La discussion de l'équation générale du mouvement dans un milieu résistant.

par

St. Gołąb (Cracovie).

§ 1. Le cas particulier du mouvement résultant de deux forces: d'une constante (issue p. ex. de la gravitation) et de l'autre provenant de la résistance du milieu a été discuté plusieurs fois dans diverses conditions spéciales quant'à la force de la résistance ainsi que dans des conditions générales sur la nature de cette force.

Deux raisons m'ont décidé à attaquer de nouveau ce problème. Premièrement je n'ai pas rencontré l'homogénéité dans le traitement de ce problème. Les auteurs distinguent dans la discussion des cas particuliers, bien que tous les cas peuvent être sousmis à une seule équation différentielle. Deuxièmement la problème n'était pas encore traité-si je le sais bien-dans les conditions si générales.

A cause de la simplicité je me borne au cas du mouvement rectiligne.

§ 2. Soit un point matériel da la masse m, réstant sous l'action de deux forces: d'une f_1 constante avec l'accélération g et de l'autre f_2 de résistance toujours dirigée dans le sens contraire au sens du vecteur de la vitesse. Nous supposons que la valeur de f_2 est égale à zéro, si la vitesse s'annule et que $|f_2|$ est une fonction continue et croissante (au sens stricte) de $|\mathfrak{v}|$, si $\mathfrak{v}$ désigne la vitesse. L'équation différentielle du mouvement prend alors la forme:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left[1 + \varepsilon f\left(\frac{dx}{dt}\right)\right], \tag{1}$$

où $f(v)$ est continue par rapport à v et en outre:

(2) $$f(0) = 0$$

(3) $$f(-v) \equiv f(v)$$

(4) $$f(v) \text{ croît pour } v \geqslant 0.$$

Le symbole ε représente une fonction de v, déterminée d'une façon univoque par les conditions:

(5) $$\varepsilon^2(v) = 1$$

(6) $$\varepsilon(v) \,.\, v < 0.$$

En posant

(7) $$\frac{dx}{dt} = v$$

on peut écrire l'équation (1) sous la forme suivante:

(8) $$\frac{dv}{dt} = g \,.\, [1 - sgn(v) \cdot f(v)].$$

Comme l'intégration de l'équation (7) est triviale, toute la question se reduit à l'intégration de l'équation (8). Nous désignons par $g(v)$ le deuxième membre de l'équation (8):

(9) $$g(v) = g\,[1 - sgn(v) \cdot f(v)].$$

L'équation (8) s'écrit donc sous la forme simple:

(10) $$\frac{dv}{dt} = g(v),$$

et on voit, qu'elle appartient au type des équations à variables séparées.

Remarquons qu'en raison de (2) $g(v)$ est une fonction partout continue (aussi au point $v=0$), bien que $sgn(v)$ ne l'est pas. La dérivée de $g(v)$ (c.-à-d. l'accélération du mouvement) peut cependant ne pas exister au point $v=0$.

§ 3. Nous constatons d'abord que, selon la continuité de la fonction $g(v)$ pour tous les v, par chaque point du plan $(t_1 v)$ passe au moins une courbe intégrale de l'équation (10), valable pour toutes les valeurs t de $-\infty$ jusqu à $+\infty$.

Nous allons maintenant étudier l'unicité des solutions de l'équation

(10) en dépendance de la condition initiale pour v. Nous éxaminerons cette question d'abord au point de vue local.

D'après un théorème connu nous constatons, que, si l'on suppose

(11) $$g(v_0) \neq 0,$$

alors il existe un voisinage de t_0 tel, que dans ce voisinage on a une et une seule intégrale

(12) $$v = v(t)$$

de l'équation (10), qui satisfait à la condition initiale:

(13) $$v(t_0) = v_0.$$

Le voisinage en question peut être prolongé dans toutes les deux directions jusqu'à la rencontre d'un point $(\bar{t}, \bar{v})$ tel que'on a:

(14) $$g(\bar{v}) = 0.$$

Au voisinage d'un tel point (une valeur $\bar{v}$ de cette propriété sera appelée une valeur critique de la vitesse) l'unicité des solutions ne peut pas être garantie.

