det, ist der Punkt K der Schnittpunkt der besprochenen Spirale und des Kreises um B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $\sqrt{\rho_2}$.

§ 6. Die vorstehenden Betrachtungen lösen nicht in voller Allgemeinheit das Problem der kürzesten Verbindungslinien zweier beliebiger Punkte. Der Grund dieser Tatsache liegt in der einschränkenden Voraussetzungen, die zur Anwendung der Methode der klassischen Variationsrechnung notwendig sind. Zur allgemeinen Lösung des angeführten Problems ist auch eine Präzisierung notwendig, in welchem Sinne wir den Begriff der Bogenlänge in einer singulären Finslerschen Geometrie auffassen. Das erwähnte Problem werde ich in meiner nächsten Arbeit weiter entwickeln.

Zum Schluss danke ich herzlichst dem Herrn St. Gołąb für die mir bei dieser Arbeit erteilten Ratschläge.

Streszczenie polskie.

W pracy powyższej są podane niektóre własności pewnej, szczególnej, płaskiej geometrji Finslera, otrzymanej przez autora w ten sposób, że długości na każdej prostej mierzy się przy pomocy jednostki równej odległości tej prostej od stałego punktu — bieguna. Linjami najkrótszemi są w takiej geometrji koła i spirale logarytmiczne.

Sur quelques problèmes de la théorie des surfaces de l'espace affine.

(O kilku zagadnieniach teorji powierzchni przestrzeni afinalnej).

Par

W. Ślebodziński.

On sait que la théorie des surfaces de l'espace affine à groupe des transformations linéaires unimodulaires s'est développée dans les deux dernières dizaines d'années grâce aux travaux des géomètres allemands (G. Pick, W. Blaschke, J. Radon, L. Berwald) dont les développements ont été exposés dans l'excellent livre de M. Blaschke[1]). Ces recherches ont été complétées d'une contribution importante due à M. Cartan[2]) qui a introduit, entre autres, la notion de connexion affine induite sur une surface et la notion de surfaces affinement isomorphes. On doit encore remarquer que les développements de M. Cartan ont pour objet les surfaces de l'espace affine général.

Ce Mémoire, qui est consacré en premier lieu à deux problèmes liés des notions introduites par M. Cartan, se divise en quatre chapitres. Le Chapitre I constitue un exposé succinct des notions et des équations fondamentales de la théorie des surfaces de l'espace affine général qui interviennent dans la suite; cette théorie ne diffère pas essentiellement de la théorie des surfaces de l'espace à groupe des transformations affines unimodulaires, la principale différence se révélant par le fait que les rayons de courbure principaux, la courbure affine

[1]) W. Blaschke [2]. (Les nombres entre crochets se rapportent à l'index bibliographique placé à la fin du Mémoire).

[2]) E. Cartan [7]; v. aussi [6].

et les coefficients des formes différentielles de la surface ont maintenant le caractère des densités scalaires ou tensorielles (cf. *nos* **4** et **6**). Dans le Chapitre **II** j'établis les fondements de la connexion affine induite sur une surface et les équations des géodésiques. Dans le Chapitre **III** on trouve la solution du problème suivant: étant donnée une variété A_2 à connexion affine admettant une unité absolue d'aire, existe-t-il des surfaces de l'espace affine dont la connexion induite soit identique à celle de la variété A_2? Je montre qu'en général ce problème n'a pas de solution et que, si elle existe, la surface réalisant la connexion peut dépendre des constantes ou des fonctions arbitraires. La discussion des divers cas qui peuvent se présenter nous amène en même temps à une classification des variétés A_2. Dans le dermier chapitre j'étudie la classe importante des surfaces dont la connexion induite est symétrique dans le sens de M. Cartan. Ces surfaces peuvent être regardées comme une généralisation des surfaces à courbure constante de l'espace ordinaire qu'elles comprennent d'ailleurs comme un cas particulier.

Ch. I. Généralités sur les surfaces de l'espace affine.

1. Préliminaires. Désignons par x^i $(i=1,2,3)$ les coordonnées cartésiennes d'un point arbitraire M de l'espace affine E_3 et imaginons un repère R_3 d'origine M formé de trois vecteurs $\vec{I}_h$ $(h=1,2,3)$. Nous allons supposer que les coordonnées du point M et les composantes des vecteurs $\vec{I}_h$ soient des fonctions de certains paramètres dont le nombre peut être égal à l'un des nombres 1, 2 ou 3. Le déplacement infinitésimal qui amène le repère R_3 en concidence avec le repère attaché à un point infiniment voisin sera donné par les formules suivantes[3])

$$d\overrightarrow{OM}=\omega^r\vec{I}_r, \qquad d\vec{I}_h=\omega_h{}^r\vec{I}_r, \tag{1}$$

ω^h et $\omega_r{}^h$ étant des formes différentielles linéaires des paramètres dont dépend le repère R_3 et O désignant l'origine du système de coordonnées dont il est rapporté l'espace E_3.

Aux équations (1) nous allons associer un système des formules dualistiques; pour les établir posons

$$\Delta=[\vec{I}_1,\vec{I}_2,\vec{I}_3], \tag{2}$$

[3]) Dans tout ce qui suit nous supposons que les indices *latins* parcourent les valeurs 1, 2, 3 et les indices *grecs* les valeurs 1, 2. Nous supprimons aussi le signe de sommation pour le même indice deux fois répété dans un terme monôme.

en désignant par le symbole du second membre le déterminant dont les lignes sont formées respectivement de composantes des vecteurs $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$. En différentiant l'équation (2), on en déduit la relation suivante

$$d\Delta=[d\vec{I}_1,\vec{I}_2,\vec{I}_3]+[\vec{I}_1,d\vec{I}_2,\vec{I}_3]+[\vec{I}_1,\vec{I}_2,d\vec{I}_3];$$

si l'on y remplace les différentielles $d\vec{I}_h$ par leurs valeurs (2), on trouve

$$d\log\Delta=\omega_r{}^r. \tag{3}$$

Considérons maintenant le plan passant par le point M et par les vecteurs $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$; son équation peut être mise sous la forme suivante

$$P^1\equiv\frac{1}{\Delta}[\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM},\vec{I}_2,\vec{I}_3]=0, \tag{4'}$$

Q désignant le point courant du plan. Les deux équations

$$\left.\begin{aligned} P^2&\equiv\frac{1}{\Delta}[\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM},\vec{I}_3,\vec{I}_1]=0,\\ P^3&\equiv\frac{1}{\Delta}[\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM},\vec{I}_1,\vec{I}_2]=0, \end{aligned}\right\} \tag{4''}$$

auront une signification analogue à celle de l'équation $P^1=0$. En différentiant le premier membre de l'équation $P^1=0$, on obtient

$$\Delta\,dP^1=-[d\overrightarrow{OM},\vec{I}_2,\vec{I}_3]+[\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM},d\vec{I}_2,\vec{I}_3]+$$
$$+[\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM},\vec{I}_2,d\vec{I}_3]-[\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ},\vec{I}_2,\vec{I}_3]\,d\log\Delta;$$

si l'on y substitue aux différentielles $d\overrightarrow{OM}$, $d\vec{I}_2$, $d\vec{I}_3$ leurs expressions tirées des équations (1) et que l'on tient compte de la relation (3) on trouve l'équation suivante

$$dP^1+\omega_r{}^1P^r+\omega^1=0,$$

à laquelle on peut adjoindre deux autres d'une forme analogue. Le système associé aux équations (1) sera donc

$$dP^h+\omega_r{}^hP^r+\omega^h=0. \tag{5}$$

La différentation extérieure de l'un ou l'autre des deux systèmes (1) et (5) nous conduit aux *équations de structure* de l'espace E_3; les voici

$$(\omega^h)' + [\omega_r^{\,h}\, \omega^r] = 0, \tag{6'}$$

$$(\omega_i^{\,h})' + [\omega_r^{\,h}\, \omega_i^{\,r}] = 0. \tag{6''}$$

2. Normale affine. Considérons dans l'espace E_3 une surface *non développable* S et désignons par $x^i(u^1, u^2)$ les coordonnées d'un point arbitraire M de S. Attachons au point M un repère R_3 ayant ce point pour origine et formé de trois vecteurs $\vec{I}_1\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\right)$, $\vec{I}_2\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)$, $\vec{I}_3(a^1, a^2, a^3)$ dont les deux premiers sont tangents en M aux lignes $u^2 = \text{const.}$ et $u^1 = \text{const.}$ respectivement. Posons encore

$$\Delta = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i \right|; \tag{7}$$

le déterminant Δ est, par hypothèse, différent de zéro.

Si l'on se déplace sur la surface S du point M à un point infiniment voisin de coordonnées gaussiennes $u^1 + d\,u^1$, $u^2 + d\,u^2$, le mouvement du repère sera défini par les formules (1), où l'on doit poser $\omega^3 = 0$; on aura donc

$$d\,\overrightarrow{OM} = \omega_1 \vec{I}_1 + \omega^2 \vec{I}_2, \quad d\,\overrightarrow{I_h} = \omega_h^{\,r} \vec{I}_r. \tag{8}$$

Les composantes du vecteur $d\,\overrightarrow{OM}$ par rapport au repère fixe de l'espace E_3 étant $d\,x^i$, la première des relations ci-dessus nous donne

$$d\,x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\,\omega^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\,\omega^2,$$

d'où

$$\omega^1 = d\,u^1, \quad \omega^2 = d\,u^2. \tag{9}$$

Si dans la deuxième des équations (8) on pose successivement $h = 1, 2, 3$ et que l'on égale les composantes correspondantes des deux membres, on trouve

$$d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^1} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\,\omega_1^{\,1} + \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\,\omega_1^{\,2} + a^i\,\omega_1^{\,3},$$

$$d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^2} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\,\omega_2^{\,1} + \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\,\omega_2^{\,2} + a^i\,\omega_2^{\,3},$$

$$d\,a^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\,\omega_3^{\,1} + \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\,\omega_3^{\,2} + a^i\,\omega_3^{\,3}.$$

En résolvant ces équations par rapport aux composantes $\omega_j^{\,i}$ du mouvement infinitésimal et en tenant compte de l'égalité (7), on est conduit aux formules suivantes

$$\begin{gathered}
\Delta\,\omega_1^{\,1} = \left| d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i \right|, \quad \Delta\,\omega_1^{\,2} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, a^i \right|, \\
\Delta\,\omega_1^{\,3} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^1} \right|, \\
\Delta\,\omega_2^{\,1} = \left| d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i \right|, \quad \Delta\,\omega_2^{\,2} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i \right|, \\
\Delta\,\omega_2^{\,3} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^2} \right|, \\
\Delta\,\omega_3^{\,1} = \left| d\,a^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i \right|, \quad \Delta\,\omega_3^{\,2} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, d\,a^i, a^i \right|, \quad \Delta\,\omega_3^{\,3} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, d\,a^i \right|.
\end{gathered} \tag{10}$$

Maintenant nous nous proposons de déterminer les composantes a^i de telle façon que le vecteur $\vec{I}_3$ soit lié à la surface d'une manière invariante par les transformations du groupe affine. Posons pour ce but

$$L_{\lambda\mu} = \left| \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda\, \partial u^\mu}, \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \right| \tag{11}$$

et

$$\Lambda = \sqrt{|L_{11} L_{22} - L_{12}^{\,2}|}. \tag{12}$$

Remarquons que, la surface S n'étant pas développable, *l'expression* Λ *est différente de zéro.*

Ceci posé, des formules (9) et (10) on déduit sans effort

$$[\omega^1\, \omega^2] = [d\,u^1\, d\,u^2], \quad \Delta^2 [\omega_1^{\,3}\, \omega_2^{\,3}] = (L_{11} L_{22} - L_{12}^{\,2})\,[d\,u^1\, d\,u^2],$$

d'où

$$[\omega_1{}^3\,\omega_2{}^3] = \frac{L_{11}\,L_{22} - L_{12}{}^2}{\Delta^2}\,[\omega^1\,\omega^2].$$

Or, la *première condition* que nous imposons au repère R_3 s'exprime par l'égalité suivante

$$\frac{L_{11}\,L_{22} - L_{12}{}^2}{\Delta^2} = \pm 1,$$

où l'on doit prendre le signe $+$ ou $-$ suivant que l'on ait $L_{11}\,L_{22} - L_{12}{}^2 > 0$ ou $L_{11}\,L_{22} - L_{12} < 0$. Nous pouvons satisfaire à cette condition en posant

$$\Delta = \Lambda, \tag{13}$$

Maintenant nous allons assujettir le repère R_3 à une *deuxième condition*, en posant

$$\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2 = \omega_3{}^3, \tag{14}$$

ce qui, en vertu de la relation (3), peut être remplacé par l'égalité suivante

$$d \log \Delta = 2\,(\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2). \tag{15}$$

Si l'on utilise les formules (10) et que l'on tient compte de la relation (13), l'équation (15) prendra la forme

$$d\,\Lambda = 2\left| d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^1},\ \frac{\partial x^i}{\partial u^2},\ a^i \right| + 2\left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1},\ d\,\frac{\partial x^i}{\partial u^2},\ a^i \right|. \tag{16}$$

Observons que les deux conditions ci-dessus ont un caractère invariant par les transformations du groupe affine, car elles expriment des relations entre les composantes du mouvement infinitésimal prises par rapport au repère mobile. Il nous reste encore à montrer que les équations (16) et (13) déterminent complètement les composantes a^i. Supposons à cet effet que les équations de la surface soient mises sous la forme suivante

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = f(u^1, u^2),$$

p, q, r, s, t désignant, suivant l'usage, les dérivées de $f(u^1, u^2)$. En vertu des formules (11) et (12) on aura

$$\Lambda = \sqrt{|\,r\,t - s^2\,|} \tag{12'}$$

et les équations (16) et (13) prendront maintenant la forme suivante

$$r\,a^1 + s\,a^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}, \quad s\,a^1 + t\,a^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}, \quad a^3 - p\,a^1 - q\,a^2 = \Lambda,$$

d'où il suit

$$a^1 = \frac{s\,\dfrac{\partial \Lambda}{\partial u^2} - t\,\dfrac{\partial \Lambda}{\partial u^1}}{2\,(r\,t - s^2)}, \quad a^2 = \frac{-r\,\dfrac{\partial \Lambda}{\partial u^2} + s\,\dfrac{\partial \Lambda}{\partial u^1}}{2\,(r\,t - s^2)}, \quad a^3 = p\,a^1 + q\,a^2 + \Lambda. \tag{17}$$

On voit donc bien que les conditions imposées au repère R_3 déterminent le vecteur $\vec{I}_3$ sans aucune ambiguïté; on sait qu'à la droite menée par le point M dans la direction de ce vecteur on a donné le nom de la *normale affine* à la surface S au point considéré (G. Pick)[4].

