

En vertu de (7,1) on a

$$f'(x) \geq A g'(x)$$

presque partout dans $[l, m]$ et, par suite

$$f(m) - f(l) = \int_l^m f'(x) dx \geq A \int_l^m g'(x) dx = A [g(m) - g(l)]$$

d'où résulte (7,3) car de $g'(x) > 0$ il s'ensuit que $g(m) - g(l) > 0$.

Soient $\{z_v\}$ et $\{y_v\}$ deux suites de points appartenant à Δ et, tels que $z_v \neq y_v$, $z_v \rightarrow c$, $y_v \rightarrow c$. En vertu des propriétés démontrées tout à l'heure on aura

$$s_v = \frac{f(z_v) - f(y_v)}{g(z_v) - g(y_v)} \rightarrow L. \quad (7,5)$$

Une démonstration plus détaillée de (7,5) nécessite la distinction de trois cas où L est fini, $L = +\infty$ et $L = -\infty$. Nous esquisserons seulement cette démonstration au cas de L fini. Soient A et B deux nombres très voisins de L et tels que $A < L < B$. A partir d'un v assez grand les (7,1) et (7,2) auront lieu presque partout dans $[y_v, z_v]$ en vertu de (7,0).

On aura pour ces indices, en raison de (7,3) et (7,4) $A \leq s_v \leq B$ et par suite $|s_v - L| \leq B - A$. On en déduit (7,5), car on peut s'arranger de façon que $B - A < \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

Soit x_v une suite quelconque de points de Δ , tels que $x_v \rightarrow c$.

Posons $a_v = f(x_v)$, $b_v = g(x_v)$. En s'appuyant sur (7,5) on démontre immédiatement que la couple de suites $\{a_v\}$, $\{b_v\}$ est hôpitalienne relativement à L (cf. la définition du § 3) donc, en vertu du Théorème 1 (§ 3) on a

$$\frac{a_v}{b_v} \rightarrow L,$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque 2. En introduisant le changement de variables $u = g(x)$, on ramène le théorème de l'Hôpital au cas du quotient de la forme $\frac{F(u)}{u}$. La démonstration par cette voie serait cependant beaucoup plus longue que celles des paragraphes 2, 3 et 4.

Je dois à M. A. Turowicz l'obligeant renseignement que M. Orlicz, dans ses cours d'avant la guerre, appliquait, dans le cas (5,3), le principe du Lemme 3 (p. 126) servant de base à la quatrième démonstration (Remarque insérée au cours de la correction des épreuves).

Sur un théorème dans la théorie des équations différentielles

O pewnym twierdzeniu w teorii równań różniczkowych

Par

M. BIERNACKI (Lublin)

§ 1. On connaît le théorème suivant, facile à démontrer¹⁾:

„Considérons des fonctions $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ et $g(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ continues pour $t_0 \leq t \leq T$ et pour toutes valeurs des variables x_i, y_i , et supposons que les conditions $x_i \leq y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) entraînent toujours l'inégalité $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \leq g(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des intégrales des équations $x^{(n)}(t) = f(t, x, x' \dots x^{(n-1)})$ et $y^{(n)}(t) = g(t, y, y' \dots y^{(n-1)})$ respectivement, telles que l'on a $x(t_0) \leq y(t_0)$, $x^{(i)}(t_0) \leq y^{(i)}(t_0)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) alors on a: $x(t) \leq y(t)$, $x'(t) \leq y'(t)$, $\dots$, $x^{(n-1)}(t) \leq y^{(n-1)}(t)$ dans tout intervalle $t_0 \leq t \leq T$ ”.

Dans le cas particulier des équations linéaires on doit à M. J. Mikusiński une comparaison plus difficile²⁾. „Désignons par ω_n le plus petit zéro positif de cette intégrale de équation $x^{(n)} + x = 0$ qui satisfait aux conditions $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0$, $x^{(n-1)}(0) = 1$.

(ω_n est fini, on a $\omega_n > \sqrt[n]{n(n+1) \dots (2n-1)}$, $\lim \omega_n n^{-1} = 4e^{-1}$).

Considérons les équations:

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + A(t)x(t) = 0, \quad (2) \quad y^{(n)}(t) + m y(t) = 0$$

¹⁾ Un théorème plus général a été établi par T. Ważewski Annales de la Soc. Pol. de Math. 1937 p. 101.

²⁾ „O całkach rzeczywistych pewnych r. r. liniowych”, 1940. Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires. Annales, Un. M. Curie-Skłodowska, Lublin, vol. I Nr 2, p. 23—34.

dans lesquelles m est une constante positive et $A(t)$ une fonction continue dans l'intervalle (t_0, T) , telle que l'on a $A(t) \geq m$ dans cet intervalle et supposons que $T - t_0 \leq \omega_n m^{-\frac{1}{n}}$. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des intégrales des équations (1) et (2) respectivement, telles que $x(t_0) = y(t_0)$, $x'(t_0) = y'(t_0) \dots x^{(n-1)}(t_0) = y^{(n-1)}(t_0)$ et si $x(t) \geq 0$ dans l'intervalle (t_0, T) on a aussi $x(t) \leq y(t)$ dans cet intervalle".