On voit donc qu'il se pose la question d'éxaminer l'existence des racines de l'équation:

(15) $$g(v) = 0.$$

D'après (9), (3) et (4), d'où il s'ensuit que:

(16) $$f(v) > 0 \qquad \text{pour} \quad v \neq 0,$$

l'équation (15) peut posséder des solutions réelles seulement dans le cas: $sgn(v) = 1$, c.-à-d. quand $v > 0$. Donc l'équation (15) est équivalente à l'équation:

(17) $$f(v) = 1 \qquad \text{avec restriction} \qquad v > 0.$$

On voit sans peine qu'il est nécessaire de distinguer deux cas suivants:

I) Pour $v \to \infty$ la valeur de $f(v)$ s'approche asymptotiquement à une valeur $k \leqslant 1$ et dans ce cas nous avons selon (4):

(18) $$f(v) < 1.$$

L'équation (15) ne possède alors aucune solution et par conséquent la vitesse ne possède pas des valeurs critiques. Dans ce cas passe, par chaque point du plan (t, v) une et une seule courbe intégrale de l'équation (10), valable pour toutes les valeurs t de $-\infty$ à $+\infty$.

II) Pour $v \to \infty$, $f(v)$ tend vers une valeur $k > 1$ ou bien croît infiniment. L'équation (15) possède alors d'après (2) et (4) une solution unique désignée par $\bar{v}$. La vitesse possède donc une et une seule valeur critique.

§ 4. Supposons le cas II) et examinons la question de l'unicité de l'intégrale de l'équation (10), passant par le point $(\bar{t}, \bar{v})$ où $\bar{v}$ satisfait à (14). Puisque — comme nous avons déjà remarqué — subsiste l'inégalité:

$$\bar{v} > 0, \tag{19}$$

(ce qui veut dire que la valeur critique de la vitesse peut être dirigée conformément à la direction de la force f_1), alors la fonction $g(v)$ au voisinage du point $v = \bar{v}$ est donnée par la formule:

$$g(v) = g[1 - f(v)]; \tag{20}$$

elle est donc une fonction décroissante. De là découlent en raison de (14) les inégalités:

$$g(v) > 0 \quad \text{pour} \quad v < \bar{v}; \qquad g(v) < 0 \quad \text{pour} \quad v > \bar{v}. \tag{21}$$

Nous affirmons que l'unicité de l'intégrale de l'équation (10) est garantie dans le voisinage du point $t = \bar{t}$ à droite.

En effet, nous constatons, que la fonction constante:

$$v(t) \equiv \bar{v} \tag{22}$$

satisfait à la condition initiale:

$$v(\bar{t}) \equiv \bar{v} \tag{23}$$

et remplit l'équation (10). Supposons pour un moment qu'il existe, exceptée la précédente, une autre intégrale $v_0(t)$ qui satisfait à la condition: $v_0(\bar{t}) = \bar{v}$ et qui n'est pas identique à $\bar{v}$ au voisinage à droite de $t = \bar{t}$. Prenons un $t_1 > \bar{t}$ tel que p. ex. $v_0(t_1) > \bar{v}$. De la continuité de la fonction $v_0(t)$ on peut déduire l'existence de la plus grande racine de l'équation $v_0(t) = \bar{v}$, située dans l'intervalle $(\bar{t}, t_1)$. Désignons par τ cette racine. A l'intérieur de l'intervalle (τ, t_1) on a $v_0(t) > \bar{v}$. Appliquons à la fonction $v_0(t)$ le théorème sur les accroissements finis dans l'intervalle (τ, t_1). On obtient alors:

$$v_0'(\tau_0) = \frac{v_0(t_1) - v_0(\tau)}{t_1 - \tau} = \frac{v_0(t_1) - \bar{v}}{t_1 - \tau} > 0$$

pour un τ_0 de l'intérieur de l'intervalle (τ, t_1). Mais d'autre part on a

$$v_0'(\tau_0) = g[v_0(\tau_0)] < 0 \quad \text{grâce à} \quad v_0(\tau_0) > \bar{v}.$$

et nous obtenons une contradiction. D'une façon analogue on parvient à une contradiction en supposant l'existence d'un t_2 tel que $t_2 > \bar{t}$ et $v_0(t_2) < \bar{v}$. Notre théorème est ainsi démontré.

