour $i = 0, 1, ..., m-2$, exactement ρ_i racines dans l'intervalle $[0, k]$.

Soit α un nombre positif, inférieur à $\frac{\varepsilon_1}{M_1}$, où M_1 est le plus grand des nombres $\varphi^{(p)}(k)$ $(i = 0, ..., m-1)$. Cela étant, on a, pour $0 \leqslant x \leqslant k$,

$$|W_p^{(i)}(x) - W_m^{(i)}(x)| = \alpha\varphi^{(i)}(x) \leqslant \alpha\varphi^{(i)}(k) < \varepsilon_1.$$

Comme $\varphi^{(i)}(x) > 0$ pour $x > 0$ $(i = 0, 1, ..., p-1)$, l'équation (30) a exactement

ρ_i racines simples positives, si $0 \leqslant i \leqslant m-1$,

0 „ „ „ si $m \leqslant i \leqslant p-1$.

Théorème 5. *Etant donné un polynome*

$$W_m(x) = a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_0,$$

où $a_i \neq 0$ $(i=0,1,\ldots,m-1)$, *désignons par* ρ_i *le nombre de racines positives de l'équation*

$$(31) \qquad W_m^{(i)}(x) = 0 \qquad (i=0,1,\ldots,m-1);$$

on suppose que toutes ces racines sont simples.

Cela posé, il est possible de déterminer, pour tout système de quatre nombres entiers p, q, s, t $(0 \leqslant m \leqslant p \leqslant q < s < t)$, *un polynome*

$$W_t(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \cdots + a_m x^m + W_m(x),$$

où $a_i \neq 0$ $(i=m, m+1, \ldots, t-1)$, *tel que toutes les racines positives de l'équation*

$$(32) \qquad W_t^{(i)}(x) = 0 \qquad (i=0,1,\ldots,t-1)$$

sont simples et qu'on a exactement

1^0 ρ_i *racines positives, si* $0 \leqslant i \leqslant m-1$;
2^0 0 „ „ *si* $m \leqslant i \leqslant p-1$;
3^0 2 „ „ *si* $p \leqslant i \leqslant q-1$;
4^0 1 „ „ *si* $q \leqslant i \leqslant s-1$;
5^0 0 „ „ *si* $s \leqslant i \leqslant t-1$.

Démonstration. En vertu du théorème 4 il existe un polynome

$$W_p(x) = a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_m x^m + W_m(x),$$

où $a_i \neq 0$ $(i=m, m+1, \ldots, p-1)$, tel que l'équation

$$(33) \qquad W_p^{(i)}(x) = 0 \qquad (i=0,1,\ldots,m-1)$$

possède exactement

ρ_i racines simples positives, si $0 \leqslant i \leqslant m-1$,
0 „ „ „ si $m \leqslant i \leqslant p-1$.

Lorsque $p<q$, l'existence du polynome $W_p(x)$ entraîne, d'après le théorème 3, l'existence d'un polynome $W_t(x)$ qui satisfait à toutes les conditions exigées.

Si $p=q$, posons

$$(34) \qquad W_t(x) = \beta\psi(x) + W_p(x),$$

où $\psi(x) = x^{t-1} + \cdots + x^s - x^{s-1} - \cdots - x^p$.

Soit $(0, l)$ un intervalle, à l'intérieur duquel sont contenues toutes les racines positives de l'équation (33) et de $\psi^{(i)}(x) = 0$ $(i=0,1,\ldots,p-1)$. On a donc pour $x \geqslant 1$ (en supposant que $a_{p-1} > 0$)

$$(35) \qquad W_p^{(i)}(x) > 0 \quad \text{et} \quad \psi^{(i)}(x) > 0 \qquad (i=0,1,\ldots,p-1).$$

D'après le corollaire du théorème 1 on peut déterminer un nombre positif ε_2 tel que, si

$$|W_t^{(i)}(x) - W_p^{(i)}(x)| < \varepsilon_2 \qquad (i=0,1,\ldots,p-1)$$

dans l'intervalle $[0,1]$, alors l'équation (32) a dans l'intervalle $(0,l)$ exactement le même nombre de racines que l'équation (33).

