Sur les lignes de courbure spéciales

O liniach krzywiznowych specjalnych

Par

A. HOBORSKI † et S. GOŁĄB (Cracovie)

Il est bien connu, que les lignes de courbure situées sur les surfaces plongées dans un espace euclidien à trois dimensions peuvent être définies par les trois façons suivantes:

1) comme lignes de surface dont la tangente en chaque point se confond avec une des directions principales (c.-à-d. des directions dans laquelle la courbure de la section normale atteint l'extremum),

2) comme lignes de surface dont la torsion géodésique est identiquement nulle,

3) comme lignes de surface ayant la propriété que le lieu des droites normales à la surface le long de la ligne est une surface applicable sur le plan.

Nous prenons comme point de départ la troisième définition.

Soit une surface S donnée par l'intermédiaire d'une équation vectorielle:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \tag{1}$$

où $\mathbf{x}$ est un champ des vecteurs (contrevariants) de deux paramètres indépendants u^1, u^2 de la classe C_2 (les dérivées du second ordre étant continues) tel que les champs vectoriels

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \mathbf{x}_1(u^1, u^2), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{x}_2(u^1, u^2) \tag{2}$$

sont linéairement indépendants en chaque point de la surface.

Si une courbe C située sur la surface (1) est donnée au moyen des équations

$$u^i = u^i(\sigma), \qquad (i = 1, 2) \tag{3}$$

où

$$\left|\frac{d u^1}{d \sigma}\right| + \left|\frac{d u^2}{d \sigma}\right| > 0 \tag{4}$$

et si nous désignons par n un vecteur arbitraire normal à S le long de C, la condition pour que la surface réglée des normales soit développable s'exprimera par la formule :

$$\left[\mathsf{t}, \mathsf{n}, \frac{d \mathsf{n}}{d \sigma}\right] = 0, \tag{5}$$

où t représente le vecteur tangent à C:

$$\mathsf{t} = \mathsf{x}_i \frac{d u^i}{d \sigma}. \tag{6}$$

La relation (5) exprime que les trois champs vectoriels t, n, $\dfrac{d \mathsf{n}}{d \sigma}$ sont linéairement dépendants.

On peut démontrer (le théorème d'O l i n d e R o d r i g u e s) qu'en désignant par N le verseur du vecteur n (vecteur-unité normal), la relation (5) prendra une forme plus simple:

$$\frac{d \mathsf{N}}{d \sigma} = \lambda . \mathsf{t}. \tag{7}$$

En tenant compte de ce que

$$\frac{d \mathsf{N}}{d \sigma} = \frac{d \mathsf{N}}{d u^i} \cdot \frac{d u^i}{d \sigma} = \mathsf{N}_i \cdot \frac{d u^i}{d \sigma} \tag{8}$$

on peut, en vertu de (6), donner à l'équation (7) la forme suivante :

$$(\mathsf{N}_i - \lambda\, \mathsf{x}_i) \frac{d u^i}{d \sigma} = 0. \tag{9}$$

Il peut arriver, que la relation (9) soit vérifiée le long de la courbe C de telle façon que l'on ait :

$$\mathsf{N}_i - \lambda\, \mathsf{x}_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2. \tag{10}$$

Une telle ligne de courbure sera appellée par nous ligne de courbure *„spéciale"*.

Il est évident que la définition précédente est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle se conserve quand on passe d'un système de coordonnées curvilignes sur la surface S à un autre système de coordonnées.

Théorème. *La condition nécéssaire et suffisante pour que C soit une igne de courbure „spéciale" est qu'elle se compose de points ombilics.*

Démonstration. Nous rappelons quelques formules fondamentales de la théorie des surfaces écrites sous forme vectorielle.

Nous désignons le produit scalaire par un point. Si nous posons

$$g_{ik} = \mathsf{x}_i . \mathsf{x}_k \qquad (i, k = 1, 2), \tag{11}$$

nous obtenons les composantes du tenseur métrique (ou fondamental) de la surface S.