J. Mikusiński déduit ce théorème (ainsi qu'un théorème analogue dans lequel on a $A(t) \leq m$) de la proposition suivante: „Considérons un intervalle (t_0, T) dont la longueur ne dépasse pas ω_n . Si l'on a $x(t_0) = x'(t_0) = \dots x^{(n-1)}(t_0) = 0$ et $x^{(n)}(t) + x(t) \geq 0$ dans l'intervalle en question, on y a aussi $x(t) \geq 0$ ". Je me propose d'établir des théorèmes plus généraux que ceux de M. Mikusiński, ces théorèmes sont cependant moins précis que ceux de cet auteur dans le cas particulier qu'il a considéré. Je vais utiliser une méthode de démonstration du théorème I entièrement différente de la celle de M. Mikusiński.

§ 2. **Théorème I.** „Considérons les fonctions $x_0(t), x_1(t) \dots x_{n-1}(t)$ qui vérifient dans un intervalle (t_0, T) le système des équations et des inégalités:

$$(3) \quad \left(\frac{dx_{n-1}}{dt} \right)^s + P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \geq 0$$

$$(4) \quad x_0(t_0) = x_1(t_0) = \dots = x_{n-2}(t_0) = 0, \quad x_{n-1}(t_0) \geq 0$$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx_{n-2}}{dt} = c_{21}(t) x_{n-1} \\ \frac{dx_{n-3}}{dt} = c_{31}(t) x_{n-1} + c_{32}(t) x_{n-2} \\ \dots \\ \frac{dx_0}{dt} = c_{n1}(t) x_{n-1} + c_{n2}(t) x_{n-2} + \dots + c_{n, n-1}(t) x_{n-1} \end{cases}$$

où s est un entier impair et positif et où $P(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum a_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}(t) x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}}$ est un polynôme homogène de degré s dont les coefficients sont des fonctions continues dans l'intervalle (t_0, T) tandis que les coefficients $c_{km}(t)$ ($k=2, 3 \dots n, m=1, 2, \dots, n-1$) sont des fonctions continues et non négatives dans cet intervalle. Supposons que l'on ait pour $t_0 \leq t \leq T$ $c_{km}(t) \leq \gamma_{km}$ et $a_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}(t) \leq a_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ où γ_{km} et $a_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ sont des constantes.

On peut former une équation algébrique de degré n dont les coefficients ne dépendent que des nombres γ_{km} et $a_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ et telle, que si τ_1 est son unique racine positive et si t_1 est le plus petit des nombres T et τ_1 on a dans l'intervalle (t_0, t_1) les inégalités:

$$x_0(t) \geq 0, \quad x_1(t) \geq 0, \dots, x_{n-1}(t) \geq 0.$$

Si pour $t_0 \leq t \leq t_1$ on a l'inégalité dans la relation (3) et si les coefficients c_{km} ne s'annulent pas dans cet intervalle on a pour $t_0 < t < t_1$:

$$x_0(t) > 0, \quad x_1(t) > 0, \dots, x_{n-1}(t) > 0.$$

Si $s=1$, si i est l'un des nombres $2, 3, \dots, n$, si l'on a $c_{km}(t) \equiv 0$ dans (t_0, T) lorsque simultanément $k \geq i+1$ et $m \leq i-1$ et si l'on a dans (t_0, T) $-A_{n-1} \leq a_{n-1}(t) \leq 0$, $-A_{n-2} \leq a_{n-2}(t) \leq 0 \dots -A_{n-i+2} \leq a_{n-i+2}(t) \leq 0$, $|a_{n-i+1}(t)| \leq A_{n-i+1}$ ($A_{n-1}, A_{n-2} \dots A_{n-i+1}$ sont des constantes) on peut remplacer les conditions (4) par les suivantes

$$(4') \quad x_0(t_0) = x_1(t_0) = \dots = x_{n-i-1}(t_0) = 0, \quad x_{n-i}(t_0) \geq 0, \\ x_{n-i+1}(t_0) \geq 0 \dots x_{n-1}(t_0) \geq 0,$$

et l'on peut encore former une équation algébrique de degré n dont les coefficients ne dépendent que des constantes γ_{km} et $A_{n-1}, A_{n-2} \dots A_{n-i+1}, a_{n-1} \dots a_{i+1}, a_0$ et telle, que si τ_i est son unique racine positive et si t_i est le plus petit des nombres τ_i et T on a dans l'intervalle (t_0, t_i) les inégalités:

$$x_0(t) \geq 0, \quad x_1(t) \geq 0 \dots x_{n-i}(t) \geq 0.$$

Si pour $t_0 \leq t \leq t_i$ on a l'inégalité dans la relation (3) et si les coefficients c_{km} ne s'annulent pas dans cet intervalle on a pour $t_0 < t < t_i$

$$x_0(t) > 0, \quad x_1(t) > 0 \dots x_{n-i}(t) > 0.$$

Théorème I-a. Supposons que $s=1$ et que $c_{km}(t) \leq \gamma$. Les équations algébriques dont il est question dans le théorème I sont les suivantes: *)

*) On pose $u^+ = u$ si $u > 0$ et $u^+ = 0$ si $u \leq 0$. On pose de même $u^- = -u$ si $u < 0$ et $u^- = 0$ si $u \geq 0$.