3. Equations fondamentales de la surface. Avant de continuer l'étude de la surface S posons pour abréger

$$D_{\lambda\mu} = \frac{1}{\Delta}\left| \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda\,\partial u^\mu},\ \frac{\partial x^i}{\partial u^1},\ \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \right|, \tag{18}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}{}^1 = \frac{1}{\Delta}\left| \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda\,\partial u^\mu},\ \frac{\partial x^i}{\partial u^2},\ a_i \right|, \quad \Gamma_{\lambda\mu}{}^2 = -\left| \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda\,\partial u^\mu},\ \frac{\partial x^i}{\partial u^1},\ a^i \right|, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} B_1{}^1 &= -\frac{1}{\Delta}\left| \frac{\partial x^i}{\partial u^2},\ \frac{\partial a^i}{\partial u^1},\ a^i \right|, \quad & B_2{}^1 &= -\frac{1}{\Delta}\left| \frac{\partial x^i}{\partial u^2},\ \frac{\partial a^i}{\partial u^2},\ a^i \right|, \\ B_1{}^2 &= \frac{1}{\Delta}\left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1},\ \frac{\partial a^i}{\partial u^1},\ a^i \right|, \quad & B_2{}^2 &= \frac{1}{\Delta}\left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1},\ \frac{\partial a^i}{\partial u^2},\ a^i \right|. \end{aligned} \tag{20}$$

On aura évidemment

$$D_{\lambda\mu} = D_{\mu\lambda} \tag{21}$$

et

$$\Gamma_{\lambda\mu}{}^\varkappa = \Gamma_{\mu\lambda}{}^\varkappa. \tag{22}$$

La comparaison des formules (11) et (18) nous montre que l'on a

$$D_{\lambda\mu} = \frac{1}{\Delta}\,L_{\lambda\mu}$$

et le rapprochement des égalités (12) et (13) conduit à la relation

$$D_{11}\,D_{22} - D_{12}{}^2 = \pm 1. \tag{23}$$

---

[4]) La condition qui définit la *normale affine* peut être formulée d'une autre façon que dans le texte; cf. E. Cartan [7].

Avec les notations adoptées plus haut les formules (10) prendront maintenant une forme plus simple et on aura

$$
\begin{aligned}
\omega_1^{\ 1} &= \Gamma_{1\rho}^{\ \ 1}\, d u^\rho, & \omega_1^{\ 2} &= \Gamma_{1\rho}^{\ \ 2}\, d u^\rho, & \omega_1^{\ 3} &= D_{1\rho}\, d u^\rho, \\
\omega_2^{\ 1} &= \Gamma_{2\rho}^{\ \ 1}\, \mathrm{d} u^\rho, & \omega_2^{\ 2} &= \Gamma_{2\rho}^{\ \ 2}\, d u^\rho, & \omega_2^{\ 3} &= D_{2\rho}\, d u^\rho, \\
\omega_3^{\ 1} &= B_\rho^{\ 1}\, d u^\rho, & \omega_3^{\ 2} &= B_\rho^{\ 2}\, d u^\rho, & \omega_3^{\ 3} &= \Gamma_{\sigma\rho}^{\ \ \sigma}\, d u^\rho.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Ajoutons encore que la dernière des formules (24) est une concéqence immédiate de la relation (14) et que l'équation (15) peut être présentée sous la forme suivante

$$
d \log \Lambda = 2\,(\Gamma_{\rho 1}^{\ \ \rho}\, d u^1 + \Gamma_{\rho 2}^{\ \ \rho}\, d u^2). \tag{25}
$$

Nous voyons ainsi que toutes les composantes $\omega_j^{\ i}$ s'expriment au moyen des coefficients $D_{\lambda\mu}$, $\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \varkappa}$ et $B_\lambda^{\ \varkappa}$. Ces coefficients satisfont à plusieurs relations différentielles qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des surfaces de l'espace E_3 et qui sont toutes des conséquences des équations de structure de celui-ci. En effet, considérons les équations de structure (6'') et envisageons d'abord celles d'entre elles qui s'obtiennent en supposant que l'un des indices h, i soit égal à 3. Un calcul facile, où on aura à employer les formules (24), nous conduira aux relations suivantes

$$
\frac{\partial D_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} - \frac{\partial D_{\lambda\nu}}{\partial u^\mu} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\ \ \rho} D_{\rho\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \rho} D_{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^{\ \ \rho} D_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\ \ \rho} D_{\lambda\mu}, \tag{26}
$$

$$
\frac{\partial B_\mu^{\ \varkappa}}{\partial u^\nu} - \frac{\partial B_\nu^{\ \varkappa}}{\partial u^\mu} = \Gamma_{\rho\mu}^{\ \ \varkappa} B_\nu^{\ \rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\ \ \varkappa} B_\mu^{\ \rho} + \Gamma_{\rho\nu}^{\ \ \rho} B_\mu^{\ \varkappa} - \Gamma_{\rho\mu}^{\ \ \rho} B_\nu^{\ \varkappa}, \tag{27}
$$

auxquelles nous donnerons le nom des *équations de Codazzi* de la surface S. Les équations (6'') qui correspondent aux valeurs h, $i = 1, 2$ nous donneront de même un second groupe de relations *(équations de Gauss)*

$$
\begin{aligned}
D_{12} B_1^{\ 1} - D_{11} B_2^{\ 1} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^{\ \ 1}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^{\ \ 1}}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^{\ \ 1} \Gamma_{11}^{\ \ 2} - \Gamma_{12}^{\ \ 1} \Gamma_{12}^{\ \ 2}, \\
D_{22} B_1^{\ 1} - D_{21} B_{21} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^{\ \ 1}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^{\ \ 1}}{\partial \Gamma^1} + \Gamma_{12}^{\ \ 1} (\Gamma_{12}^{\ \ 1} - \Gamma_{22}^{\ \ 2}) - \Gamma_{22}^{\ \ 1} (\Gamma_{11}^{\ \ 1} - \Gamma_{12}^{\ \ 2}), \\
D_{12} B_1^{\ 2} - D_{11} B_2^{\ 2} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^{\ \ 2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^{\ \ 2}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^{\ \ 2} (\Gamma_{11}^{\ \ 1} - \Gamma_{12}^{\ \ 2}) - \Gamma_{11}^{\ \ 2} (\Gamma_{12}^{\ \ 1} - \Gamma_{22}^{\ \ 2}), \\
D_{22} B_1^{\ 2} - D_{21} B_2^{\ 2} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^{\ \ 2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^{\ \ 2}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^{\ \ 1} \Gamma_{12}^{\ \ 2} - \Gamma_{22}^{\ \ 1} \Gamma_{11}^{\ \ 2}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Si, enfin, on pose dans les équations de structure (6'') $h = i = 3$, on obtient l'égalité suivante

$$
D_{11} B_2^{\ 1} - D_{12} B_1^{\ 1} + D_{21} B_2^{\ 2} - D_{22} B_1^{\ 2} = 0. \tag{29}
$$

Le système d'équations (26), (27), (28) et (29) sert de base à la théorie des surfaces de l'espace affine. Il est, en effet, facile de voir que si l'on se donne les fonctions $\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \varkappa}$, $D_{\lambda\mu}$ et $B_\lambda^{\ \varkappa}$ de manière à satisfaire à ces équations, il leur correspondra une surface déterminée aux transformations du groupe affine près. Pour le mettre en évidence remarquons que, le déterminant Δ défini par la formule (7) étant, par hypothèse, différent de zéro, les dérivées $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}$ peuvent être exprimées de la façon suivante

$$
\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} = P_{\lambda\mu} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + Q_{\lambda\mu} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + R_{\lambda\mu}\, a^i.
$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations (18) et (19) et que l'on tient compte de la relation (7), on calcule facilement les coefficients $P_{\lambda\mu}$, $Q_{\lambda\mu}$, $R_{\lambda\mu}$ et l'on obtient ainsi

$$
\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ 1} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ 2} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + D_{\lambda\mu}\, a^i. \tag{30}
$$

Posons de même

$$
\frac{\partial a^i}{\partial u^\lambda} = p_\lambda \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + q_\lambda \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + r_\lambda\, a^i;
$$

en utilisant les égalités (20) et (7), on calcule les coefficients p_λ, q_λ, r_λ, ce qui permet ensuite d'écrire les formules suivantes

$$
\frac{\partial a^i}{\partial u^\lambda} = B_\lambda^{\ 1} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + B_\lambda^{\ 2} \frac{\partial x^i}{\partial u^2}. \tag{31}
$$

Or, il est facile de vérifier que les équations de Gauss et de Codazzi expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système d'équations (30) et (31) soit complètement intégrable.

4. Remarques diverses. 1⁰ Le vecteur η (Vektor der Affinnormalen) dont se sert M. B l a s c h k e dans son livre [5]) ne diffère du vec-

---

[5]) W. B l a s c h k e [2], p. 108, équ. (26).

teur $\vec{I_3}$ déterminé dans le n^0 2 que par un facteur scalaire:

$$\mathfrak{y} = \Lambda^{\frac{1}{2}} \vec{I_3}.$$

2^0 Si l'on fait un changement de coordonnées cartésiennes x^i au moyen d'une transformation linéaire de déterminant $d \neq 0$, les quantités $L_{\lambda\mu}$ se multiplient par d et Λ par $|d|$, les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^{\varkappa}$, $D_{\lambda\mu}$ et B_{μ} restant inaltérés. Ce la se vérifie immédiatement sur les formules des $n^{\underline{os}}$ **2** et **3** définissant ces grandeurs. — Le vecteur $\vec{I_3}$ étant invariant par le changement de coordonnées cartésiennes du point de l'espace E_3 on en conclut, d'après la relation entre les vecteurs $\mathfrak{y}$ et $\vec{I_3}$ donnée plus haut, que le vecteur $\mathfrak{y}$ se multiplie par le facteur $|d|^{-\frac{1}{2}}$.

3^0 Supposons maintenant que l'on effectue sur les coordonnées gaussiennes u^λ du point de la surface S un changement de la forme

$$\bar{u}^\lambda = \bar{u}^\lambda (u^1, u^2)$$

et que l'on pose

$$\delta = \frac{\partial (\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial (u^1, u^2)} \neq 0.$$

En s'appuyant sur les relations (11) et (12), on verra facilement que les coefficients $L_{\lambda\mu}$ et Λ se transformeront alors d'après les formules

$$\bar{L}_{\lambda\mu} = \delta^{-1} L_{\rho\sigma} \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\lambda} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\mu},$$

$$\bar{\Lambda} = \delta^{-2} \Lambda .$$

On verra ensuite, en ayant égard aux relations (13) et (16), que les composantes a^i du recteur $\vec{I_3}$ obéissent à la loi de transformation suivante

$$\bar{a}^i = \delta^{-1} a^i.$$

Ceci montre que les composantes a^i sont des densités (scalaires) de poids -1. Si, enfin, on se reporte aux équations (18), (19) et (20), on trouvera que les formules de transformation des coefficients $D_{\lambda\mu}$ et B_μ^λ sont données par le tableau suivant

$$\bar{D}_{\lambda\mu} = \delta D_{\rho\sigma} \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\lambda} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\mu},$$

$$\bar{B}_\mu^\lambda = \delta^{-1} B_\sigma^\rho \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\rho} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\mu}.$$

et que la loi de transformation des quantités $\Gamma_{\lambda\mu}^{\varkappa}$ est identique à celle des coefficients du transport parallèle dans une variété à connexion affine [6]. Nous voyons ainsi que les coefficients $D_{\lambda\mu}$, B_μ^λ et $L_{\lambda\mu}$ sont des densités tensorielles au sens de M. M. O. Veblen et T. Y. Thomas.

Rappelons encore que par la même transformation de coordonnées u^λ le vecteur $\mathfrak{y}$ se multiplie par $+1$ ou -1 suivant que l'on a $\delta > 0$ ou $\delta < 0$ [7].