Une autre circonstance se présente quand il s'agit de l'allure des solutions de l'équation (10) au voisinage à gauche du point $t = \bar{t}$. Ici nous nous appuyons sur un théorème de M. Kamke*), qui donne des conditions nécessaires et suffisantes. Nous construisons deux intégrales impropres:

$$I_1 = \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+\delta} \frac{dv}{g(v)}, \qquad I_2 = \int_{\bar{v}}^{\bar{v}-\delta} \frac{dv}{g(v)}. \tag{24}$$

où δ est positif et suffisamment petit.

Si aucune de ces intégrales ne possède une valeur finie, alors il passe par le point $(\bar{t}, \bar{v})$ localement une et une seule intégrale de l'équation (10). Si, par contre, une au moins des intégrales I_1, I_2 possède une valeur finie, alors on n'a pas l'unicité des intégrales (naturelment dans le voisinage du côté gauche, d'après le résultat établi). Une de ces intégrales représente la fonction (22); on aura en outre d'autres intégrales et-comme il est bien connu-d'une quantité infinie. Une de ces intégrales supplémentaires peut être obtenue, si l'on résoud en v l'équation implicite:

$$G(v) = t - \bar{t}, \tag{25}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$G(v) = \int_{\bar{v}}^{v} \frac{du}{g(u)}, \tag{26}$$

en prenant celle des intégrales I_1, I_2, qui a la valeur finie.

§ 5. Nous citerons le suivant critérium suffisant pour que par chaque point (t, v) passe une intégrale unique de l'équation (10), valable pour tous les t.

---

*) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (1930), p. 20

Théorème. Supposons que pour la courbe

$$w = g(v), \tag{27}$$

rapportée a un système rectangulaire cartésien dans le plan (v, w), la droite $v = \bar{v}$ n'est pas la tangente (bilatérale) au point $v = \bar{v}$. Alors subsiste l'unicité de l'intégrale pour chaque point du plan (t, v).

La démonstration de ce théorème découle du théorème de M. Kamke, cité plus haut, et d'un théorème (la démonstration duquel sera publiée ailleurs*), qui dit, qu'une condition nécessaire pour la finité de toutes les deux intégrales I_1, I_2 consiste dans le fait, que la droite parallèle à l'axe w soit tangente à la courbe (27) au point $v = \bar{v}$. S. l'on admettait en particulier une condition supplémentaire (une supposition, qui jusqu'à présent a été ordinairement admise) que la fonction $f(v)$ admet partout une dérivée, l'unicité générale des intégrales de l'équation (10) est alors garantie.

§ 6. Passons maintenant au sujet suivant. Supposons que dans le cas envisagé (l'existence de la valeur critique de la vitesse) une au moins des intégrales impropres (24) possède une valeur finie. Supposons ensuite les conditions initiales:

$$v(t_0) = v_0 \tag{28}$$

où v_0 est arbitraire, mais différent de $\bar{v}$:

$$v_0 \neq \bar{v} \tag{29}$$

et t_0 est complétement arbitraire.

L'unicité locale de l'intégrale de l'équation (10), passant par le point (t_0, v_0) étant déjà établie, nous nous démandons dans quelles conditions l'unicité intégrale (pour toutes les valeur des t) sera garantie. Pour résoudre cette question, il suffit, d'après ce, qu'on a établi plus haut, d'analyser, quand, en prolongeant la courbe intégrale en déhors de voisinage du point t_0 dans la direction à gauche, on rencontrera un point avec l'ordonnée $\bar{v}$. Or, nous affirmons, que cette circonstance ne peut pas avoir lieu. Pour aboutir à la contradiction nous supposons pour un instant qu'on a pour une valeur $\bar{t} < t_0 : v(\bar{t}) = \bar{v}$.

*) S. Gołąb, O pewnym warunku koniecznym skonczoności całki niewłaściwej, Wiadom. Mat. 46 (1938), p. 1—5.

D'après l'unicité, prouvée plus haut, ayant lieu à droite du point $\bar{t}$ on conclurait $v(t) \equiv \bar{v}$ pour tout $t \geqslant \bar{t}$, tandisque $v(t_0) = v_0 \neq \bar{v}$ et $t_0 > \bar{t}$. Nous avons donc une incompatibilité et par conséquent nous avons démontré, que par chaque point (t_0, v_0) tel que subsiste l'inégalité (29), passe une et une seule courbe intégrale de l'équation (10), valable pour toutes, les valeurs du paramètre t.