*) C_k^m sont des coefficients du binôme.

$$(6) \quad \begin{cases} -1 + a_{n-1}^+ \tau + (a_0^+ + a_1^+ + \dots + a_{n-1}^+) \tau^2 + \dots + (C_{n-2}^{p-2} a_0^+ + \\ + C_{n-3}^{p-2} a_1^+ + \dots + C_{p-2}^{p-2} \frac{\tau^{p-1} \tau^p}{(p-1)!} + \dots + C_{n-2}^{n-2} a_0^+ \frac{\tau^{n-1} \tau^n}{(p-1)!} = 0 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} -1 + A_{n-1} \tau + A_{n-2} \frac{\tau^2}{2!} + A_{n-3} \left(\frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} \right) + \dots + \\ + A_{n-i+1} \left(\frac{\tau^2}{2!} + C_{i-3}^1 \frac{\tau^3}{3!} + \dots + C_{i-3}^{i-3} \frac{\tau^{i-2} \tau^{i-1}}{(i-1)!} \right) + \\ + \left[\frac{\tau^2}{2!} + C_{i-2}^1 \frac{\tau^3}{3!} + \dots + C_{i-2}^{i-2} \frac{\tau^{i-1} \tau^i}{i!} \right] \left[a_{n-i}^+ + a_{n-i-1}^+ \tau \right] + \\ + a_{n-i-2}^+ \left(\tau + \frac{\tau^2}{2!} \right) + a_{n-i-3}^+ \left(\tau + 2 \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} \right) + \dots + \\ + a_0^+ \left(\tau + C_{n-i-1}^1 \frac{\tau^2}{2!} + \dots + C_{n-i-1}^{n-i-1} \frac{\tau^{n-i} \tau^{n-i+1}}{(n-i)!} \right) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

En particulier si $i = n$ l'équation (7) devient :

$$(7') \quad \begin{cases} -1 + A_{n-1} \tau + (a_0^+ + A_1 + \dots + A_{n-2}) \frac{\tau^2}{2!} + (C_{n-2}^1 a_0^+ + \\ + C_{n-3}^1 A_1 + \dots + C_2^1 A_{n-4} + A_{n-3}) \frac{\tau^3}{3!} + (C_{n-2}^2 a_0^+ + \\ + C_{n-3}^2 A_1 + \dots + C_3^2 A_{n-5} + A_{n-4}) \frac{\tau^4}{4!} + \dots + \\ + (C_{n-2}^{n-2} a_0^+ + A_1) \frac{\tau^{n-2} \tau^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-2}^{n-2} a_0^+ \frac{\tau^{n-1} \tau^n}{n!} = 0. \end{cases}$$

Théorème I-b. Supposons que $c_{km}(t) \equiv 1$ lorsque $m = k-1$ et que $c_{km}(t) \equiv 0$ lorsque $m \neq k-1$ c.-à-d. que l'on a $x_0(t) = x(t)$, $x_1(t) = x'(t) \dots x_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ et que les relations (3) et (5) se réduisent à l'inégalité :

$$(3') \quad [x^{(n)}]^s + P(x, x', \dots, x^{(n-1)}) \geq 0.$$

L'équation algébrique dont il est question dans le théorème I est la suivante :

$$(8) \quad -1 + \sum \frac{a_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}^+ \tau^{n i_0 + (n-1) i_1 + \dots + i_{n-1}}}{[(n-1)!]^{i_0} [(n-2)!]^{i_1} \dots [(1)!]^{i_{n-2}}} = 0 \quad (i_0 + i_1 + \dots + i_{n-1} = s).$$

D'ailleurs, si pour $t_0 \leq t \leq t_i$ on a l'inégalité dans (3') on a $x > 0$, $x' > 0, \dots, x^{(n-1)} > 0$ dans cet intervalle.

Théorème I-c. Les hypothèses du théorème I-b étant vérifiées supposons que $s = 1$ c.-à-d. que les relations (3) et (5) se réduisent à l'inégalité

$$(3'') \quad x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' + a_0(t) x \geq 0.$$

Les équations algébriques dont il est question dans le théorème I sont les suivantes :

$$(9) \quad -1 + a_{n-1}^+ \tau + \frac{a_{n-2}^+ \tau^2}{1!} + \frac{a_{n-3}^+ \tau^3}{2!} + \dots + \frac{a_0^+ \tau^n}{(n-1)!} = 0$$

$$(9') \quad \begin{cases} -1 + A_{n-1} \frac{\tau}{1!} + \dots + A_{n-i+1} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{a_{n-i}^+ \tau^i}{i!} + \frac{a_{n-i-1}^+ \tau^{i+1}}{1! i!} + \\ + \frac{a_{n-i-2}^+ \tau^{i+2}}{2! i!} + \dots + \frac{a_0^+ \tau^n}{(n-i)! i!} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

D'ailleurs, si pour $t_0 \leq t \leq t_i$ on a l'inégalité dans (3'') on a $x > 0$, $x' > 0, \dots, x^{(n-1)} > 0$ dans cet intervalle.