4^0. En introduisant la notion de la normale affine(n^0 **2**), nous avons posé $\Delta = \Lambda$ (équ. (13)). Or, on peut remplacer cette égalité par une autre: $\Delta = -\Lambda$ et on verra facilement que le premier cas se ramène au second, en changeant le sens du vecteur I_3. On peut encore remarquer que d'après les formules (18), (19) et (20), le choix de l'une ou de l'autre de ces hypothèses n'a aucune influence sur les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^{\varkappa}$, les coefficients $D_{\lambda\mu}$ et B_μ^λ changeant seulement leurs signes. Nous pouvons dire que la surface peut être *orientée* de deux façons différentes.

5. Applications. Nous alllons appliquer les développements du n^0 **2** à quelques cas particuliers. Envisageons d'abord une surface dont les normales affines ont une direction commune que nous pouvons choisir pour la direction de l'axe x^3; les surfaces ainsi définies portent le nom de *sphères affines impropres* [8]. Supposons que les équations d'une telle surface soient mises sous la forme

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = f(u^1, u^2).$$

Le vecteur $\vec{I_3}$ étant, par hypothèse, parallèle à l'axe x^3, on a: $a^1 = a^2 = 0$; en portant ces valeurs dans les équations (17), on obtient

$$s \frac{\partial \Lambda}{\partial u^2} - t \frac{\partial \Lambda}{\partial u^1} = 0, \quad r \frac{\partial \Lambda}{\partial u^2} - s \frac{\partial \Lambda}{\partial u^1} = 0.$$

La surface n'étant pas développable, il s'en suit $\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1} = \frac{\partial \Lambda}{\partial u^2} = 0$. En ayant égard à la formule (12') du n^0 **2**, on en conclut que la fonction $x^3 = f(x^1, x^2)$ doit être une intégrale de l'équation

$$r t - s^2 = a, \tag{32}$$

où a est une constante différente de zéro.

---

[6]) J. A. Schouten [9], p. 65.
[7]) W. Blaschke [2], p. 106.
[8]) W. Blaschke, l. c. p. 215.

Considérons maintenant une surface dont les normales affines passent par un point fixe que nous pouvons choisir pour origine des coordonnées *(sphère affine)* [9]; on aura donc

$$\frac{a^1}{x^1}=\frac{a^2}{x^2}=\frac{a^3}{x^3}.$$

Désignons par k la valeur commune de ces rapports et portons les expressions $a^i=k\,x^i$ dans les équations (17). D'après la troisième de ces équations on aura d'abord

$$k=\frac{\Lambda}{x^3-p\,x^1-q\,x^2}$$

et, par suite, les deux premières deviendront

$$\frac{s\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x^2}-t\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x^2}}{r\,t-s^2}=\frac{2\,\Lambda\,x^1}{x^3-p\,x^1-q\,x^2},\qquad \frac{-r\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x^2}+s\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x^1}}{r\,t-s^2}=\frac{2\,\Lambda\,x^2}{x^3-p\,x^1-q\,x^2}.$$

En tenant compte de la relation (12'), les équations ci-dessus pourront s'écrire

$$s\frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}-t\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}=\frac{2\,\Lambda^3\,x^1}{x^3-p\,x^1-q\,x^2},\quad -r\frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}+s\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}=\frac{2\,\Lambda^3\,x^2}{x^3-p\,x^1-q\,x^2}.$$

Si on les résout par rapport aux dérivées de la fonction Λ, on obtient

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}=-2\,\frac{r\,x^1+s\,x^2}{x^3-p\,x^1-q\,x^2}\,\Lambda,\quad \frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}=-2\,\frac{s\,x^1+t\,x^2}{x^3-p\,x^1-q\,x^2}\,\Lambda$$

ou encore

$$\frac{\partial\log\sqrt{\Lambda}}{\partial x^i}\quad\frac{\partial\log(x^3-p\,x^1-q\,x^2)}{\partial x^i}\qquad (i=1,2).$$

On voit donc que l'équation des sphères affines a la forme

$$\sqrt{\Lambda}=\alpha\,(x^3-p\,x^1-q\,x^2)\qquad (\Lambda=\sqrt{|r\,t-s^2|}),$$

α étant une constante différente de zéro. Si l'on supposait que le centre de la sphère affine soit un point arbitraire de l'axe x^3, on obtiendrait une équation plus générale

$$\sqrt[4]{|r\,t-s^2|}=a\,(x^3-p\,x^1-q\,x^2)+b\qquad (a,\,b \text{ constantes})\qquad (33)$$

qui comprend comme cas particulier l'équation (32).

[9]) Cette classe de surfaces a été signalée pour la première fois par M. G. T z i t z é i c a; cf. [10], p. 250.

On obtient une classe plus générale des surfaces de l'espace affine, si l'on suppose que les normales affines d'une surface rencontrent une droite fixe que nous appellerons l'axe de la surface; en choisissant cette droite pour l'axe des x^3, on aura

$$\frac{a^1}{x^1}=\frac{a^2}{x^2}.$$

Si l'on remplace les composantes a^1, a^2 par leurs expressions (17), il viendra

$$(s\,x^1+t\,x^2)\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}-(r\,x^1+s\,x^2)\frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}=0;$$

d'après la formule (12') cette relation est équivalente à l'équation

$$r\,t-s^2=\Phi\,(x^3-p\,x^1-q\,x^2),\qquad (34)$$

Φ désignant une fonction arbitraire d'un argument. Aux surfaces définies par l'équation (34) nous donnerons le nom de *surfaces* (R).

Envisageons encore les surfaces dont les normales affines sont parallèles à un plan fixe que nous allons choisir pour plan $x^3=0$. On aura donc $a^3=0$ et par suite, d'après la troisième des équations (17),

$$p\,a^1+q\,a^2+\Lambda=0.$$

Si l'on y substitue aux a^1, a^2 les expressions données par les deux premières des équations (17) et que l'on tient compte de la relation (12'), on obtient une équation qui peut être ramenée à la forme suivante

$$(p\,s-q\,r)\frac{\partial\,(r\,t-s^2)^{-1}}{\partial x^2}-(p\,t-q\,s)\frac{\partial\,(r\,t-s^2)^{-1}}{\partial x^1}=4.\qquad (35)$$

La classe de surfaces considérée ici comprend, entre autres, les surfaces signalées par M. C a r t a n [10]) et définies au moyen de l'équation

$$r\,t-s^2=(p^2+q^2)^2.$$

[10]) E. C a r t a n [7].

6. **Des lignes sur les surfaces.** En adoptant les notations des n^{os} **2** et **3**, considérons une surface non développable de l'espace E_3 et supposons que l'on se déplace sur elle d'un point $M(u^1, u^2)$ à un point infiniment voisin $M_1\,(u^1 + d_1u^1,\ u^2 + d_1u^2)$. La droite d'intersection des plans tangents à la surface en M et M_1 sera donnée par les équations

$$P^3 = 0, \quad P^3 + d\,P^3 = 0,$$

le symbole P^3 étant défini par la deuxième des équations (4''). Si l'on tient compte des relations (5), le système ci-dessus deviendra

$$P^3 = 0, \quad \omega_1{}^3(d_1)\,P^1 + \omega_2{}^3(d_1)\,P^2 = 0,$$

$\omega_1{}^3(d_1)$ et $\omega_2{}^3(d_1)$ désignant ce que deviennent les formes différentielles $\omega_1{}^3$, $\omega_2{}^3$, si l'on y remplace du^1, du^2 par d_1u^1, d_1u^2. Si l'on se sert des formules (4') et (4''), la deuxième des deux dernières équations prendra la forme

$$\omega_1{}^3(d_1)\,[\overrightarrow{MQ}, \vec{I}_2, \vec{I}_3] + \omega_2{}^3(d_1)\,[\overrightarrow{MQ}, \vec{I}_3, \vec{I}_1] = 0, \tag{36}$$

Q étant un point arbitraire de la droite d'intersection des plans tangents. Supposons maintenant que l'on se déplace sur la surface dans la direction de cette droite du point M à un point infiniment voisin $M_2(u^1 + d_2u^1,\ u^2 + d_2u^2)$. Le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{MM_2} = \omega^1(d_2)\,\vec{I}_1 + \omega^2(d_2)\,\vec{I}_2$ devant satisfaire à l'équation (36), on aura

$$\omega_1{}^3(d_1)\,[\omega^1(d_2)\,\vec{I}_1 + \omega^2(d_2)\,\vec{I}_2, \vec{I}_2, \vec{I}_3] + \omega_2{}^3(d_1)\,[\omega^1(d_2)\,\vec{I}_1 + \omega^2(d_2)\,\vec{I}_2, \vec{I}_3, \vec{I}_1] = 0,$$

d'où l'on déduit aisémant la relation

$$\omega_1{}^3(d_1)\,\omega^1(d_2) + \omega_2{}^3(d_1)\,\omega^2(d_2) = 0$$

ou, en vertu des formules (9) et (24),

$$D_{11}\,d_1u^1\,d_2u^1 + D_{12}\,(d_1u^1\,d_2u^2 + d_1u^2\,d_2u^1) + D_{22}\,d_1u^2\,d_2u^2 = 0. \tag{37}$$

Telle est la relation qui existe entre deux *directions conjuguées* issues du point M; on en déduit l'équation des *lignes asymptotiques*

$$D_{11}\,(du^1)^2 + 2\,D_{12}\,du^1\,du^2 + D_{22}\,(du^2)^2 = 0. \tag{38}$$

Maintenant nous allons établir l'équation des lignes de courbure affines. Remarquons pour ce but que les équations des normales affines en

deux points infiniment voisins $M(u^1, u^2)$ et $M'(u^1 + du^1,\ u^2 + du^2)$ peuvent être mises respectivement sous la forme

$$P^1 = 0, \quad P^2 = 0; \tag{39'}$$

$$P^1 + d\,P^1 = 0, \quad P^2 + d\,P^2 = 0, \tag{39''}$$

où l'on a employé les notations du n^0 **1**. Pour que ces normales se rencontrent, il faut et il suffit que ces quatre équations soient compatibles. Or, si l'on se reporte aux relations (5), le système d'équations (39') et (39'') devient

$$P^1 = 0, \quad P^2 = 0, \quad \omega_3{}^1\,P^3 + \omega^1 = 0, \quad \omega_3{}^2\,P^3 + \omega^2 = 0. \tag{40}$$

La condition de compatibilité prend donc la forme

$$\omega_3{}^1\,\omega^2 - \omega_3{}^2\,\omega^1 = 0,$$

et, si l'on se sert des formules (9) et (24), l'équation des *lignes de courbure affines* sera

$$(B_1{}^1\,du^1 + B_2{}^1\,du^2)\,du^2 - (B_1{}^2\,du^1 + B_2{}^2\,du^2)\,du^1 = 0. \tag{41}$$

Pour obtenir les rayons de courbure principaux déterminons le point de rencontre Q de la normale affine au point M avec la normale élevée en un point infiniment voisin M' placé sur une des lignes de courbure passant par M. Le point Q doit satisfaire aux équations (40); or, si l'on se rappelle la signification du symbole P^3 (n^0 **1**), les deux dernières des équations (40) deviendront

$$\omega_3{}^1\,[\overrightarrow{MQ}, \vec{I}_1, \vec{I}_2] + \Delta\,\omega^1 = 0, \quad \omega_3{}^2\,[\overrightarrow{MQ}, \vec{I}_1, \vec{I}_2] + \Delta\,\omega^2 = 0.$$

Si l'on y pose $\overrightarrow{MQ} = R\,\vec{I}_3$ et que l'on tient compte de la relation (2), on obtient

$$\omega_3{}^1\,R + \omega^1 = 0, \quad \omega_3{}^2\,R + \omega^2 = 0.$$

L'emploi des formules (9) et (24) permet d'écrire ces équations sous la forme

$$(B_1{}^1\,du^1 + B_2{}^1\,du^2)\,R + du^1 = 0, \quad (B_1{}^2\,du^1 + B_2{}^2\,du^2)\,R + du^2 = 0;$$

si l'on élimine $\dfrac{du^2}{du^1}$, on obtient l'équation

$$(B_1{}^1\,B_2{}^2 - B_2{}^1\,B_1{}^2)\,R^2 + (B_1{}^1 + B_2{}^2)\,R + 1 = 0 \tag{42}$$

qui détermine les *rayons de courbure principaux*. En désignant par R_1 et R_2 les racines de l'équation (42), on aura

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = B_1{}^1 B_2{}^2 - B_2{}^1 B_1{}^2; \tag{43}$$

cette expression a obtenue le nom de *courbure affine* de la surface.

Remarquons que, d'après ce qui a été établi au n^0 **4**, les rayons de courbure principaux sont des densités scalaires de poids $+1$ et, par conséquent, la courbure affine est une densité scalaire de poids -2.

Revenons aux lignes de courbure affines. Trois cas sont à distinguer:

1⁰ Dans le cas général l'équation (41) définit deux familles distinctes de courbes réelles ou imaginaires; on peut démontrer que ces deux familles de lignes forment un réseau conjugué. Pour s'en convaincre il suffit de se reporter à l'équation (37); on verra en effet sans peine que, en vertu de la relation (29), cette équation est identiquement satisfaite par les deux valeurs du rapport $\frac{d u^2}{d u^1}$ définies au moyen de l'équation (41), conformément à la proposition énoncée. Nous devons à M. Cartan la remarque intéressante que la condition imposée au repère tangent R_3 pour définir intrinséquement la normale affine est équivalente à l'hypothèse que les lignes de courbure affines sont conjuguées; pour justifier cette remarque il suffit d'observer que la relation (29) résulte presque immédiatement de l'équation (15), si on différentie extérieurement celle-ci et que l'on tient compte des équations de structure (6'') et des formules (24). Il résulte aussi de l'équation (29) que, si les lignes asymptotiques sont imaginaires $(D_{11} D_{22} - D_{12}{}^2 = +1)$, les deux familles de lignes de courbure affines sont distinctes et réelles.