§ 7. D'après les considérations ci-dessus on peut se rendre compte de l'allure intégrale des courbes intégrales de l'équation (10) dans les cas particuliers et sous les diverses conditions initiales (28). Nous omettons les details de la discussion et nous rapportons seulement les résultats.

1. Dans le cas I), où il n'existe pas la valeur critique de la vitesse (c.-à-d. $f(v) \to k \leqslant 1$ pour $v \to \infty$), par chaque point (t_0, v_0) du plan (t, v) passe précisément une courbe integrale de l'équation (10), valable pour toutes les valeurs du paramètre t de $-\infty$ à $+\infty$. Cette courbe est croissante et croît de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Dans le cas II), où $f(v) \to k > 1$ ou bien $f(v) \to \infty$ pour $v \to \infty$ il existe une (et une seule) valeur critique $\bar{v}$ de la vitesse. Ce cas doit être divisé en quatre cas particuliers, selon la finité des intégrales impropres (24). Ces cas particuliers seront numérotés d'une manière suivante:

II, 1) aucune des intégrales I_1 et I_2 n'existe
II, 2) l'intégrale I_1 a un sens, tandisque I_2 est infinie,
II, 3) l'intégrale I_2 a un sens, tandisque I_1 est infinie,
II, 4) toutes les deux intégrales I_1 et I_2 ont une valeur finie.

Dans tous les quatre cas passe par chaque point (t_0, v_0) tel que $v_0 \neq \bar{v}$, exactement une courbe intégrale de l'équation (10), valable pour tous les t. Cette courbe croît (d'une manière stricte ou large) ou décroît de la valeur a jusqu'à la valeur $\bar{v}$, où nous avons:

$$\begin{cases} a = -\infty & \text{si } v_0 < \bar{v} \\ a = +\infty & \text{si } v_0 > \bar{v}. \end{cases} \tag{30}$$

La valeur critique $\bar{v}$ est atteinte ou non suivant que l'intégrale impropre corréspondante a une valeur finie ou non.

Dans les cas II, 2, 3, 4 par chaque point $(t_0, \bar{v})$ passe une infinité des courbes intégrales de l'équation (10). Toutes ces courbes ont un parcours identique pour $t \geqslant t_0$ et diffèrent seulement entre elles quand il s'agit des valeurs pour les $t < t_0$. On a notamment $v \equiv \bar{v}$ pour $t \geqslant \bar{t}_0$. Il y a parmi ces courbes intégrales une qui est la droite $v = \bar{v}$ et les autres se composent d'un rayon parallèle à l'axe t pour $t \geqslant t_1$, où $t_1 \geqslant t_0$ d'ailleurs quelconque, et d'une partie croissante (de $-\infty$] ou décroissante (de $+\infty$) conformément au fait que I_2 respectivement I_1 possède une valeur finie.

Dans le cas II, 1 par chaque point $(t_0, \bar{v})$ passe une et une seule courbe intégrale de l'équation (10), valable pour tous les t. Cette courbe intégrale se réduit à la droite $v = \bar{v}$, parallèle à l'axe des t.

T. Rakowiecki.

Détermination de l'orbite du compagnon de l'étoile double visuelle à l'aide des temps et des angles de position.

(Wyznaczenie toru towarzysza teleskopowej gwiazdy podwójnej z czasów i kątów pozycyjnych).

Bien entendu, si, pour un système binaire d'étoiles, sont donnés les seuls instants du passage du satellite aux certains angles de position, alors on ne peut parler que de la détermination de la période P, de l'époque du passage au périastre T et des éléments angulaires de l'orbite e, ω, i et Ω qui définissent la forme de l'ellipse et sa position par rapport au plan tangent à la sphère céleste au point de l'étoile principale. Afin de déterminer le demi-grand axe de l'orbite, la connaissance au moins de une distance du compagnon à l'astre principal est indispensable.

Théoriquement il suffit d'avoir six angles de position quelconques θ, avec leurs instants t, pour calculer les six éléments de l'orbite cités ci-dessus. En effet, nous pouvons écrire alors les six équations de Képler

$$E - e \sin E = \frac{360^0}{P}(t - T),$$

les six de la forme

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\frac{E}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

et les six

$$\cos i = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \Omega)}{\operatorname{tg}(v + \omega)},$$