§ 3. La démonstration des théorèmes précédents sera exposée au § 4. Dans ce paragraphe nous allons déduire de ces théorèmes, en suivant la voie utilisée par J. Mikusiński (loc. cit.), le théorème de comparaisons qui voici :

Théorème II (de comparaison). Considérons les fonctions $x_0(t)$, $x_1(t)$, ..., $x_{n-1}(t)$, $y_0(t)$, $y_1(t)$, ..., $y_{n-1}(t)$ qui vérifient dans un intervalle (t_0, T) le système des équations et des inégalités :

$$(10) \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} + b_0(t) x_0 + b_1(t) x_1 + \dots + b_{n-1}(t) x_{n-1} \leq 0$$

$$(11) \quad \frac{dy_{n-1}}{dt} + a_0(t) y_0 + a_1(t) y_1 + \dots + a_{n-1}(t) y_{n-1} \geq 0$$

$$(12) \quad \begin{cases} y_0(t_0) = x_0(t_0), y_1(t_0) = x_1(t_0), \dots, y_{n-i-1}(t_0) = x_{n-i-1}(t_0), \\ y_{n-i}(t_0) \geq x_{n-i}(t_0), y_{n-i+1}(t_0) \geq x_{n-i+1}(t_0) \dots y_{n-1}(t_0) \geq x_{n-1}(t_0) \end{cases}$$

(i est l'un des nombres 1, 2, ..., n)

$$(13) \begin{cases} \frac{dx_{n-2}}{dt} = c_{21}(t)x_{n-1} + \varphi_2(t) \\ \frac{dx_{n-3}}{dt} = c_{31}(t)x_{n-1} + c_{32}(t)x_{n-2} + \varphi_3(t) \\ \dots \\ \frac{dx_0}{dt} = c_{n1}(t)x_{n-1} + c_{n2}(t)x_{n-2} + \dots + c_{n,n-1}(t)x_1 + \varphi_n(t) \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} \frac{dy_{n-2}}{dt} = c_{21}(t)y_{n-1} - \varphi_2(t) \\ \frac{dy_{n-3}}{dt} = c_{31}(t)y_{n-1} + c_{32}(t)y_{n-2} - \varphi_3(t) \\ \dots \\ \frac{dy_0}{dt} = c_{n1}(t)y_{n-1} + c_{n2}(t)y_{n-2} + \dots + c_{n,n-1}(t)y_1 - \varphi_n(t) \end{cases}$$

dans lesquelles $b_k(t)$, $a_k(t)$, $c_{km}(t)$ et $\varphi_k(t)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle (t_0, T) et l'on a $c_{km}(t) \geq 0$ dans cet intervalle. Si $i > 1$ on suppose que $c_{km}(t) \equiv 0$ dans (t_0, T) lorsque $k \geq i+1$ et $m \leq i-1$. simultanément et que $a_{n-1}(t) \leq 0$, $a_{n-2}(t) \leq 0$, ..., $a_{n-i+2}(t) \leq 0$.

Supposons en outre que l'on ait dans l'intervalle (t_0, T) :

$$(15) \begin{cases} a_{p_i}(t) \leq b_{p_i}(t), a_{p_2}(t) \leq b_{p_2}(t) \dots a_{p_l}(t) \leq b_{p_l}(t) \\ a_{q_i}(t) \geq b_{q_i}(t), a_{q_2}(t) \geq b_{q_2}(t) \dots a_{q_r}(t) \geq b_{q_r}(t) \end{cases} \quad (l+r=n)$$

et que l'on ait dans cet intervalle:

$$(16) \begin{cases} x_{p_1} \geq 0, x_{p_2} \geq 0 \dots x_{p_l} \geq 0 \\ x_{q_1} \leq 0, x_{q_2} \leq 0 \dots x_{q_r} \leq 0. \end{cases}$$

(Si $a_k(t) \equiv b_k(t)$ une condition quelconque relative à la variable x_k est superflue).