Posons

$$\beta = \frac{\operatorname{Min}[\varepsilon_2, (p-1)!\,a_{p-1}]}{M_2},$$

où M_2 satisfait, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, à l'inégalité

$$|\psi^{(i)}(x)| < M_2 \qquad (i=0,1,\ldots,p-1).$$

Alors

$$|W_t^{(i)}(x) - W_p^{(i)}(x)| = \beta|\psi^{(i)}(x)| < \beta M_2 \leqslant \varepsilon_2 \qquad (i=0,1,\ldots,p-1)$$

et, en particulier,

$$W_t^{(p-1)}(x) \geqslant W_p^{(p-1)}(x) - \beta|\psi^{(p-1)}(x)| > (p-1)!\,a_{p-1} - \beta M_2 \geqslant 0.$$

Il s'ensuit que l'équation (32) a, dans l'intervalle $(0,l)$, exactement le même nombre de racines que (33) $(i=0,1,\ldots,p-1)$, car les deux équations (32) et (33) sont, pour $i=p-1$, dépourvues de racines dans l'intervalle $(0,l)$.

En vertu de $\beta > 0$, on voit d'après (34) et (35) que l'équation (32) n'a pas de racines $\geqslant 1$. Les conditions 1^0 et 2^0 du théorème sont ainsi remplies.

En tenant compte du théorème de Descartes on voit facilement, comme dans la démonstration du théorème 3, que les conditions 4^0 et 5^0 sont aussi remplies. (Cependant on n'a pas besoin, dans le cas $p=q$, de démontrer 3^0, car il n'existe pas de nombre qui satisfasse à l'inégalité $p \leqslant i \leqslant q-1$).

Définitions. Soit

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

($a_i \neq 0$ pour $i = 0, 1, \dots, n$) un polynome tel que toutes les racines positives de l'équation

$$W_n^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n)$$

sont simples et désignons leur nombre par r_i. La suite $R = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ sera dite la *caractéristique* du polynome $W(x)$ et le nombre n le *degré* de cette caractéristique. Le degré de la caractéristique est égal à celui du polynome correspondant. Le dernier terme d'une caractéristique est toujours nul. On déduit du théorème de Rolle que

$$r_{i-1} \leqslant r_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{36}$$

On voit que, *si un certain nombre r_i de la suite R est positif, la suite partielle $r_{i+1}, r_{i+2}, \dots, r_n$ contient tous les nombres entiers non négatifs, inférieurs à r_i.* (Cette remarque nous sera très souvent utile dans la démonstration du lemme que nous énonçons dans la suite).

Nous dirons qu'une caractéristique $P = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m)$ de degré m est *subordonnée* à une autre caractéristique $R = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ de degré n, lorsque

1⁰ $m \leqslant n$;

2⁰ tous les nombres $\Delta_i = r_i - \rho_i$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ sont pairs et non négatifs;

3⁰ $\Delta_i - \Delta_{i-1} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

On constate sans peine que, *si deux caractéristiques P et R sont de même degré et que l'une d'elles est subordonnée à l'autre, elles sont identiques*, c'est-à-dire $\rho_i = r_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

En effet, on a alors $\rho_n = r_n = 0$, $\Delta_n = 0$. Comme la suite $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ est non décroissante et formée de nombres non négatifs, il s'ensuit qu'elle ne contient que des éléments nuls.

Lemme. Soit donnée une suite de N nombres entiers non négatifs $r_0, r_1, \dots, r_{N-1}$, tels que

$$r_{i-1} \leqslant r_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, N-1) \tag{37}$$

et

$$r_{N-1} = 0.$$

Cela posé, s'il existe un polynome $W_m(x)$ de degré $m-1$ $(1 \leqslant m < N)$, tel que sa caractéristique $P_m = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{m-1})$ est subordonnée à $R_N = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})$, alors il existe un polynome $W_t(x)$ de degré $t-1$ $(m < t \leqslant N)$ dont la caractéristique est aussi subordonnée à R_N.