2⁰ Il se peut que les deux familles de lignes de courbure affines sont confondues. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$(B_1{}^1 - B_2{}^2)^2 + 4 B^1{}_2 B_1{}^2 = 0. \tag{44}$$

Dans ce cas les lignes de courbure affines se confondent avec les lignes d'une familles d'asymptotiques. La circonstance examinée ici se présente en particulier pour les surfaces réglées. Pour le faire voir supposons que S soit une surface réglée rapportée aux paramètres asymptotiques et que les lignes $u^2 =$ const. soient ses génératrices rectilignes. L'équation (38) devant être satisfaite, si l'on pose $du^1 = 0$ ou $du^2 = 0$, on aura $D_{11} = D_{22} = 0$ et, par conséquent (équ. (23)) $D_{12} = \pm 1$. Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (26) et (29), on trouve respectivement $\Gamma_{12}{}^1 = \Gamma_{12}{}^2 = 0$ et $B_1{}^1 = B_2{}^2$. Observons encore que, les lignes $d u^2 = 0$ étant des droites,

tout le long de chacune d'elles l'accroissement $d\vec{I}_1$ doit être proportionnel au vecteur $\vec{I}_1$. Or, on a (équ. (8))

$$d\vec{I}_1 = \omega_1{}^1 \vec{I}_1 + \omega_1{}^2 \vec{I}_2 + \omega_1{}^3 \vec{I}_3.$$

On en conclut que les deux formes $\omega_1{}^2$ et $\omega_1{}^3$ doivent s'annuler, si l'on suppose $du^2 = 0$. D'après les formules (24) ceci exige que l'on ait $\Gamma_{11}{}^2 = 0$. Si, enfin, on porte les valeurs $\Gamma_{11}{}^2 = \Gamma_{12}{}^1 = \Gamma_{12}{}^2 = 0$, $D_{11} = D_{22} = 0$, $D_{12} = \pm 1$ dans la troisième des équations (28), on obtient $B_1{}^2 = 0$. En rapprochant ce résultat de l'égalité $B_1{}^1 = B_2{}^2$ trouvée plus haut, on constate que la condition (44) est satisfaite, c'est ce qu'il fallait démontrer.

3⁰. Il reste encore à examiner le cas, où les lignes de courbure affines sont indéterminées, ce qui exige que l'on ait

$$B_2{}^1 = B_1{}^2 = 0, \quad B_1{}^1 = B_2{}^2. \tag{45}$$

Les deux racines de l'équation (42) sont maintenant égales. On démontre facilement que dans le cas actuel les normales affines de la surface passent par un point fixe et que, par conséquent, la surface est une sphère affine. Réciproquement, si la surface est une sphère affine, les égalités (45) sont identiquement satisfaites. Si, en particulier, la valeur commune des coefficients $B_1{}^1$ et $B_2{}^2$ est nulle, on a, d'après (24), $\omega_3{}^1 = \omega_3{}^2 = 0$ et, par suite $d I_3 = \omega_3{}^3 I_3$; on voit donc que, les normales affines de la surface étant parallèles, celle-ci est une sphère affine impropre (cf. n^0 **5**). On peut donc énoncer la proposition suivante: *pour qu'une surface soit une sphère affine impropre, il faut et il suffit que tous les coefficients $B_\mu{}^\lambda$ soient nuls.*

En terminant ce n⁰ nous allons citer deux exemples des surfaces, où il est possible de tracer les lignes de courbure affines sans aucune intégration.

Considérons d'abord les surfaces (R) (cf. n^0 **5**). Il résulte de leur définition que les sections par les plans passant par l'axe de la surface forment une des familles de lignes de courbure affines; d'après le théorème de Koenigs la seconde famille est composée de courbes de contact des cônes circonscrits à la surface et ayant les sommets sur son axe.

Si les normales affines d'une surface sont parallèles à un plan fixe P (v. la fin du n^0 **5**), les deux familles de lignes de courbure affines sont composées de sections de la surface par les plans parallèles à P et de courbes de contact des cylindres circonscrits à la surfaces et ayant leurs génératrices parallèles au plan P. Cela résulte aussi de la définition de la surface et du théorème de Koenigs. Ajoutons encore que la courbure affine de ces surfaces est nulle.

Ch. II. Connexion induite.

7. Introduction de la connexion induite. Pour établir la connexion induite sur une surface non développable S plongée dans l'espace E_3 associons à un point arbitraire $M(u^1, u^2)$ de celle-ci un repère R_2, d'origine M, formé de deux vecteurs tangents $\vec{J}_1, \vec{J}_2$. Le déplacement infinitésimal du repère R_2, lorsqu'on passe à un point infiniment voisin $(u^\lambda + d u^\lambda)$, soit donné par les formules [11])

$$d\overrightarrow{M} = \omega^\rho \vec{J}_\rho, \quad d\vec{J}_\varkappa = \omega_\varkappa{}^\rho \vec{J}_\rho, \tag{1}$$

les symboles ω^ρ et $\omega_\varkappa{}^\rho$ ayant la même signification que précédemment (v. équ. (9) et (24) du Ch. I). L'expression $\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2$ étant, en vertu de la relation (15) du Ch. I, une différentielle exacte, il en résulte que la *connexion induite admet une unité absolue d'aire*. On verra de plus que l'aire du parallélogramme infinitésimal construit sur les vecteurs $\omega^1 \vec{J}_1$ et $\omega^2 \vec{J}_2$ est égal à l'expression $\sqrt[4]{|L_{11} L_{22} - L_{12}{}^2|}\,[\omega^1 \omega^2]$, abstraction faite d'un facteur constant. En effet, en différentiant le déterminant $[\vec{J}_1, \vec{J}_2]$, on obtient

$$d[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = [d\vec{J}_1, \vec{J}_2] + [\vec{J}_1, d\vec{J}_2]$$

ou, si l'on utilise les équations (1),

$$d[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = \omega_1{}^\rho [\vec{J}_\rho, \vec{J}_2] + \omega_2{}^\rho [\vec{J}_1, \vec{J}_\rho].$$

Ceci peut évidemment s'écrire de la façon suivante

$$d[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = (\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2)[\vec{J}_1, \vec{J}_2].$$

La comparaison avec l'équation (15) du Ch. I conduit donc à la relation

$$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = c\sqrt{\Delta},$$

c étant une constante arbitraire. Si, enfin, on rapproche ce résultat des relations (12) et (13), on trouve

$$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = c\sqrt[4]{|L_{11} L_{22} - L_{12}{}^2|},$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

[11]) Nous rappelons que les indices grecs parcourent les valeurs 1, 2.

Les *équations de structure* de la connexion induite se déduisent des équations de structure de l'espace E_3 (n^0 **1**) et elles peuvent être écrites de la façon suivante

$$(\omega^\varkappa)' + [\omega_\rho{}^\varkappa \omega^\rho] = 0, \tag{2'}$$

$$(\omega_\lambda{}^\varkappa)' + [\omega_\rho{}^\varkappa \omega_\lambda{}^\rho] = R_{12\lambda}{}^{\cdot\cdot\varkappa} [\omega^1 \omega^2], \tag{2''}$$

où l'on a désigné par les symboles $R_{12\lambda}{}^{\cdot\cdot\varkappa}$ les composantes du *tenseur de courbure* de la connexion. En remplaçant dans les équations (2″) les coefficients $\omega_\lambda{}^\varkappa$ par leurs expressions (25) du Ch. I, on est conduit aux formules bien connues

$$R_{12\lambda}{}^{\cdot\cdot\varkappa} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda 2}{}^\varkappa}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda 1}{}^\varkappa}{\partial u^2} + \Gamma_{\rho 1}{}^\varkappa \Gamma_{\lambda 2}{}^\rho - \Gamma_{\rho 2}{}^\varkappa \Gamma_{\lambda 1}{}^\rho. \tag{3}$$

Si l'on compare ces relations aux équations de G a u s s (Ch. I (28)), on trouve

$$R_{12\lambda}{}^{\cdot\cdot\varkappa} = D_{\lambda 1} B_2{}^\varkappa - D_{\lambda 2} B_1{}^\varkappa. \tag{4}$$

Remarquons encore que la relation (29) du Ch. I entraîne l'indentité suivante

$$R_{121}{}^{\cdot\cdot 1} + R_{122}{}^{\cdot\cdot 2} = 0. \tag{4a}$$

Nous terminerons ces généralités, en rappelant les expressions de la différentielle absolue et de la dérivée covariante dans la connexion induite. Les voici

$$D A^\varkappa = d A^\varkappa + \omega_\rho{}^\varkappa A^\rho, \quad D A_\varkappa = d A_\varkappa - \omega_\varkappa{}^\rho A_\rho, \tag{5}$$

$$\nabla_\lambda A^\varkappa = \frac{\partial A^\varkappa}{\partial u^\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}{}^\varkappa A^\rho, \quad \nabla_\lambda A_\varkappa = \frac{\partial A_\varkappa}{\partial u^\lambda} - \Gamma_{\lambda\varkappa}{}^\rho A_\rho, \tag{6}$$

$A^\varkappa$ et $A_\varkappa$ étant respectivement les composantes d'un vecteur contravariant et d'un vecteur covariant.

Ajoutons encore que *la connexion induite est indépendante de l'orientation de la surface* (v. la dernière Remarque du n^0 **4**).

8. Géodésiques. Considérons sur la surface S une courbe C et supposons que les coordonnées gaussiennes $u^\varkappa$ d'un point arbitraire M de celle-ci soient exprimées en fonction d'un paramètre t. Attachons au point M le vecteur

$$\vec{J} = \frac{d u^1}{d t}\vec{J}_1 + \frac{d u^2}{d t}\vec{J}_2 \tag{7}$$

tangent à la courbe C en ce point. Nous dirons que la courbe est une *géodésique* de la surface, si le vecteur $\vec{J}$ reste parallèle à lui-même, lorsqu'on se déplace sur C. Remarquons que M. Cartan a défini les géodésiques d'une autre façon, en attribuant ce nom aux lignes dont le plan osculaleur contient la normale affine à la surface. Nous montrerons un peu plus loin que les deux définitions sont bien d'accord.

Maintenant nous allons développer l'équation des géodésiques. Remarquons pour cela que l'on a par hypothèse

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = k\vec{J},$$

k étant une fonction du paramètre t. Si l'on y substitue au vecteur $\vec{J}$ son expression (7), on trouve

$$\frac{d^2u^1}{dt^2}\vec{J}_1 + \frac{d^2u^2}{dt^2}\vec{J}_2 + \frac{du^1}{dt}\frac{d\vec{J}_1}{dt} + \frac{du^2}{dt}\frac{d\vec{J}_2}{dt} = k\left(\frac{du^1}{dt}\vec{J}_1 + \frac{du^2}{dt}\vec{J}_2\right), \tag{8}$$

En remplaçant les dérivées $\dfrac{d\vec{J}_\varkappa}{dt}$ par leurs valeurs

$$\frac{d\vec{J}_\varkappa}{dt} = \Gamma_{\varkappa\rho}{}^1\frac{du^\rho}{dt}\vec{J}_1 + \Gamma_{\varkappa\rho}{}^2\frac{du^\rho}{dt}\vec{J}_2$$

que l'on a déduites des équations (1), en moyennant les formules (24) du Ch. **I**, il viendra

$$\left(\frac{d^2u^\varkappa}{dt^2} + \Gamma_{\rho\sigma}{}^\varkappa\frac{du^\rho}{dt}\frac{du^\sigma}{dt} - k\frac{du^\varkappa}{dt}\right)\vec{J}_\varkappa = 0.$$

Il en résulte

$$\frac{d^2u^\varkappa}{dt^2} + \Gamma_{\rho\sigma}{}^\varkappa\frac{du^\rho}{dt}\frac{du^\sigma}{dt} = k\frac{du^\varkappa}{dt}.$$

Si l'on élimine de ces équations le coefficient k, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{d^2u^1}{dt^2}\frac{du^2}{dt} - \frac{d^2u^2}{dt^2}\frac{du^1}{dt} + \Gamma_{22}{}^1\left(\frac{du^2}{dt}\right)^3 + (\Gamma_{11}{}^1 - 2\Gamma_{12}{}^2)\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2\frac{du^1}{dt} + \\ + (2\Gamma_{12}{}^1 - \Gamma_{22}{}^2)\frac{du^2}{dt}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 - \Gamma_{11}{}^2\left(\frac{du^1}{dt}\right)^3 = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Telle est *l'équation des géodésiques* de la surface. On peut la présenter sous une autre forme, en procédant de la manière suivante. On part des formules

$$\frac{dJ_\varkappa}{dt} = \frac{\omega_\varkappa{}^1}{dt}\vec{J}_1 + \frac{\omega_\varkappa{}^2}{dt}\vec{J}_2$$

données par les équations (1), et on y substitue aux coefficients $\omega_\varkappa{}^\lambda$ les valeurs (10) du Ch. **I**; on trouve ainsi

$$\Delta\frac{d\vec{J}_\varkappa}{dt} = \left|\frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa}}{dt}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i\right|\vec{J}_1 + \left|\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa}}{dt}, a^i\right|\vec{J}_2.$$