Les nombres γ_{km} , α_k , A_k et t_i étant définis comme dans le théorème I on a dans ces conditions dans l'intervalle (t_0, t_i) les inégalités:

$$y_0(t) \geq x_0(t), y_1(t) \geq x_1(t), \dots, y_{n-i}(t) \geq x_{n-i}(t).$$

Si pour $t_0 \leq t \leq t_i$ on a l'inégalité dans l'une des relations (10) et (11) et si les coefficients c_{31} , c_{32} , ..., $c_{n,n-1}$ ne s'annulent qu'un nombre fini de fois dans cet intervalle on a pour $t_0 < t < t_i$:

$$y_0(t) \geq x_0(t), y_1(t) \geq x_1(t), \dots, y_{n-i}(t) \geq x_{n-i}(t). \quad ^5)$$

Remarque. On peut remplacer dans l'énoncé II les conditions (16) par les conditions:

$$(16') \begin{cases} y_{p_i} \geq 0, y_{p_2} \geq 0, \dots, y_{p_l} \geq 0 \\ y_{q_i} \leq 0, y_{q_2} \leq 0, \dots, y_{q_r} \leq 0 \end{cases}$$

pourvu que l'on remplace dans les équations algébriques des théorèmes I, I-a, I-c les nombres α_k et A_k par des nombres β_k et B_k respectivement, ces nombres étant définis par des inégalités $b_k(t) \leq \beta_k$ et $-B_k \leq b_k(t) \leq 0$; les conditions $a_{n-1}(t) \leq 0 \dots a_{n-i+2}(t) \leq 0$ doivent être remplacées par les conditions $b_{n-1}(t) \leq 0$, $b_{n-2}(t) \leq 0$, ..., $b_{n-i+2}(t) \leq 0$.

Pour établir le théorème II posons $u_0 = y_0 - x_0$, $u_1 = y_1 - x_1$, ..., $u_{n-1} = y_{n-1} - x_{n-1}$ et soustrayons les deux membres des inégalités (10) et (11), le résultat peut s'écrire:

$$\frac{du_{n-1}}{dt} + a_0 u_0 + \dots + a_{n-1} u_{n-1} + x_0(a_0 - b_0) + \dots + x_{n-1}(a_{n-1} - b_{n-1}) \geq 0$$

d'où, en tenant compte des conditions (15) et (16):

$$\frac{du_{n-1}}{dt} + a_0 u_0 + \dots + a_{n-1} u_{n-1} \geq 0.$$

Ainsi donc les fonctions $u_0(t)$, $u_1(t)$, ..., $u_{n-1}(t)$ satisfont à l'inégalité (3) du théorème I (avec $s=1$). Il résulte d'autre part immédiatement des conditions (12) que les fonctions $u_k(t)$ satisfont aux inégalités (4) ou (4') et les égalités (13) et (14) entraînent les égalités (5) pour ces fonctions. Les fonctions $u_k(t)$ satisfaisant à toutes les conditions du théorème I, le théorème II s'ensuit immédiatement.

Il reste à établir la remarque qui suit le théorème II. Ecrivons dans ce but le résultat de la soustraction des deux membres des inégalités (10) et (11) sous la forme:

⁵⁾ Ces inégalités subsistent aussi dans le cas où l'on a l'égalité dans les relations (10) et (11), pourvu que l'on ait l'inégalité dans une des relations (15) et dans la relation (16) correspondante.

$$\frac{d u_{n-1}}{d t} + b_0 u_0 + \dots + b_{n-1} u_{n-1} + (a_0 - b_0) y_0 + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1}) y_{n-1} \geq 0.$$

En tenant compte des conditions (15) et (16') il en résulte l'inégalité :

$$\frac{d u_{n-1}}{d t} + b_0 u_0 + \dots + b_{n-1} u_{n-1} \geq 0$$

et le raisonnement s'achève comme tout à l'heure.

§ 4. Nous allons maintenant établir des théorèmes I-a, I-b, I-c, l'exactitude du théorème général I résultera clairement de ces démonstrations. Nous pouvons supposer que $t_0 = 0$, on peut aussi admettre, pour des raisons de continuité, que pour $t_0 \leq t \leq T$ il y a l'inégalité dans la relations (3) et que les coefficients c_{km} ne s'annulent pas dans cet intervalle (sauf ceux qui s'annulent identiquement dans le cas des théorèmes I-b et I-c). Commençons par le cas le plus simple du théorème I-c. L'équation (9') s'obtient de l'équation (9) en y posant $i = 1$, nous pouvons donc supposer que i est l'un des nombres $1, 2, \dots, n$. Remarquons d'abord que l'on a $x(t) > 0$, $x'(t) > 0, \dots, x^{(n-i)}(t) > 0$ pour t positif et assez petit: c'est évident si l'on a $x^{(n-p)}(0) > 0$ pour une valeur p ($1 \leq p \leq i$), dans le cas contraire il résulte des conditions (4') et de l'inégalité (3) que l'on a $x^{(n)}(0) > 0$, d'où encore la conclusion annoncée. Soit τ ($0 < \tau \leq T$) la valeur telle, que $x^{(n-i)}(\tau) = 0$ et que $x^{(n-i)}(t) > 0$ pour $0 < t < \tau$, on a évidemment aussi $x(t) > 0$, $x'(t) > 0, \dots, x^{(n-i-1)}(t) > 0$ pour $0 < t < \tau$.