Démonstration. Supposons tout d'abord qu'il existe des différences $\Delta_i = r_i - \rho_i$ $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ qui ne sont pas égales à zéro et soit $p < m$ le moindre nombre entier tel que

$$\Delta_p \geqslant 2. \tag{38}$$

Alors on a aussi $\Delta_{m-1} = r_{m-1} - \rho_{m-1} \geqslant 2$ (car la suite $\Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}$ est non décroissante) et a fortiori $r_{m-1} \geqslant 2$. Parmi les nombres $r_m, r_{m-1}, \dots, r_{N-1}$ il en existe donc au moins l'un qui est égal à 1 et ce nombre est suivi par un autre, au moins, qui est égal à 0 (donc $m < N-1$).

Désignons par q le moindre nombre entier $\geqslant m$, tel que r_q est impair, par s le moindre nombre entier $> q$ tel que r_s est pair et posons $t = s + 1$. On a évidemment $m < t \leqslant N$.

En vertu du théorème 3 il existe un polynome $W_t(x)$ de degré $t-1$ dont la caractéristique $\Sigma_t = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{t-1})$ satisfait aux conditions

1) $\sigma_i = \rho_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$,
2) $\sigma_i = \rho_i + 2$ „ $p \leqslant i \leqslant m-1$,
3) $\sigma_i = 2$ „ $m \leqslant i \leqslant q-1$,
4) $\sigma_i = 1$ „ $q \leqslant i \leqslant t-2$,
5) $\sigma_{t-1} = 0$.

Nous démontrerons que la caractéristique Σ_t est subordonnée à R_N. Nous formons dans ce but une suite de différences

$$\Delta_i' = r_i - \sigma_i \qquad (i = 0, 1, \dots, t-1).$$

En tenant compte de ce que les différences $\Delta_i = r_i - \rho_i$ sont (par supposition) paires, nous démontrerons qu'il en est de même des différences Δ_i'. En effet, on a

1) si $0 \leqslant i \leqslant p-1$:

$$\Delta_i' = r_i - \rho_i = \Delta_i;$$

2) si $p \leqslant i \leqslant m-1$:

$$\Delta_i' = r_i - (\rho_i + 2) = \Delta_i - 2;$$

4) si $m \leqslant i \leqslant q-1$:

$$\Delta_i' = r_i - 2;$$

comme r_i est ici pair, il en est de même de Δ_i';

4) si $q \leqslant i \leqslant t-2$:

$$\Delta_i' = r_i - 1;$$

comme r_i est ici impair, Δ_i' est pair;

5) si $i=t-1$:
$$\Delta'_{t-1}=r_s=\text{nombre pair}.$$

En démontrant que $\Delta_i'-\Delta'_{i-1}\geq 0$ $(i=1,2,\dots,t-1)$, nous profiterons de la supposition que $\Delta_i-\Delta_{i-1}\geq 0$ $(i=1,2,\dots,m-1)$. Or, nous savons déjà que les différences Δ_i' $(i=0,1,\dots,t-1)$ sont paires, il suffit donc de démontrer que $\Delta_i'-\Delta'_{i-1}\geq -1$. En effet,

1) si $1\leq i\leq p-1$:
$$\Delta_i'-\Delta'_{i-1}=\Delta_i-\Delta_{i-1}\geq 0;$$

2a) si $i=p$:
$$\Delta'_p-\Delta'_{p-1}=\Delta_p-2-\Delta_{p-1};$$
on a ici $\Delta_{p-1}=0$ et $\Delta_p\geq 2$ (38), donc $\Delta'_p-\Delta'_{p-1}\geq 0$;

2b) si $p+1\leq i\leq m-1$:
$$\Delta_i'-\Delta'_{i-1}=(\Delta_i-2)-(\Delta_{i-1}-2)\geq 0;$$