En portant ces expressions dans l'équation (8), on obtient

$$\begin{aligned}\left\{\Delta\frac{d^2u^1}{dt^2} + \left|\frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^1}}{dt}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i\right|\frac{du^1}{dt} + \left|\frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^2}}{dt}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i\right|\frac{du^2}{dt} - \Delta k\frac{du^1}{dt}\right\}\vec{J}_1 + \\ + \left\{\Delta\frac{d^2u^2}{dt^2} + \left|\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^1}}{dt}, a^i\right|\frac{du^1}{dt} + \left|\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^2}}{dt}, a^i\right|\frac{du^2}{dt} - \Delta k\frac{du^2}{dt}\right\}\vec{J}_1 = 0;\end{aligned}$$

par suite on aura

$$\begin{aligned}\Delta\frac{d^2u^1}{dt^2} + \left|\frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^1}}{dt}\frac{du^1}{dt} + \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^2}}{dt}\frac{du^2}{dt}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, a^i\right| = \Delta k\frac{du^1}{dt}, \\ \Delta\frac{d^2u^2}{dt^2} + \left|\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^1}}{dt}\frac{du^1}{dt} + \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^2}}{dt}\frac{du^2}{dt}, a^i\right| = \Delta k\frac{du^2}{dt}.\end{aligned} \tag{10}$$

Attirons maintenant notre attention sur l'expression

$$A = \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^1}}{dt}\frac{du^1}{dt} + \frac{d\dfrac{\partial x^i}{\partial u^2}}{dt}\frac{du^2}{dt}$$

qui intervient deux fois dans les équations (10). En l'explicitant, on trouve

$$A = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda\,\partial u^\mu}\frac{du^\lambda}{dt}\frac{du^\mu}{dt}$$

ou encore

$$A = \frac{d^2 x^i}{d t^2} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\rho} \frac{d^2 u^\rho}{d t^2}.$$

Par conséquent, on pourra écrire l'égalité suivante

$$\left| \frac{d \frac{\partial x^i}{\partial u^1}}{d t} \frac{d u^1}{d t} + \frac{d \frac{\partial x^i}{\partial u^2}}{d t} \frac{d u^2}{d t}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \quad a^i \right| = \left| \frac{d^2 x^i}{d t^2} - \frac{\partial x^i}{\partial u^\rho} \frac{d^2 u^\rho}{d t^2}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \quad a^i \right|;$$

en tenant compte de la formule (7) du Ch. I, on en déduit aisément

$$\left| \frac{d \frac{\partial x^i}{\partial u^1}}{d t} \frac{d u^1}{d t} + \frac{d \frac{\partial x^i}{\partial u^2}}{d t} \frac{d u^2}{d t}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \quad a^i \right| = \left| \frac{d^2 x^i}{d t^2}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \quad a^i \right| - \Delta \frac{d^2 u^1}{d t^2}.$$

En portant cette expression dans la première des équations (10), on obtient

$$\left| \frac{d^2 x^i}{d t^2}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \quad a^i \right| = \Delta k \frac{d u^1}{d t}.$$

La seconde des équations (10) conduit de même à une équation analogue

$$\left| \frac{d^2 x^i}{d t^2}, \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \quad a^i \right| = - \Delta k \frac{d u^2}{d t}.$$

Si l'on ajoute les deux dernières équations, après les avoir multipliées par $\frac{d u^2}{d t}$ et $\frac{d u^1}{d t}$ respectivement, on trouve la relation suivante

$$\left| \frac{d^2 x^i}{d t^2}, \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \quad a^i \right| \frac{d u^1}{d t} + \left| \frac{d^2 x^i}{d t^2}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \quad a^i \right| \frac{d u^2}{d t} = 0$$

qui peut encore être présentée sous une forme plus condensée

$$\left| \frac{d^2 x^i}{d t^2}, \frac{d x^i}{d t}, \quad a^i \right| = 0. \qquad (11)$$

Nous avons ainsi obtenu la seconde forme de l'équation des géodésiques. On voit sur elle que le plan osculateur d'une géodésique contient la normale affine à la surface ce qui montre l'équivalence des deux définitions des géodésiques annoncée plus haut. Ce résultat conduit

immédiatement à la conséquence suivante: les géodesiques d'une sphère affine sont des sections par les plans passant par le centre. (Dans le cas d'une sphère impropre ce point est situé à l'infini). Il s'en suit que les sphères affines peuvent être représentées géodésiquement sur le plan [12]).

9. Isomorphie affine. En suivant M. Cartan, nour dirons que deux surfaces de l'espace E_3 sont affinement isomorphes, si l'on peut établir entre elles une correspondence ponctuelle conservant la connexion induite. Considérons, par exemple, les sphères affines impropres; d'après la remarque faite au n^0 **6** (p. 19) on sait que, dans ce cas, tous les coefficients $B_\mu{}^\lambda$ sont nuls; en rapprochant les relations (4) on en conclut que le tenseur de courbure de la connexion induite est aussi nul. Nous pouvons donc constater que *les sphères affines impropres sont affinement isomorphes au plan* [13]), la réciproque de cette proposition étant aussi vraie.

Maintenant nous allons démontrer un théorème général analogue au théorème de Gauss. Déterminons, à cet effet, des équations (4) les coefficients $B_\mu{}^\lambda$; en tenant compte de la relation (23) du Ch. I, nous trouverons aisément

$$\varepsilon B_\mu{}^\lambda = D_{2\mu} R_{121}{}^{\lambda} - D_{1\mu} R_{122}{}^{\lambda}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Si l'on porte ces expressions dans la formule (43) du Ch. I, qui donne la courbure affine de la surface, et que l'on emploie de nouveau l'identité (23), on obtient

$$\varepsilon K = R_{121}{}^{1} R_{122}{}^{2} - R_{122}{}^{1} R_{121}{}^{2},$$

Introduisons encore les composantes du tenseur de courbure contracté: $R_{\lambda\mu} = R_{\rho\lambda\mu}{}^{\rho}$. Comme on a

$$R_{121}{}^{1} = - R_{122}{}^{2} = R_{12}, \quad R_{121}{}^{2} = - R_{11}, \quad R_{122}{}^{1} = R_{22},$$

la formule précédente prend la forme

$$\varepsilon K = R_{11} R_{22} - R_{12}{}^2. \qquad (12)$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Si deux surfaces de l'espace E_3 sont affinement isomorphes, leurs courbures affines, aux points correspondants, sont égales, abstraction faite du signe.

[12]) E. Cartan [7].

[13]) E. Cartan, l. c.

10. Sur les formes différentielles $D_{\lambda\mu}\, d u^{\lambda}\, d u^{\mu}$, $R_{\lambda\mu}\, d u^{\lambda}\, d u^{\mu}$ et les lignes de courbure affines. Nous avons vu au n^0 précédent que l'on a

$$R_{11} = -R_{121}^{\cdot\cdot\cdot 2}, \quad R_{12} = R_{121}^{\cdot\cdot\cdot 1} = -R_{122}^{\cdot\cdot\cdot 2}, \quad R_{22} = R_{122}^{\cdot\cdot\cdot 1}. \tag{13}$$

En comparant aux équations (4) du Ch. I, on en déduit

$$\begin{gathered} R_{11} = D_{12} B_1^{\,2} - D_{11} B_2^{\,2}, \quad R_{12} = D_{11} B_2^{\,1} - D_{12} B_1^{\,1} = \\ = D_{22} B_1^{\,2} - D_{21} B_2^{\,2}, \quad R_{22} = D_{21} B_2^{\,1} - D_{22} B_1^{\,1}. \end{gathered} \tag{14}$$

Si l'on résout les équations (14) par rapport aux coefficients $B_{\lambda}^{\,\mu}$, et que l'on tient compte de la relation (23) du Ch. I, on trouve

$$\begin{gathered} \varepsilon B_1^{\,1} = \quad D_{12} R_{12} - D_{11} R_{22}, \quad \varepsilon B_2^{\,1} = \quad D_{22} R_{12} - D_{12} R_{22}, \\ \varepsilon B_1^{\,2} = -D_{12} R_{11} + D_{11} R_{12}, \quad \varepsilon B_2^{\,2} = -D_{22} R_{11} + D_{12} R_{12}, \\ \varepsilon = \pm 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Considérons maintenant les deux formes quadratiques

$$\omega = D_{\lambda\mu}\, d u^{\lambda}\, d u^{\mu}, \qquad \Lambda = R_{\lambda\mu}\, d u^{\lambda}\, d u^{\mu} \tag{16}$$

et égalons à zéro leur jacobien

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \omega}{\partial\, d u^1} & \dfrac{\partial \omega}{\partial\, d u^2} \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial\, d u^1} & \dfrac{\partial \Lambda}{\partial\, d u^2} \end{vmatrix} = 0; \tag{17}$$

nous obtenons ainsi une équation quadratique en $d u^1$, $d u^2$. Si l'on se reporte aux formules (14) et que l'on utilise la relation (23) du Ch. I, on verra facilement que *l'équation* (17) *est équivalente à l'équation des lignes de courbure affines de la surface*

$$B_{\rho}^{\,1}\, d u^{\rho}\, d u^2 - B_{\rho}^{\,2}\, d u^{\rho}\, d u^1 = 0. \tag{18}$$

Ceci nous conduit à énoncer les propositions suivantes qui sont des conséquences immédiates des théorèmes bien connus de la théorie des formes quadratiques binaires:

1^0. Si l'on prend comme variables u^{α} les paramètres des deux familles de lignes de courbure affines, en supposant que ces familles sont réelles et distinctes, les deux formes (16) se réduiront aux suivantes

$$\omega = D_{11}\,(d u^1)^2 + D_{22}\,(d u^2)^2, \qquad \Lambda = R_{11}\,(d u^1)^2 + R_{22}\,(d u^2)^2.$$

2^0. Pour que les lignes de courbure affines soient indéterminées, autrement dit pour que la surface soit une sphère affine, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{R_{11}}{D_{11}} = \frac{R_{12}}{D_{12}} = \frac{R_{22}}{D_{22}}.$$

3^0. Pour que les deux familles de lignes de courbure affines se confondent, il faut et il suffit que les formes (16) aient un diviseur linéaire commun.

11. Surfaces dont la connexion induite est parabolique. Nous dirons que la connexion induite est *parabolique*, si le discriminant de la forme

$$\Lambda = R_{\lambda\mu}\, d u^{\lambda}\, d u^{\mu}$$

est nul. Comme exemple des surfaces qui jouissent de la propriété en question citons les sphères affines impropres; nous savons, en effet, que dans ce cas le tenseur $R_{\lambda\mu}$ est identiquement nul; rappelons encore que les normales affines d'une sphère affine impropre sont parallèles à une droite fixe.

Maintenant nous allons démontrer le théorème suivant.

Pour que la connexion induite sur une surface soit parabolique, il faut et il suffit que sur chacune des courbes qui font partie de l'un des deux systèmes de lignes de courbure affines les normales affines à la surface soient parallèles.

En effet, supposons d'abord que la connexion induite sur une surface soit parabolique et choisissons les variables u^{α} d'une manière telle que l'on ait: $R_{11} = R_{12} = 0$; le discriminant de la forme Λ étant par hypothèse nul, ce choix peut être effectué d'une infinité de façons. Les formules (15) du n^0 précédent nous conduiront alors aux égalités: $B_1^{\,2} = B_2^{\,2} = 0$; en ayant égard à l'équation (18), on en conclut que les courbes $d u^2 = 0$ sont des lignes de courbure affines de la surface. Remarquons encore que, d'après les formules (24) du Ch. I, les relations $B_1^{\,2} = B_2^{\,2} = 0$ peuvent être présentées d'une façon plus condensée

$$\omega_3^{\,2} = 0. \tag{19}$$

Dans le raisonnement suivant nous devons distinguer deux cas suivant que les deux systèmes de lignes de corbure affines se confondent ou non. Envisageons d'abord le premier cas. L'hypothèse que l'équation (18) ait une racine double $du^2=0$ exige qu'il soit $B_1^{\ 1}=0$. Il s'en suit que la forme $\omega_3^{\ 1}$ doit s'annuler si l'on y pose $du^2=0$ (v. équ. (24) du Ch. I). D'autre part, d'après les formules (8) du Ch. I, on a

$$d\vec{I}_3 = \omega_3^{\ 1}\vec{I}_1 + \omega_3^{\ 2}\vec{I}_2 + \omega_3^{\ 3}\vec{I}_3. \tag{20}$$

On voit donc bien que, en vertu des résultats obtenus plus haut, on a

$$d\vec{I}_3 = \omega_3^{\ 3}\vec{I}_3$$

pour tout déplacement sur une des lignes $du^2=0$. Ceci démontre que les normales affines à la surface sont parallèles sur chacune des lignes de courbure affines. Examinons maintenant le deuxième cas, en supposant que le second système de lignes de courbure est composé de courbes $du^1=0$. L'équation (18) montre que cette hypothèse entraîne l'égalité suivante: $B_2^{\ 1}=0$; ceci dit que la forme $\omega_3^{\ 1}$ doit s'amuler, si l'on suppose $du^1=0$. Ce résultat rapproché de l'équation (19) nous montre que la formule (20) doit se réduire à la suivante

$$d\vec{I}_3 = \omega_3^{\ 3}\vec{I}_3,$$

lorsqu'on se déplace le long d'une des lignes $du^1=0$. On voit donc que les normales affines sont parallèles sur chacune des lignes de courbure qui appartiennent à la famille $du^1=0$.