Définissons des fonctions non négatives $z(t)$ et $\bar{z}(t)$ par les relations: $z(t) = x^{(n)}(t)$ si $x^{(n)}(t) \geq 0$ et $z(t) = 0$ si $x^{(n)}(t) \leq 0$, $\bar{z}(t) = -x^{(n)}(t)$ si $x^{(n)}(t) \leq 0$ et $\bar{z}(t) = 0$ si $x^{(n)}(t) \geq 0$; on a $x(t) = z(t) - \bar{z}(t)$. Soit Z le maximum (nécessairement positif) de $z(t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq \tau$ et supposons que ce maximum soit atteint au point $t = \xi$. p étant l'un des nombres $1, 2, \dots, i$ on a la formule:

$$(17) \quad x^{(n-p)}(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t (t-u)^{p-1} [z(u) - \bar{z}(u)] du + x^{(n-p)}(0) + \\ + x^{(n-p+1)}(0)t + \dots + \frac{x^{(n-1)}(0)t^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Les nombres $x^{(n-p)}(0)$, $x^{(n-p+1)}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ sont tous non négatifs, posons $t = \xi$ dans la relation (17), nous obtenons l'inégalité ³⁾:

$$(18) \quad x^{(n-p)}(\xi) \leq \frac{1}{(p-1)!} \int_0^\xi (\xi-u)^{p-1} \bar{z}(u) du \leq \frac{\xi^p}{p!} Z \leq \frac{\tau^p}{p!} Z.$$

Si $p = 1, 2, \dots, i-2$, on en déduit, en tenant compte des conditions $-A_{n-p} \leq a_{n-p}(t) \leq 0$, les inégalités:

$$(19) \quad a_{n-p}(\xi) x^{(n-p)}(\xi) \leq \frac{A_{n-p} \tau^p}{p!} Z \quad (p = 1, 2, \dots, i-2).$$

Supposons maintenant que $p = i$ ou $i-1$, on a $x^{(n-p)}(\tau) \leq 0$. En posant $t = \tau$ dans l'égalité (17) on en déduit l'inégalité ³⁾:

$$(20) \quad x^{(n-p)}(t) \leq \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t (t-u)^{p-1} z(u) du + x^{(n-p)}(0) + x^{(n-p+1)}(0)t + \dots + \\ + \frac{x^{(n-1)}(0)t^{p-1}}{(p-1)!} \leq \frac{1}{(p-1)!} \int_0^\tau (\tau-u)^{p-1} z(u) du + x^{(n-p)}(0) + \\ + x^{(n-p+1)}(0)\tau + \dots + \frac{x^{(n-1)}(0)\tau^{p-1}}{(p-1)!} \leq \frac{1}{(p-1)!} \int_0^\tau (\tau-u)^{p-1} z(u) du \leq \frac{\tau^p}{p!} Z. \\ (0 < t \leq \tau).$$

En posant dans cette inégalité $t = \xi$ et en tenant compte de (18) on constate que l'inégalité (19) subsiste pour $p = i-1$. On a d'autre part $x^{(n-i)}(t) > 0$ pour $0 < t \leq \tau$ donc (20) entraîne, pour ces valeurs de t , l'inégalité:

$$(21) \quad x^{(n-i)}(t) < \frac{\tau^i}{i!} Z$$

et en particulier:

$$(22) \quad a_{n-i}(\xi) x^{(n-i)}(\xi) < \frac{A_{n-i} \tau^i}{i!} Z.$$

En intégrant successivement l'inégalité (21) et en tenant compte des conditions (4') on obtient d'autre part les inégalités:

$$(21') \quad x^{(n-i-1)}(t) < \frac{\tau^i}{i!} Z, \quad x^{(n-i-2)}(t) < \frac{\tau^i}{i!} \cdot \frac{t^2}{2!} Z \dots x(t) < \frac{\tau^i}{i!} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} Z.$$

En remplaçant dans le premier membre de ces inégalités t par ξ et dans les seconds membres t par τ et en tenant compte des relations $x^{(n-i-1)}(\xi) \geq 0$, $x^{(n-i-2)}(\xi) \geq 0, \dots, x(\xi) > 0$ on obtient les inégalités:

$$(23) \quad \begin{cases} a_{n-i-1}(\xi) x^{(n-i-1)}(\xi) \leq \frac{\tau^{i+1}}{i!} Z \\ a_{n-i-2}(\xi) x^{(n-i-2)}(\xi) \leq \frac{\tau^{i+2}}{i! 2!} Z \\ \dots \\ a_0(\xi) x(\xi) \leq \frac{\tau^n}{i! (n-i)!} Z. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'inégalité :

$$x^{(n)}(\xi) + a_{n-1}(\xi) x^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_0(\xi) x(\xi) > 0.$$

Vu les relations (19), (20) et (23) et $Z > 0$ on en déduit immédiatement l'énoncé I-c.

La démonstration du théorème I-b n'exige pas de nouvelles considérations. On a maintenant $i=1$, $x^{(n-1)}(\xi) > 0$, $x^{(n-2)}(\xi) > 0, \dots, x(\xi) > 0$ et les inégalités (21) et (21') subsistent sans modification; en remplaçant dans les premiers membres de ces inégalités t par ξ et dans les seconds membres t par τ et en les combinant avec l'inégalité :

$$[x^{(n)}(\xi)]^s + P[x(\xi), x'(\xi), \dots, x^{(n-1)}(\xi)] > 0$$

on arrive bien, après la suppression du facteur positif Z , à l'équation (8).