3a) si $i=m$ et $m<q$:
$$\Delta'_m-\Delta'_{m-1}=(r_m-2)-(r_{m-1}-\rho_{m-1}-2)=(r_m-r_{m-1})+\rho_{m-1}$$
et, d'après (37) et $\rho_{m-1}\geq 0$,
$$\Delta'_m-\Delta'_{m-1}\geq -1;$$

3b) si $i=m=q$:
$$\Delta'_m-\Delta'_{m-1}=\Delta'_q-\Delta'_{m-1}=(r_q-1)-(r_{m-1}-\rho_{m-1}-2)=$$
$$=r_m-r_{m-1}+1+\rho_{m-1}$$
et, d'après (37) et $\rho_{m-1}\geq 0$,
$$\Delta'_m-\Delta'_{m-1}\geq 0;$$

3c) si $m+1\leq i\leq q-1$:
$$\Delta_i'-\Delta'_{i-1}=r_i-r_{i-1}\geq -1;$$

4a) si $i=q$ et $m<q$:
$$\Delta'_q-\Delta'_{q-1}=(r_q-1)-(r_{q-1}-2)=(r_q-r_{q-1})+1\geq 0;$$

4b) si $i=q=m$, on a le cas 3b);

4c) si $q+1\leq i\leq t-2$:
$$\Delta_i'-\Delta'_{i-1}=(r_i-1)-(r_{i-1}-1)=r_i-r_{i-1}\geq -1;$$

5) si $i=t-1$:
$$\Delta'_{t-1}-\Delta'_{t-2}=(r_{t-1}-0)-(r_{t-2}-1)=r_{t-1}-r_{t-2}+1\geq 0.$$

Il reste à démontrer que toutes les différences $\Delta_0',\Delta_1',\dots,\Delta'_{t-1}$ sont non négatives. Or, cette suite étant non décroissante, il suffit de remar-

quer que $\Delta_0'\geq 0$. En effet, si $p\geq 1$, on a $\Delta_0'=\Delta_0\geq 0$; si $p=0$, on a $\Delta_0'=\Delta'_p=\Delta_p-2\geq 0$ (38).

Supposons maintenant que toutes les différences $\Delta_i=r_i-\rho_i$ $(i=0,1,\dots,m-1)$ sont nulles, mais certains parmi les nombres $r_m,r_{m+1},\dots,r_{N-1}$ sont positifs.

Soit p le moindre nombre entier $\geq m$, tel que $r_p>0$. Si r_p est impair, on pose $p=q$; si r_p est pair, soit q le moindre nombre entier $>p$ tel que r_q soit impair. Désignons enfin par s le moindre nombre entier $>q$, tel que r_s soit pair et posons $t=s+1$. L'existence de tous ces nombres et l'inégalité $m<t\leq N$ sont assurées par la remarque de la page 14.

En vertu du théorème 5 il existe un polynome $W_t(x)$ de degré $t-1$ dont la caractéristique $\Sigma_t=(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{t-1})$ satisfait aux conditions

1) $\sigma_i=\rho_i$ pour $0\leq i\leq m-1$,
2) $\sigma_i=0$ „ $m\leq i\leq p-1$,
3) $\sigma_i=2$ „ $p\leq i\leq q-1$,
4) $\sigma_i=1$ „ $q\leq i\leq t-2$,
5) $\sigma_{t-1}=0$.

Nous démontrerons que la caractéristique Σ_t est subordonnée à R_N.

Nous vérifierons d'abord que toutes les différences $\Delta_i'=r_i-\sigma_i$ $(i=0,\dots,t-1)$ sont paires. En effet,

1) si $0\leq i\leq m-1$:
$$\Delta_i'=r_i-\rho_i=\Delta_i=0;$$

2) si $m\leq i\leq q-1$:
$$\Delta_i'=r_i-0=0;$$

3) si $p\leq i\leq q-1$:
$$\Delta_i'=r_i-2;$$
comme r_i est pair, il en est de même de Δ_i';

4) si $q\leq i\leq t-2$:
$$\Delta_i'=r_i-1;$$
comme r_i est impair, Δ_i' est paire;