Maintenant nous allons démontrer la réciproque. Supposons pour ce but que la surface soit rapportée aux paramètres des lignes de courbure affines ($B_2^{\ 1}=B_1^{\ 2}=0$) et que les normales affines sur chacune des lignes $du^1=0$ soient parallèles. Ceci exige que dans la formule (20) les coefficients $\omega_3^{\ 1}$, $\omega_3^{\ 2}$ s'annulent, si l'on suppose $du^1=0$. En se rappelant les formules (8) du Ch. I, on en déduit qu'il doit être $B_2^{\ 2}=0$. Si l'on substitue les valeurs $B_1^{\ 2}=B_2^{\ 2}=0$ dans les formules (14), on trouve $R_{11}=R_{12}=0$ ce qui démontre que la connexion induite est parabolique. Dans le raisonnement précédent nous avons supposé que les deux familles de lignes de courbure affines étaint distinctes; un procédé tout semblable prouve que le résultat obtenu plus haut ne cesse pas d'être vrai, si ces familles se confondent.

Ajoutons encore que la classe de surfaces dont il était question dans ce n^0 comprend, entre autres, les surfaces dont les normales affines sont parallèles à un plan fixe (n^0 **5**).

Ch. III. Sur la réalisation d'une variété à connexion affine par une surface de l'espace E_3.

12. Position du problème. Nous nous proposons d'étudier dans ce Chapitre le problème suivant:

Étant donnée une variété A_2 à connexion affine admettant une unité absolue d'aire, existe-t-il des surfaces de l'espace E_3 dont la connexion induite soit identique à celle de la variété A_2?

Pour répondre à cette question désignons par $u^\varkappa$ les coordonnées d'un point arbitraire de la variété A_2, par ω^λ, $\omega_\lambda^{\ \mu}$ les formes différentielles déterminant sa connexion, ces formes étant assujetties aux équations de structure suivantes

$$(\omega^\lambda)' + [\omega_\rho^{\ \lambda}\,\omega^\rho] = 0, \qquad (\omega_\mu^{\ \lambda})' + [\omega_\rho^{\ \lambda}\,\omega_\mu^{\ \rho}] = -R_{12\mu}^{\ \ \ \ \lambda}[\omega^1\,\omega^2], \tag{1}$$

auxqulles on doit adjoindre la relation

$$(\omega_1^{\ 1})' + (\omega_2^{\ 2})' = 0 \tag{2'}$$

exprimant que la connexion admet une unité d'aire. Ajoutons que, d'après les équations (1), la relation (2′) est équivalente à la suivante

$$R_{121}^{\ \ \ \ 1} + R_{122}^{\ \ \ \ 2} = 0. \tag{2''}$$

Imaginons maintenant dans l'espace E_3 le repère cartésien R_3 le plus général, ayant pour origine un point arbitraire $M(x^1, x^2, x^3)$ de cet espace. Les composantes $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_j^{\ i}$ du déplacement infinitésimal du repère R_3 dépendent, en outre des coordonnées x^i, de neuf paramètres t_A $(A=1, 2, \ldots, 9)$ et elles satisfont aux équations de structure de l'espace E_3 (cf. n^0 **1**):

$$(\overline{\omega}^i)' + [\overline{\omega}_r^{\ i}\,\overline{\omega}^r] = 0, \qquad (\overline{\omega}_j^{\ i})' + [\overline{\omega}_r^{\ i}\,\overline{\omega}_j^{\ r}] = 0. \tag{3}$$

En se rappelant les développements donnés dans les n^{os} **1** et **2** et, en particulier, les conditions imposées au repère tangent à une surface, on peut énoncer la proposition suivante:

Pour que le problème proposé ait une solution, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer les variables x^i, t_A en fonction de u^λ de telle manière qu'il soit identiquement

$$\begin{gathered} \overline{\omega}^1 = \omega^1, \quad \overline{\omega}^2 = \omega^2, \quad \overline{\omega}^3 = 0, \\ \overline{\omega}_\mu^{\ \lambda} = \omega_\mu^{\ \lambda}, \quad \overline{\omega}_3^{\ 3} = \omega_1^{\ 1} + \omega_2^{\ 2}, \\ [\overline{\omega}_1^{\ 3}\,\overline{\omega}_2^{\ 3}] = \varepsilon\,[\omega^1\,\omega^2], \quad \varepsilon = \pm 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Or, il résulte de la dernière des équations (4) que les formes $\overline{\omega}_{\varkappa}{}^{3}$ doivent s'exprimer linéairement au moyen des formes ω^{λ}; posons donc

$$\overline{\omega}_{\varkappa}{}^{3} = a_{\varkappa 1}\,\omega^{1} + a_{\varkappa 2}\,\omega^{2}, \tag{5}$$

les symboles $a_{\varkappa\lambda}$ désignant des nouveaux paramètres liés par la relation

$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = \varepsilon. \tag{6}$$

On peut donc adjoindre aux équations du système de Pfaff (4) les nouvelles équations (5). Nous allons chercher, s'il existe une intégrale à deux dimensions de ce nouveau système, lorsqu'on considère u^{1}, u^{2} comme variables indépendantes. Cette dernière question se résout par la methode générale de M. Cartan[14]).

Envisageons d'abord les équations des deux premières lignes du système (4); si on les dérive extérieurement, en tenant compte des équations de structure (1), (2′) et (3), des équations (5) et des équations (4) elles-mêmes, on sera conduit aux relations

$$\begin{gathered}(a_{12} - a_{21})\,[\omega^{1}\,\omega^{2}] = 0,\\ a_{\mu 1}\,[\overline{\omega}_{3}{}^{\lambda}\,\omega^{1}] + a_{\mu 2}\,[\overline{\omega}_{3}{}^{\lambda}\,\omega^{2}] = R_{12\mu}{}^{\lambda}\,[\omega^{1}\,\omega^{2}],\\ [\overline{\omega}_{1}{}^{3}\,\overline{\omega}_{3}{}^{1}] + [\overline{\omega}_{2}{}^{3}\,\overline{\omega}_{3}{}^{2}] = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

On en conclut d'abord qu'il doit être

$$a_{12} = a_{21} \tag{8}$$

et que les formes $\overline{\omega}_{3}{}^{\lambda}$ sont des combinaisons linéaires de $\omega^{\varkappa}$:

$$\overline{\omega}_{3}{}^{\lambda} = a_{1}{}^{\lambda}\,\omega^{1} + a_{2}{}^{\lambda}\,\omega^{2}. \tag{9}$$

En portant cet expressions dans la deuxième des équations (7), on trouve

$$a_{\mu 2}\,a_{1}{}^{\lambda} - a_{\mu 1}\,a_{2}{}^{\lambda} = R_{12\mu}{}^{\lambda}; \tag{10}$$

si l'on tient compte de la relation (6), on déduit de là les égalités

$$\varepsilon\,a_{\mu}{}^{\lambda} = R_{122}{}^{\lambda}\,a_{1\mu} - R_{121}{}^{\lambda}\,a_{2\mu}. \tag{11}$$

14) E. Cartan [4], [5].

Si l'on substitue dans les formules (9) aux coefficients $a_{\mu}{}^{\lambda}$ leurs expressions (11) et que l'on utilise les relations (5), on obtient

$$\varepsilon\,\overline{\omega}_{3}{}^{\lambda} = R_{122}{}^{\lambda}\,\overline{\omega}_{1}{}^{3} - R_{121}{}^{\lambda}\,\overline{\omega}_{2}{}^{3}. \tag{12}$$

Remarquons enfin que, si l'on remplace dans la dernière des relations (7) les formes $\overline{\omega}_{\lambda}{}^{3}$ et $\overline{\omega}_{3}{}^{\lambda}$ par les expressions (5) et (9) respectivement, on sera conduit à l'équation suivante

$$a_{12}\,a_{1}{}^{1} - a_{11}\,a_{2}{}^{1} + a_{22}\,a_{1}{}^{2} - a_{21}\,a_{2}{}^{2} = 0$$

qui est une conséquence des égalités (10) et de l'identité (2″).

D'après ce qui précède nous pouvons constater que le problème proposé revient à l'intégration du système de Pfaff prolongé

$$\begin{gathered}\overline{\omega}^{1} = \omega^{1}, \quad \overline{\omega}^{2} = \omega^{2}, \quad \overline{\omega}^{3} = 0,\\ \overline{\omega}_{\mu}{}^{\lambda} = \omega_{\mu}{}^{\lambda}, \quad \overline{\omega}_{3}{}^{3} = \omega_{1}{}^{1} + \omega_{2}{}^{2},\\ \overline{\omega}_{\varkappa}{}^{3} = a_{\varkappa 1}\,\omega^{1} + a_{\varkappa 2}\,\omega^{2},\\ \varepsilon\,\overline{\omega}_{3}{}^{\lambda} = R_{122}{}^{\lambda}\,\overline{\omega}_{1}{}^{3} - R_{121}{}^{\lambda}\,\overline{\omega}_{2}{}^{3},\end{gathered} \tag{13}$$

les variables $a_{\varkappa\lambda}$ étant liées par les relations (6) et (8). Nous allons dériver extérieurement les équations du nouveau système, en commençant par la dernière relation. En s'appuyant sur les équations de structure (3) et sur les équations du système (13) lui-même, on obtient au moyen d'un calcul facile l'égalité suivante

$$[\overline{\omega}_{1}{}^{3}\,D\,R_{122}{}^{\lambda}] - [\overline{\omega}_{2}{}^{3}\,D\,R_{121}{}^{\lambda}] = 0,$$

D étant le symbole de la différentielle absolue des composantes d'un tenseur (v. la fin du n^{0} **7**). Mais, on a par définition

$$D\,R_{12\mu}{}^{\lambda} = \omega^{1}\,\nabla_{1}\,R_{12\mu}{}^{\lambda} + \omega^{2}\,\nabla_{2}\,R_{12\mu}{}^{\lambda};$$

en substituant ces expressions dans la dernière relation, et en tenant compte des égalités (5), on trouve

$$a_{11}\,\nabla_{2}\,R_{122}{}^{\lambda} - a_{12}\,(\nabla_{1}\,R_{122}{}^{\lambda} + \nabla_{2}\,R_{121}{}^{\lambda}) + a_{22}\,\nabla_{1}\,R_{121}{}^{\lambda} = 0.$$

La dérivation extérieure des équations de la troisième ligne du système (13) conduit de même aux conditions suivantes

$$[\omega^{1}\,D\,a_{\varkappa 1}] + [\omega^{2}\,D\,a_{\varkappa 2}] = 0, \tag{14}$$

où l'on a posé

$$D\,a_{\varkappa\lambda} = d\,a_{\varkappa\lambda} - \omega_{\varkappa}^{\rho}\, a_{\rho\lambda} - \omega_{\lambda}^{\rho}\, a_{\varkappa\rho} + (\omega_1^{\ 1} + \omega_2^{\ 2})\, a_{\varkappa\lambda}\,.$$

En résumant, on peut dire que les variables $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$, qui interviennent dans le système de *Pfaff* (13), sont liées par les relations suivantes

$$a_{11}\, a_{12} - a_{12}^{\ 2} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{15'}$$

$$a_{11} \nabla_2 R_{122}^{\cdot\cdot\lambda} - a_{12} (\nabla_1 R_{122}^{\cdot\cdot\lambda} + \nabla_2 R_{121}^{\cdot\cdot\lambda}) + a_{22} \nabla_1 R_{121}^{\cdot\cdot\lambda} = 0, \tag{15''}$$

et que la dérivation extérieure du système (13) conduit seulement aux relations (14), toutes les autres étant des conséquences de celui-ci.

Supposons maintenant que l'on ait trouvé une intégrale du système (13) exprimant les inconnues x^i, t_A et $a_{\lambda\mu}$ en fonction de $u^{\varkappa}$. On obtient la surface correspondante à cette solution, en intégrant le système de *Pfaff*

$$\left.\begin{aligned}
d\,\overrightarrow{OM} &= \omega^1 \vec{I}_1 + \omega^2 \vec{I}_2 \\
d\,\vec{I}_1 &= \omega_1^{\ 1} \vec{I}_2 + \omega_1^{\ 2} \vec{I}_2 + \bar{\omega}_1^{\ 3} \vec{I}_3, \\
d\,\vec{I}_2 &= \omega_2^{\ 1} \vec{I}_1 + \omega_2^{\ 2} \vec{I}_2 + \bar{\omega}_2^{\ 3} \vec{I}_3, \\
d\,\vec{I}_3 &= \bar{\omega}_3^{\ 1} \vec{I}_1 + \bar{\omega}_3^{\ 2} \vec{I}_2 + (\omega_1^{\ 1} + \omega_2^{\ 2}) \vec{I}_3,
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

où l'on doit remplacer les formes $\bar{\omega}_{\varkappa}^{\ 3}$ et $\bar{\omega}_3^{\ \lambda}$ par les expressions (5) et (12) respectivement; ce système sera alors complètement intégrable.