La démonstration du théorème I-a repose sur les mêmes principes que celle des théorèmes I-c et I-b. Supposons d'abord que $i \geq 2$. Les fonctions $z(t)$, $\bar{z}(t)$ et les nombres τ , ξ et Z ayant les mêmes significations que tout-à-l'heure⁶⁾ et t désignant une valeur quelconque de l'intervalle $0 < t < \tau$ nous allons démontrer par induction les inégalités :

$$(24) \quad \bar{x}_{n-p}(t) \leq Z \left(\frac{\gamma t^2}{2!} + C_{p-2}^1 \frac{\gamma^2 t^3}{3!} + \dots + C_{p-2}^{k-2} \frac{\gamma^{k-1} t^k}{k!} + \dots + \right. \\ \left. + C_{p-2}^{p-2} \frac{\gamma^{p-1} \tau^p}{p!} \right) \quad (2 \leq p \leq i).$$

On a tout d'abord directement d'après l'égalité (17) :

$$(24') \quad \bar{x}_{n-1}(t) \leq t Z.$$

⁶⁾ On remplace dans ces définitions $x^{(n)}$ par x_n et $x^{(n-i)}$ par x_{n-i} . Nous supposons dans la démonstration que les coefficients c_{km} sont positifs, on constate alors aisément que l'on a $x_0(t) > 0$, $x_1(t) > 0, \dots, x_{n-i}(t) > 0$ pour t positif et assez petit.

Il résulte des conditions (5) que l'on a :

$$x_{n-2} = \int_0^t c_{21} x_{n-1} dt + x_{n-2}(0), \quad \text{or} \quad x_{n-2}(0) > 0$$

et les coefficients $c_{km}(t)$ sont positifs, donc

$$\bar{x}_{n-2} \leq \int_0^t c_{21} \bar{x}_{n-1} dt \leq Z \frac{\gamma t^2}{2!}.$$

L'inégalité (24) se trouve donc établie pour $p=2$.

Supposons qu'elle soit exacte pour une valeur de p ainsi que pour des valeurs moindres et faisons voir qu'elle subsiste lorsqu'on remplace p par $p+1$. Il résulte des égalités (5) que l'on a :

$$x_{n-p-1} = x_{n-p-1}(0) + \int_0^t [c_{p+1,1} x_{n-1} + c_{p+1,2} x_{n-2} + \dots + c_{p+1,p} x_{n-p}] dt$$

et par suite

$$\bar{x}_{n-p-1} \leq \gamma \int_0^t (\bar{x}_{n-1} + \bar{x}_{n-2} + \dots + \bar{x}_{n-p}) dt \leq \gamma Z \left(\frac{t^2}{2} + C_{p-1}^1 \frac{\gamma t^3}{3!} + \dots + \right. \\ \left. + C_{p-1}^{k-1} \frac{\gamma^{k-1} t^k}{(k+1)!} + \dots + C_{p-1}^{p-1} \frac{\gamma^{p-1} t^p}{(p+1)!} \right)$$

comme il fallait établir (on utilise la relation :

$$C_{p-2}^{k-2} + C_{p-3}^{k-2} + \dots + C_{p-2}^{k-2} = C_{p-1}^{k-1}, \quad k \leq p).$$

Or on a $a_{n-1}(t) \leq 0$, $a_{n-2}(t) \leq 0, \dots, a_{n-i+2}(t) \leq 0$ et $\xi \leq \tau$ donc les inégalités (24) entraînent les suivantes :

$$(25) \quad a_{n-p}(\xi) x_{n-p}(\xi) \leq A_{n-p} Z \left(\frac{\gamma \tau^2}{2} + \dots + C_{p-2}^{k-2} \frac{\gamma^{k-1} \tau^k}{k!} + \dots + \right. \\ \left. + C_{p-2}^{p-2} \frac{\gamma^{p-1} \tau^p}{p!} \right) \quad (p=1, 2, \dots, i-2).$$

Supposons maintenant que $p=i$ ou $i-1$, d'après les équations (5) on a pour $0 < t < \tau$:

⁷⁾ Nous supprimons dans les formules qui suivent la variable indépendante t .

$$x_{n-p}^+(t) \leq x_{n-p}(0) + \int_0^t (c_{p,1} x_{n-1}^+ + \dots + c_{p,p-1} x_{n-p+1}^+) dt \leq x_{n-p}(0) + \int_0^t (c_{p,1} x_{n-1}^+ + \dots + c_{p,p-1} x_{n-p+1}^+) dt$$

or $x_{n-p}(\tau) \leq 0$, et $x_{n-p}(0) \geq 0$, donc :

$$x_{n-p}^+(t) \leq \int_0^t (c_{p,1} x_{n-1}^+ + \dots + c_{p,p-1} x_{n-p+1}^+) dt \leq \int_0^t (x_{n-1}^+ + \dots + x_{n-p+1}^+) dt$$

on en déduit, en tenant compte de la relation (24), et en utilisant le calcul déjà fait, l'inégalité :

$$(26) \quad x_{n-p}^+(t) \leq Z \left(\frac{\gamma^2}{2!} + \dots + C_{p-2}^{k-2} \frac{\gamma^{k-1} \tau^k}{k!} + \dots + C_{p-2}^{p-2} \frac{\gamma^{p-1} \tau^p}{p!} \right) \quad (p = i-1, i).$$