5) si $i=t-1$:
$$\Delta'_{t-1}=r_s=\text{nombre pair}.$$

Nous démontrerons maintenant que $\Delta_i'-\Delta'_{i-1}\geq 0$ $(i=1,2,\dots,t-1)$. En effet,

1) si $1 \leqslant i \leqslant m-1$:

$$\Delta_i' - \Delta'_{i-1} = \Delta_i - \Delta_{i-1} = 0;$$

2a) si $i = m$ et $m < p$:

$$\Delta'_m - \Delta'_{m-1} = r_m - \Delta_{m-1} = r_m \geqslant 0;$$

2b) si $i = m = p < q$:

$$\Delta'_m - \Delta'_{m-1} = \Delta'_p - \Delta'_{m-1} = r_p - 2 - \Delta_{m-1} = r_p - 2 \geqslant -1, \quad \text{car} \quad r_p < q;$$

2c) si $i = m = p = q$:

$$\Delta'_m - \Delta'_{m-1} = \Delta'_q - \Delta'_{m-1} = r_q - 1 - \Delta_{m-1} = r_q - 1 \geqslant -1;$$

2d) si $m+1 \leqslant i \leqslant p-1$:

$$\Delta_i' - \Delta'_{i-1} = r_i - r_{i-1} \geqslant -1;$$

3a) si $i = p$ et $m < p < q$:

$$\Delta'_p - \Delta'_{p-1} = (r_p - 2) - r_{p-1};$$

comme $r_p > 0$ et $r_{p-1} = 0$, on a

$$\Delta'_p - \Delta'_{p-1} \geqslant -1;$$

3b) si $i = p$ et $m < p = q$:

$$\Delta'_p - \Delta'_{p-1} = \Delta'_q - \Delta'_{p-1} = (r_q - 1) - r_{p-1} = r_q - 1 \geqslant -1;$$

3c) si $i = p$ et $m = p < q$, on a le cas 2b) ou 2c);

3d) si $p+1 \leqslant i \leqslant q-1$:

$$\Delta_i' - \Delta'_{i-1} = (r_i - 2) - (r_{i-1} - 2) \geqslant -1;$$

4a) si $i = q$ et $p < q$:

$$\Delta'_q - \Delta'_{q-1} = (r_q - 1) - (r_{q-1} - 2) \geqslant 0;$$

4b) si $i = q = p$, on a le cas 3a);

4c) si $q+1 \leqslant i \leqslant t-2$:

$$\Delta_i' - \Delta'_{i-1} = (r_i - 1) - (r_{i-1} - 1) \geqslant -1;$$

5) si $i = t-1$:

$$\Delta'_{t-1} - \Delta'_{t-2} = (r_{t-1} - 0) - (r_{t-2} - 1) \geqslant 0.$$

On voit facilement, comme dans le cas précédent, que toutes les différences Δ_i' $(i = 0, 1, \ldots, t-1)$ sont non négatives, car, en vertu de $m \geqslant 1$, on a $\Delta_0' = \Delta_0 = 0$.

Nous devons nous occuper encore du cas, où toutes les différences $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{m-1}$ et tous les nombres $r_m, r_{m+1}, \ldots, r_{N-1}$ sont nuls.

Posons $t = m+1$. En vertu du théorème 4 il existe un polynome $W_t(x)$ de degré $t-1$ dont la caractéristique $\Sigma_t = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{t-1})$ est définie par les égalités

$$\sigma_i = \rho_i = r_i \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$
$$\sigma_m = r_m = 0.$$

Cette caractéristique est évidemment subordonnée à R_N.

Théorème 6. *Pour tout système de $n+1$ nombres entiers non négatifs $r_0, r_1, \ldots, r_n$ tels que*

$$r_{i-1} \leqslant r_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

il est possible de déterminer un polynome $W(x)$ de degré $m = r_n + n$ de manière que l'équation

$$W^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

possède exactement r_i racines positives et que ces racines soient simples.