Pour achever l'étude du système (13) nous avons trois cas à distinguer suivant le rang de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \nabla_2 R_{122}^{\cdot\cdot 1}, & \nabla_1 R_{122}^{\cdot\cdot 1} + \nabla_2 R_{121}^{\cdot\cdot 1}, & \nabla_1 R_{121}^{\cdot\cdot 1} \\ \nabla_2 R_{122}^{\cdot\cdot 2}, & \nabla_1 R_{122}^{\cdot\cdot 2} + \nabla_2 R_{121}^{\cdot\cdot 2}, & \nabla_1 R_{121}^{\cdot\cdot 2} \end{matrix} \right\| \tag{17}$$

13. **Premier cas.** Supposons en premier lieu que ce rang soit égal à deux. Dans ce cas les inconnues $a_{\lambda\mu}$ sont assujetties aux trois relations distinctes (15′) et (15″). Pour que le problème ait une solution, il faut d'abord que ces relations soient compatibles. Afin de faciliter la discussion nous allons considérer les variables a_{11}, a_{12}, a_{22} comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace affine. L'équation (15′) représente alors un hyperboloïde à deux ou à une nappe, suivant que l'on pose $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, et les équations (15″) représentent une droite (d) passant par l'origine du système de coordonnées. Si la droite (d) appartient aux génératrices du cône asymptote qui a pour équation $a_{11}\, a_{22} - a_{12}^{\ 2} = 0$, elle ne rencontre aucun de deux hyperboloïdes et, par conséquent, le problème proposé n'a pas de solution. Si au contraire, la droite (d) n'est pas située tout entière sur le cône asymptote, elle a deux points de rencontre avec l'un des hyperboloïdes, autrement dit, les équations (15′) et (15″) nous donnent deux solutions qui s'obtiennent l'une de l'autre par un changement des signes. Nous pouvons choisir l'une quelconque de ces solutions, en remarquant que l'autre choix entraîne seulement le changement du sens du vecteur $\vec{I}_3$. Les valeurs $a_{\lambda\mu}$ ainsi déterminées doivent satisfaire aux conditions (14). Mais, comme on peut poser ici

$$D\,a_{\lambda\mu} = \omega^1 \nabla_1 a_{\lambda\mu} + \omega^2 \nabla_2 a_{\lambda\mu},$$

ces conditions sont équivalentes aux relations

$$\nabla_1 a_{\lambda 2} = \nabla_2 a_{\lambda 1} \tag{18}$$

Si ces égalités sont satisfates, le système (16) est complètement intégrable, son intégrale générale dépendant de douze constantes arbitraires; on peut évidemment disposer de ces constantes de manière que, pour un système de valeurs $u^{\varkappa} = u_0^{\ \varkappa}$ quelconque, on ait

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}^0, \quad \vec{I}_h = \vec{I}_h^{\ 0},$$

$\overrightarrow{OM}^0, \vec{I}_h^{\ 0}$ étant des vecteurs arbitrairement choisis. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Si le rang de la matrice (17) *est égal à deux et que les équations* (15′) et (15″), *pour un choix convenable du signe de* ε, *sont compatibles, leur solution satisfaisant aux conditions* (18), *il existe une et une seule surface de l'espace réalisant la connexion de la variété* A_2, *abstraction faite des transformations affines.*

Nous dirons dans ce cas que la surface qui représente la variété A_2 est *rigide*.

14. **Deuxième cas.** Supposons maintenant que la matrice (17) est de rang un. Par suite, les équations (15″) se réduisent à une seule, qui représente un plan (P) passant par origine, si nous regardons a_{11} a_{12},

a_{22} comme des coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace affine. Ce plan (P) coupe l'un au moins des deux hyporboloïdes $(15')$ suivant une conique qui peut dégénérer en deux droites parallèles. Il suit de là que les équations $(15')$ et $(15'')$ permettent, d'une ou de deux façons différentes, d'exprimer les inconnues $a_{\lambda\mu}$ en fonction de $u^{\varkappa}$ et d'une nouvelle variable que nous désignerons par la lettre a. En portant les expressions ainsi obtenues dans les relations (14), on obtient deux équations de la forme suivante

$$[(k_\lambda \omega^1 + l_\lambda \omega^2)\, d\, a] + m_\lambda [\omega^1 \omega^2] = 0, \tag{19}$$

les coefficients k_λ, l_λ, m_λ étant des fonctions des trois variables u^1, u^2, a. (Si les équations $(15')$ et $(15'')$ donnent deux systèmes différents d'expressions des variables $a_{\lambda\mu}$, en fonction de $u^{\varkappa}$ et a, on doit appliquer succesivement le même procédé à chacun de ces systèmes).

On doit dans la suite distinguer trois cas:

1^0. En général, l'expression $k_1 l_2 - k_2 l_1$ est différente de zéro, alors on peut déduire des équations (19) une relation déterminée de la forme

$$d\, a = r\, \omega^1 + s\, \omega^2, \tag{20}$$

r et s désignant des fonctions des trois variables $u^{\varkappa}$, a. Si cette équation est complètement intégrable, elle donne pour a et, par conséquent, pour $a_{\lambda\mu}$ des solutions dépendant d'une constante arbitraire et, pour suite, il existe une famille de ∞^1 surfaces, affinement isomorphes, réalisant la variété A_2 dans l'espace E_3. (Ici et dans la suite nous faisons abstraction des surfaces qui s'obtiennent par les transformations affines de l'une quelconque, qui donne une solution du problème proposé). On obtient ces surfaces, en intégrant le système (16), après y avoir remplacé les variables $a_{\lambda\mu}$ par leurs expressions dont nous avons parlé plus haut.

N. B. Si l'équation (20) n'est pas complètement intégrable, elle peut néanmoins avoir des solutions isolées qui ne dépendent d'aucun élément arbitraire. S'il en est ainsi, à chacune de ces solutions correspond une seule surface réalisant la connexion A_2.

2^0. Supposons maintenant qu'il soit $k_1 l_2 - k_2 l_1 = 0$ sans que l'on ait en même temps $k_1 m_2 - k_2 m_1 = 0$ et $l_1 m_2 - l_2 m_1 = 0$. D'après les équations (19) on aurait alors $[\omega^1 \omega^2] = 0$; on voit donc bien que, dans ce cas, le problème proposé est dépourvu de solution.

3^0. Examinons enfin le troisième cas qui peut se présenter, où l'on a:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Les égalités (19) se réduisent alors à une seule que nous écrirons comme il suit

$$[(k\, \omega^1 + l\, \omega^2)\, da] + m\, [\omega^1 \omega^2] + 0. \tag{21}$$

Revenons maintenant au système de *Pfaff* (13) et supposons qu'il soit donné un élément linéaire intégral quelconque (e) de celui-ci; un obtient un tel élément en attribuant aux formes ω^1, ω^2, da des valeurs arbitraires non toutes nulles. Comme les relations déduites des équations (13) au moyen de la dérivation extérieure se réduisent à l'unique égalité (21), toutes les autres étant des conséquences des équations du système, on voit bien qu'il existe un et un seul élément linéaire intégral (e') qui soit en in volution avec (e) relativement au système (13). Par suite ce système est en involution, si l'on considère les $u^{\varkappa}$ comme des variables indépendantes, son intégrale générale à deux dimensions dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument. D'après cela la connexion A_2 peut être représentée, dans le cas actuel, par toute une classe de surfaces affinement isomorphes.

15. **Troisième cas.** Il nous reste à examiner le cas, où le rang de la matrice (15) est nul. Si l'on égale à zéro les éléments de celle-ci et que l'on tient compte de la relation $(2'')$, ou trouve

$$\nabla_{\varkappa} R_{12\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 0.$$

Nous voyons donc que, si le rang de la matrice (17) est égal à zéro, la variété A_2 est *symétrique*, et réciproquement. Nous allons montrer que dans ce cas le système (13) est en involution, si l'on considère u^1, u^2 comme des variables indépendantes.

Remarquons d'abord que, les équations $(15'')$ étant par hypothèse identiquement satisfaites, les variables a_{11}, a_{12}, a_{22} ne sont liées que par une seule relation $(15')$. Il en résulte que les différentielles covariantes $Da_{\lambda\mu}$ sont assujetties à la condition suivante

$$a_{11}\, D\, a_{22} + a_{22}\, D\, a_{11} - 2\, a_{12}\, D\, a_{12} = 0. \tag{22}$$

Imaginons maintenant un élément linéaire quelconque (e) du système (13); il est défini par un système d'équations de la forme

$$\frac{\omega^1}{e'} = \frac{\omega^2}{e^2} = \frac{Da_{11}}{e_{11}} = \frac{Da_{12}}{e_{12}} = \frac{Da_{22}}{e_{22}}$$

$e^{\varkappa}$, $e_{\lambda\mu}$ étant des paramètres arbitraires, non tous nuls, satisfaisant à la relation

$$a_{11}\, e_{22} + a_{22}\, e_{11} - 2\, a_{12}\, e_{12} = 0$$

qui est une conséquence immédiate de l'égalité (22). Cherchons maintenant à déterminer un autre élément linéaire $(\bar{e})$, défini d'une manière analogue au moyen des paramètres $\bar{e}^{\varkappa}$, $\bar{e}_{\lambda\mu}$ soumis à la condition

$$a_{11}\bar{e}_{22}+a_{22}\bar{e}_{11}-2a_{12}\bar{e}_{12}=0, \tag{23}$$

qui soit en involution par rapport au système (13) avec l'élément (e). Or, d'après ce que nous avons vu au n^0 **12**, deux éléments linéaires intégraux sont en involution relativement au système (13), s'ils satisfont aux relations (14); par suite on doit avoir

$$\begin{aligned} e^1\bar{e}_{11}+e^2\bar{e}_{12}&=e_{11}\bar{e}^1+e_{12}\bar{e}^2,\\ e^1\bar{e}_{21}+e^2\bar{e}_{22}&=e_{21}\bar{e}^1+e_{22}\bar{e}^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Les cinq inconnues $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}_{11}$, $\bar{e}_{12}=\bar{e}_{21}$, $\bar{e}_{22}$ doivent donc satisfaire à trois relations (23) et (24), linéaires et homogènes; ceci montre que tout élément linéaire intégral (e) du système (13) est en involution avec un et un seul élément intégral $(\bar{e})$, distinct de (e), autrement dit par un élément linéaire quelconque il passe un et un seul élément intégral à deux dimensions. Remarquons aussi qu'on a nécessairement

$$\frac{\bar{e}^1}{e^1}\neq\frac{\bar{e}^2}{e^2},$$

car dans le cas contaire on aurait

$$\frac{\bar{e}^{\varkappa}}{e^{\varkappa}}=\frac{\bar{e}_{\lambda\mu}}{e_{\lambda\mu}}$$

et les éléments (e) et $(\bar{e})$ ne seraient pas distincts. Nous avons ainsi démontré que, dans le cas examiné ici, le système (13) est en involution, si l'on considère u^1, u^2 comme des variables indépendantes. Observons encore que le nombre des équations du système (13) est égal à 12 et le nombre des relations (14) qui doivent être satisfaites par deux éléments linéaires en involution est égal à 2. Ces nombres étant les valeurs des caractères du système (13), on voit que sa solution la plus générale dépend des deux fonctions arbitraires d'un argument et de douze constantes arbitraires.

En résumé nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Toute variété symétrique A_2 peut être réalisée par une infinité de surfaces de l'espace E_3, la surface la plus générale qui répond à la question dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable.

Ajoutons encore la remarque suivante: dans la relation (15') on peut poser soit $\varepsilon=+1$, soit $\varepsilon=-1$, sans que les raisonnements précédents tombent en défaut; cela veut dire que toute variété symétrique peut être réprésentée par les surfaces à lignes asymptotiques réelles et par les surfaces à lignes asymptotiques imaginaires.

16. **Application.** En utilisant les résultats établis plus haut, nous allons montrer que *toute surface réglée est affinement isomorphe à une infinité d'autres surfaces dépendant d'une ou de deux fonctions arbitraires d'un argument*[15]).

Supposons pour ce but qu'une surface réglée S soit rapportée aux génératrices rectilignes $(du^2=0)$ et aux asymptotiques du second système $(du^1=0)$. D'après ce que nous avons vu plus haut (p. 16) cette convention entraîne les égalités suivantes

$$\Gamma_{12}{}^1=\Gamma_{12}{}^2=\Gamma_{11}{}^2=0, \tag{25 a}$$

$$D_{11}=0,\quad D_{12}=1,\quad D_{22}=0, \tag{25 b}$$

$$B_1{}^1=B_2{}^2,\quad B_1{}^2=0. \tag{25 c}$$

Par suite les équations (4) du Ch. **II** pourront s'écrire comme il suit

$$R_{\dot{1}2\dot{1}}{}^1=-B_1{}^1,\quad R_{\dot{1}2\dot{2}}{}^1=B_2{}^1,\quad R_{\dot{1}2\dot{1}}{}^2=0,\quad R_{\dot{1}2\dot{2}}{}^2=B_1{}^1$$

et le second groupe des équations de Codazzi (équ. (27) du Ch. **I**) prendra la forme

$$\frac{\partial B_1{}^1}{\partial u^2}-\frac{\partial B_2{}^1}{\partial u^1}=\Gamma_{22}{}^2B_1{}^1,\qquad \frac{\partial B_1{}^1}{\partial u^1}=\Gamma_{11}{}^1B_1{}^1. \tag{26}$$

Un calcul facile nous montre que la matrice (17) devient

$$\left\Vert\begin{matrix} \dfrac{\partial B_2{}^1}{\partial u^2}+2\Gamma_{22}{}^1B_1{}^1-2\Gamma_{22}{}^2B_2{}^1, & 0, & 0\\[2ex] \dfrac{\partial B_2{}^1}{\partial u^2}\qquad\qquad, & 0, & 0 \end{matrix}\right\Vert \tag{27}$$

---

[15]) Cf. E. Cartan [7].