Il en résulte de suite, en tenant compte de (24) que l'inégalité (25) subsiste pour $p = i-1$. Supposons maintenant que $p = i$, on a $x_{n-i}(t) \geq 0$ pour $0 < t \leq \tau$, on trouve donc en utilisant l'inégalité (26) et en posant :

$$B = \frac{\gamma^2 \tau^2}{2!} + C_{i-2}^1 \frac{\gamma^2 \tau^3}{3!} + \dots + C_{i-2}^{k-2} \frac{\gamma^{k-1} \tau^k}{k!} + \dots + C_{i-2}^{i-2} \frac{\gamma^{i-1} \tau^i}{i!}$$

que l'on a, pour ces valeurs de t , l'inégalité :

$$(27) \quad x_{n-i}(t) \leq Z B$$

et qu'en particulier :

$$(28) \quad a_{n-i}(\xi) x_{n-i}(\xi) \leq a_{n-i}^+ Z B.$$

D'après les conditions (4') on a $x_{n-i-1}(0) = 0$, $x_{n-i-2}(0) = 0$, ... $x_0(0) = 0$, donc l'inégalité (27) et les égalités (5) fournissent, en tenant compte des conditions $c_{km}(t) = 0$ ($k \geq i+1$ et $m \leq i-1$), successivement des inégalités :

$$x_{n-i-1}(t) = \int_0^t c_{i+1,i} x_{n-i} dt \leq Z B \gamma t$$

$$x_{n-i-2}(t) = \int_0^t (c_{i+2,i} x_{n-i} + c_{i+2,i+1} x_{n-i-1}) dt \leq Z B \left(\gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{2!} \right).$$

Supposons que l'on ait

$$(29) \quad x_{n-i-r}(t) \leq Z B \left(\gamma t + C_{r-1}^1 \frac{\gamma^2 t^2}{2!} + \dots + C_{r-1}^{k-1} \frac{\gamma^k t^k}{k!} + \dots + \frac{\gamma^r t^r}{r!} \right) \quad (r = 2, 3, \dots, i)$$

et faisons voir que ces inégalités subsistent lorsqu'on y remplace q par $q+1$. Remarquons dans ce but que les équations (5) entraînent l'inégalité :

$$x_{n-i-r-1}(t) \leq \gamma \int_0^t (x_{n-i} + x_{n-i-1} + \dots + x_{n-i-r}) dt.$$

Cela posé, il résulte encore aisément des inégalités (29) et de la formule $C_{r-1}^1 + C_{r-1}^2 + \dots + C_{r-1}^{r-1} = C_r^r$ ($r \leq i$) que l'inégalité (29) subsiste lorsqu'on y remplace r par $r+1$, donc pour $r = 2, 3, \dots, n-i$. Or on a $x_{n-i-1}(\xi) \geq 0$, $x_{n-i-2}(\xi) \geq 0$, ... $x_0(\xi) \geq 0$ et $\xi \leq \tau$, les relations (29) entraînent donc les inégalités :

$$a_{n-i-1}(\xi) x_{n-i-1}(\xi) \leq a_{n-i-1}^+ Z B \gamma \tau$$

$$a_{n-i-r}(\xi) x_{n-i-r}(\xi) \leq a_{n-i-r}^+ Z B \left(\gamma \tau + C_{r-1}^1 \frac{\gamma^2 \tau^2}{2!} + \dots + C_{r-1}^{k-1} \frac{\gamma^k \tau^k}{k!} + \dots + \frac{\gamma^r \tau^r}{r!} \right) \quad (r = 2, 3, \dots, n-i).$$

Les inégalités (25), (28), et (30) et l'inégalité :

$$\frac{d x_{n-1}}{d t}(\xi) + a_0(\xi) x_0(\xi) + \dots + a_{n-1}(\xi) x_{n-1}(\xi) > 0$$

conduisent directement, après la suppression du facteur positif Z , à l'équation (7) de l'énoncé I-a.

Lorsque $i=1$, la première partie de la démonstration ci-dessus devient inutile, comme on a $x_{n-1}(t) > 0$ pour $0 < t \leq \tau$ et que $x_{n-1}(\tau) = 0$ on trouve comme tout-à l'heure que l'on a $x_{n-1}(t) \leq \tau Z$ pour ces valeurs de t . En reprenant les raisonnements qui suivent l'équation (27) et en y remplaçant B par τ on arrive à l'équation (6) de l'énoncé I-a.