Démonstration. Lorsque $r_n \geqslant 1$, on complète la suite $r_0, r_1, \ldots, r_n$ avec les nombres $r_{n+1}, r_{n+2}, \ldots, r_{N-1}$ $(N = r_n + n + 1)$, tels que

$$r_{n+2} = r_n - 1,$$
$$r_{n+1} = r_n - 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{N-1} = 1,$$
$$r_{N-2} = 0.$$

Cela posé, il suffit de démontrer l'existence d'un polynome avec la caractéristique $R_N = (r_0, r_1, \ldots, r_{N-1})$.

Si l'on réussit de déterminer un polynome $W_m(x)$ de degré $m-1$ $(m < N)$ dont la caractéristique $P_m = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$ est subordonnée à R_N, il existera d'après le lemme précédent un polynome de degré supérieur à m dont la caractéristique sera encore subordonnée à R_N. Il en résulte, par récurrence, l'existence d'un polynome $W(x)$ de degré $N-1$ avec la caractéristique subordonnée à R_N. Or, cette caractéristique est du même degré que R_N, elle est donc identique avec R_N.

Il suffit donc de déterminer un polynome quelconque $W_m(x)$ dont la caractéristique soit subordonnée à R_N.

Lorsque r_0 est pair, on pose $m = 1$ et

$$W_m(x) = 1.$$

La caractéristique P_m de $W_m(x)$ se réduit dans ce cas à un seul nombre 0. Elle est évidemment subordonnée à R_N.

Lorsque r_0 est impair, désignons par p le moindre nombre naturel tel que r_p soit pair et posons $m = p+1$ et

$$W_m(x) = x^p - x^{p-1} - \cdots 1.$$

Alors la caractéristique de ce polynome est formée de nombres

$$\rho_i = 1 \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, p-1,$$
$$\rho_p = 0.$$

Cette caractéristique est subordonnée à R_N, car toutes les différences

$$\Delta_i = r_i - \rho_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, p)$$

sont paires, non négatives et l'on a

$$\Delta_i - \Delta_{i-1} = (r_i - r_{i-1}) - (\rho_i - \rho_{i-1}) \geqslant -1.$$

Le théorème est ainsi démontré complètement.

Corollaire. *Pour tout système de* $n+1$ *nombres entiers non négatifs* $r_0, r_1, \ldots, r_n$, *satisfaisant aux inégalités*

$$r_{n-1} \leqslant r_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et pour tout intervalle ouvert (a, b), *on peut déterminer un polynome* $W(x)$ *de degré* $m = r_n + n$, *tel que l'équation*

$$W^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

possède, dans (a, b), *exactement* r_i *racines et que ces racines sont simples.*

Démonstration. D'après le théorème 6 il existe un polynome $W_0(x)$ de degré $m = r_n + n$, tel que l'équation

$$W_0'^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

possède exactement r_i racines positives simples. Pour déterminer le polynome $W(x)$ il suffit de poser

$$W(x) = W_0\left(\frac{k(x-a)}{b-a}\right);$$

on peut vérifier sans peine que ce polynome satisfait à toutes les conditions exigées.

Solution of the System of Integral Equations in Dirac's One-Electron Problem in Momentum Representation

Rozwiązanie układu równań całkowych w zagadnieniu jednego elektronu Diraca

A. RUBINOWICZ (Warsaw)

I. The integral equation of the problem. In a paper published in The Physical Review [1]) I have calculated the eigenfunctions of Dirac's one-electron problem in momentum representation applying the operator:

$$T\ldots = \frac{1}{h^{3/2}} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\,dz\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(\xi x + \eta y + \zeta z)} \ldots \tag{1}$$

$$(\xi, \eta, \zeta = \text{momentum components})$$

to the eigenfunctions in space coordinate representation. In the present note I deal with the solution of the integral equation of this problem. It is given by [2]):

$$[E + \beta E_0 + c(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta)]\, v(\xi, \eta, \zeta) +$$
$$+ \frac{Z e^2}{\pi h} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(\xi', \eta', \zeta')}{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' = 0. \tag{2}$$

---

1) Phys. Rev. 73, 1330, 1948.

2) l. c. Eq. (2).