Si nous posons ensuite

$$\mathsf{x}_{ik} = \frac{\partial^2 \mathsf{x}}{\partial u^i \partial u^k} \qquad (i, k = 1, 2), \tag{12}$$

on démontre que les quantités L_{ik} définies par la formule

$$L_{ik} = \mathsf{x}_{ik} . \mathsf{N} \tag{13}$$

représentent les composantes d'un W— tenseur covariant, c'est-à-dire qu'elles se transforment, quand on passe à un système nouveau de coordonnées curvilignes $\overline{u}^1, \overline{u}^2$ de la manière suivante:

$$\overline{L}_{ik} = L_{rs} . A^r_i . A^s_i . \operatorname{sgn}(\Delta) \tag{14}$$

où nous avons posé, pour abréger :

$$A^r_s = \frac{\partial u^r}{\partial \overline{u}^s}, \quad \Delta = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \overline{u}^j}{\partial u^k}\right). \tag{15}$$

Nous citons encore les équations de W e i n g a r t e n sur lesquelles est basée notre démonstration. Puisque les trois vecteurs x_1, x_2, N sont linéairement indépendants, tout autre champ vectoriel peut être exprimé par l'intermédiaire des x_1, x_2, N. Nous avons ainsi :

$$\mathsf{N}_i = - g^{jm} L_{im} . \mathsf{x}_j, \tag{16}$$

(le champ N n'intervient pas dans le deuxième membre de la formule (16) parceque N est un champ unitaire, alors N_i sont orthogonaux à N), où g^{jm} sont les composantes contrevariantes du tenseur métrique g_{ik}.

Nous allons maintenant démontrer notre théorème. Supposons d'abord que les relations (10) aient lieu en chaque point de la courbe C. En tenant compte du fait que les vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont indépendants nous pouvons tirer des égalités:

$$\lambda\, \mathbf{x}_i = -g^{jm} L_{im}\, \mathbf{x}_j \tag{17}$$

comme conséquences les égalités suivantes:

$$\begin{cases} \lambda = -g^{1m} L_{1m} = -g^{2m} L_{2m} & (18) \\ -g^{2m} L_{1m} = -g^{1m} L_{2m} = 0\,. & (19) \end{cases}$$

Le système (18)—(19) peut être résolu par rapport à L_{ik} ce qui donne le résultat

$$L_{11} = -\frac{\lambda g^{22}}{g^*},\quad L_{12} = \frac{\lambda g^{12}}{g^*},\quad L_{22} = -\frac{\lambda g^{11}}{g^*} \tag{20}$$

où nous avons posé:

$$g^* = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Mais on sait d'autre part que l'on a:

$$\frac{g^{11}}{g^*} = g_{22},\quad \frac{g^{12}}{g^*} = -g_{12},\quad \frac{g^{22}}{g^*} = g_{11}, \tag{22}$$

ce qui, confronté avec (20) nous fournit finalement

$$L_{ik} = -\lambda\,.\,g_{ik} \qquad (i, k = 1, 2)\,. \tag{23}$$

Les relations (23) sont caractéristiques pour les points ombilics. La suffisance des conditions est ainsi prouvée. Réciproquement la démonstration de la nécessité de ces conditions est plus facile. Si l'on suppose (23), on parvient sans difficulté aux équations (10).

Sur une surface sphérique, qui ne se compose que de points ombilics, chaque courbe régulière est en même temps une courbe spéciale de courbure. Les courbes spéciales sur les autres surfaces de révolution sont uniquement des cercles parallèles à l'équateur pour lesquels le centre de courbure de la section normale correspondante est situé sur l'axe de révolution.

Il faut remarquer que la démonstration de notre théorème au moyen des méthodes analytiques serait beaucoup plus longue, si on ne s'était pas servi du calcul tensoriel.

Sur les zéros des polynomes et de leurs dérivées successives *)

O punktach zerowych wielomianów i ich kolejnych pochodnych

Par

JAN G.-MIKUSIŃSKI (Lublin)

Soit $f(x)$ une fonction continue, ayant des dérivées d'ordre n continues dans un intervalle (a, b). Supposons que toutes les racines de l'équation

(1) $$f^{(i)}(x) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

contenues dans (a, b) soient simples et désignons leur nombre par r_i [si $i = 0$, on considère l'équation $f(x) = 0$].

En vertu du théorème de Rolle, les nombres $r_0, r_1, \ldots, r_n$ satisfont aux inégalités

(2) $$r_{i-1} \leqslant r_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Considérons maintenant le problème inverse: Etant donné un système quelconque de $n+1$ nombres entiers et non négatifs $r_0, r_1, \ldots, r_n$, et qui satisfont aux inégalités (2), existe-t-il une fonction $f(x)$ dont la i-ème dérivée $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ait exactement r_i zéros simples dans un intervalle

*) Le résultat contenu dans cet article a été communiqué en 1939 dans les C. R. Acad. Sc. Paris 208, p. 1966—67.. Or, sa démonstration qui devait paraître la même année dans les „*Prace Matematyczno-Fizyczne*", n'avait pu être publiée jusqu'à maintenant à cause de l'invasion allemande. Le texte présent ne diffère que légèrement de celui que l'auteur avait présenté en 1939 au feu rédacteur des *Prace Mat.-Fiz.* Prof. S. Dickstein.