Nous voyons donc que le rang de cette matrice est égal à un (cas général) ou à zéro.

Examinons d'abord le cas général. Les equations (15″) se reduiront maintenant à l'unique relation

$$a_{11} = 0.$$

Par suite, en vertu de l'équation (15′), on aura $(a_{12})^2 = 1$; sans restreindre la généralité nous pouvons poser

$$a_{12} = 1.$$

Remarquons encore que, d'après les égalités (25 a) et d'après les formules (24) du Ch. **I**, on a

$$\omega_1{}^2 = 0.$$

Par conséquent les formules

$$D\, a_{\varkappa\lambda} = d\, a_{\varkappa\lambda} - \omega_\varkappa{}^\rho\, a_{\rho\lambda} - \omega_\lambda{}^\rho\, a_{\varkappa\rho} + (\omega_1{}^1 + \omega_2{}^2)\, a_{\varkappa\lambda}$$

deviendront dans le cas actuel

$$Da_{11} = 0, \quad Da_{12} = 0, \quad Da_{22} = da_{22} + (\omega_1{}^1 - \omega_2{}^2)\, a_{22} - 2\, \omega_2{}^1$$

et les équations (14) se réduiront à une seule

$$[(da_{22} + \omega_1{}^1\, a_{22} - \omega_2{}^2\, a_{22} - 2\, \omega_2{}^1)\, \omega^2] = 0.$$

En appliquant la proposition établie au n⁰ **14**, 3⁰ et en tenant compte des égalités $a_{11} = 0$, $\Gamma_{11}{}^2 = 0$, nous pouvons constater qu'en général toute surface réglée est affinement isomorphe à une infinité d'autres surfaces réglées dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument.

Nous avons observé plus haut que le rang de la matrice (27) peut être égal à zéro. Dans ce cas spécial la surface réglée est affinement isomorphe à une infinité de surfaces dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument. C'est une conséquence immédiate de la proposition générale de n⁰ **15**.

Ch. IV. Sur une classe de surfaces de l'espace affine.

17. **Définition.** Nous dirons qu'une surface de l'espace E_3 est une surface C, si la connexion induite sur elle est *symétrique*. Il résulte immédiatement des recherches du Ch. **III** que toute surface C est affinement isomorphe à une infinité de surfaces dépendant de deux fonc-

tions arbitraires d'un argument; réciproquement toute surface qui est affinement isomorphe à une infinité de surfaces dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable est une surface C.

Aux surfaces C appartiennent évidemment les sphères affines impropres, leur tenseur de courbure induite étant nul (n^0 **9**). Il est donc naturel de se demander, si les sphères affines proprement dites jouissent de la même propriété. Pour répondre à cette question envisageons une sphère affine quelconque en la supposant rapportée aux lignes asymptotiques. On aura donc (v. n^0 **6**)

$$B_2{}^1 = B_1{}^2 = 0, \quad B_1{}^1 = B_2{}^2 \neq 0,$$

$$D_{11} = D_{22} = 0,$$

le coefficient D_{12} ayant la valeur 1 ou i suivant que les asymptotiques sont réelles ou imaginaires. Si l'on porte ces valeurs dans les équations de Codazzi (n^0 3), on trouve successivement

$$\Gamma_{12}{}^1 = \Gamma_{12}{}^2 = 0$$

et

$$\frac{\partial B_1{}^1}{\partial u^1} - \Gamma_{11}{}^1 B_1{}^1 = 0, \quad \frac{\partial B_1{}^1}{\partial u^2} - \Gamma_{22}{}^2 B_1{}^1 = 0.$$

D'autre part les composantes du tenseur de courbure induite prendront dans le cas actuel la forme suivante

$$R_{121}{}^1 = -D_{12} B_1{}^1, \quad R_{121}{}^2 = 0, \quad R_{122}{}^1 = 0, \quad R_{122}{}^2 = D_{12} B_1{}^1.$$

En tenant compte des égalités ci-dessus, on obtient aisément

$$\nabla_1 R_{121}{}^1 = 0, \quad \nabla_2 R_{121}{}^1 = 0, \quad \nabla_1 R_{122}{}^1 = 0, \quad \nabla_2 R_{122}{}^1 = 2\, \Gamma_{22}{}^1 D_{12} B_1{}^1,$$

$$\nabla_1 R_{121}{}^2 = -2\, \Gamma_{11}{}^2 D_{12} B_1{}^1, \quad \nabla_2 R_{121}{}^2 = 0, \quad \nabla_1 R_{122}{}^2 = 0, \quad \nabla_2 R_{122}{}^2 = 0.$$

Donc, pour que la sphère affine soit une surface C, il faut et il suffit qu'il soit $\Gamma_{22}{}^1 = \Gamma_{11}{}^2 = 0$, autrement dit, que les lignes asymptotiques soient des géodésiques (cf. équ. (9) du Ch. **II**). Nous voyons ainsi que *toute sphère affine, qui est douée d'une connexion induite symétrique, est une quadrique ou une sphère impropre.*

18. **La représentation géodésique des surfaces C sur le plan.** Soit A_2 une variété à connexion affine symétrique admettant une unité absolue

d'aire. Il résulte d'un théorème de M. Weyl[16]) que les deux relations suivantes

$$\nabla_1 R_{21} = \nabla_2 R_{11}, \quad \nabla_1 R_{22} = \nabla_2 R_{12} \tag{1}$$

expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que la variété A_2 puisse être représentée géodésiquement sur le plan. Or, la connexion de la variété A_2 étant symétrique, on a $\nabla_\varkappa R_{\lambda\mu} = 0$ et, par suite, les conditions (1) sont identiquement satisfaites. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Toute variété A_2 à connexion symétrique admettant une unité absolue d'aire et, par conséquent, toute surface C peuvent être représentées géodésiquement sur le plan.

En supposant que la représentation géodésique de la variété A_2 sur le plan soit réalisée, désignons par $u^\varkappa$ les coordonnées d'un point arbitraire de celle-ci. L'équation différentielle des géodésiques sera donc

$$\frac{d u^1}{d t}\frac{d^2 u^2}{d t^2} - \frac{d u^2}{d t}\frac{d^2 u^1}{d t^2} = 0. \tag{2}$$

En la comparant à l'équation (9) du Ch. **II**, on est conduit aux égalités suivantes

$$\Gamma_{22}{}^{1} = \Gamma_{11}{}^{2} = 0, \quad \Gamma_{11}{}^{1} = 2\,\Gamma_{12}{}^{2}, \quad \Gamma_{22}{}^{2} = 2\,\Gamma_{12}{}^{1}. \tag{3}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les formules (3) du Ch. **II**, il viendra

$$\begin{aligned} R_{121}{}^{1} &= \frac{\partial \Gamma_{12}{}^{1}}{\partial u^1} - 2\frac{\partial \Gamma_{12}{}^{2}}{\partial u^2} + \Gamma_{12}{}^{1}\Gamma_{12}{}^{2}, \quad & R_{122}{}^{1} &= -\frac{\partial \Gamma_{12}{}^{1}}{\partial u^2} + (\Gamma_{12}{}^{1})^2, \\ R_{121}{}^{2} &= \frac{\partial \Gamma_{12}{}^{2}}{\partial u^1} - (\Gamma_{12}{}^{2})^2, & R_{122}{}^{2} &= 2\frac{\partial \Gamma_{12}{}^{1}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}{}^{2}}{\partial u^2} - \Gamma_{12}{}^{1}\Gamma_{12}{}^{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Remarquons que, la variété A_2 admettant une unité absolue d'aire, on a ici $R_{121}{}^{1} + R_{122}{}^{2} = 0$ (v. équ. (2″) du Ch. **II**) et, par conséquent,

$$\frac{\partial \Gamma_{12}{}^{1}}{\partial u^1} = \frac{\partial \Gamma_{12}{}^{2}}{\partial u^2}.$$

On peut donc poser

$$\Gamma_{12}{}^{1} = -\frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}{}^{2} = -\frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1},$$

[16]) Cf. J. A. Schouten [9], p. 131.

Λ désignant une fonction des deux variables u^1, u^2; en moyennant les relations (3), on en déduit

$$\Gamma_{11}{}^{1} = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}{}^{2} = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}.$$

Ceci nous permet de présenter les formules (3) sous la forme suivante

$$R_{121}{}^{1} = -\frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{4\Lambda^2}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}, \quad R_{122}{}^{1} = -\frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^2 \partial u^2} + \frac{1}{4\Lambda^2}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}\right)^2,$$

$$R_{121}{}^{2} = \frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{1}{4\Lambda^2}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}\right)^2, \quad R_{122}{}^{2} = \frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{4\Lambda^2}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}.$$

Pour exprimer que la connexion est symétrique, on doit égaler à zéro les dérivées covariantes des composantes $R_{12\lambda}{}^{\varkappa}$; un calcul facile nous conduira ainsi aux équations suivantes

$$\frac{\partial^3 \Lambda}{\partial u^\lambda \partial u^\mu \partial u^\nu} = 0,$$

d'où il résulte que la fonction Λ est un polynôme du second degré en u^1 et u^2:

$$\Lambda = a(u^1)^2 + 2b\,u^1 u^2 + c\,(u^2)^2 + 2d\,u^1 + 2e\,u^2 + f. \tag{5}$$

On peut donc résumer le considérations précédentes de la façon suivante: *on obtient la connexion symétrique, la plus générale, si l'on attribue aux coefficients du transport parallèle les valeurs*

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}{}^{1} &= -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}, & \Gamma_{12}{}^{1} &= -\frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}, & \Gamma_{22}{}^{1} &= 0, \\ \Gamma_{11}{}^{2} &= 0, & \Gamma_{12}{}^{2} &= -\frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}{}^{2} &= -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

Λ désignant un polynôme arbitraire du second degré.

Remarque. Observons que l'équation (2) des lignes géodésiques sera conservée, si l'on soumet les variables $u^\varkappa$ à une transformation homographique quelconque. On s'aperçoit encore immédiatement que les valeurs (6) des coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\varkappa}$ ne changent pas, si l'on multiplie la fonction Λ par une constante arbitraire différente de zéro. En s'appuyant sur ces deux remarques, on peut réduire le polynôme (5) à quelques types différents, ce qui permettrait de classifier les surfaces C.

19. L'équation aux différentielles partielles des surfaces C. Nous savons déja que toute variété A_2 à connexion symétrique admettant une unité absolue d'aire peut être réalisée, et d'une infinité de manières, par une surface de l'espace E_3. En adoptant les notations du n^0 précédent, nous allons supposer que la variété dont il est question soit représentée géodésiquement sur le plan; en portant les valeurs des coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^{\varkappa}$, données par les formules (6), dans les équations (26) du Ch. I, on trouve

$$\Lambda\left(\frac{\partial D_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial D_{12}}{\partial u^1}\right)=\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}D_{11}-\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}D_{12},$$

$$\Lambda\left(\frac{\partial D_{12}}{\partial u^2}-\frac{\partial D_{22}}{\partial u^1}\right)=\frac{\partial \Lambda}{\partial u^2}D_{12}-\frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}D_{22},$$

ce qui peut encore s'écrire de la façon suivante

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{D_{11}}{\Lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{D_{12}}{\Lambda}\right),\quad \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{D_{21}}{\Lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{D_{22}}{\Lambda}\right).$$

On satisfait à ces conditions de la manière la plus générale, si l'on pose

$$D_{11}=\Lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u^1},\quad D_{12}=\Lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u^2},\quad D_{21}=\Lambda\frac{\partial \psi}{\partial u^1},\quad D_{22}=\Lambda\frac{\partial \psi}{\partial u^2},$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires des variables $u^\varkappa$. Les coefficients D_{12} et D_{21} étant égaux, on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}=\frac{\partial \psi}{\partial u^1}.$$

On peut donc poser

$$\varphi=\frac{\partial \Theta}{\partial u^1},\quad \psi=\frac{\partial \Theta}{\partial u^2},$$

ce qui conduit aux formules suivantes

$$D_{\lambda\mu}=\Lambda\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}. \tag{7}$$

Les expressions (7) devant satisfaire à la relation $D_{11}\,D_{22}-D_{12}{}^2=\pm 1$ (équ. (23) du n^0 2), on est conduit à l'équation suivante

$$rt-s^2=\frac{\varepsilon}{\Lambda^2}\qquad (\varepsilon=\pm 1), \tag{8}$$

où l'on a désigné par r, s, t les dérivées secondes de la fonction Θ, Λ étant donnée par la formule (5).

A toute solution de l'équation (8) correspond un système des valeurs des coefficients $D_{\lambda\mu}$ satisfaisant aux équations (23) et (26) du Ch. I; les coefficients $D_{\lambda\mu}$ une fois connus, on peut ensuite calculer les coefficients $B_\mu{}^\lambda$ au moyen des équations (28) du Ch. I. D'après le théorème du n^0 **75** nous sommes surs, sans aucun calcul, que les valeurs des coefficients $B_\mu{}^\lambda$ ainsi déterminées satisfont aussi aux équations (27) du Ch. I. Nous pouvons donc constater qu' *à toute solution de l'équation (8) correspond une surface C déterminée à une transformation affine près* (cf. la fin du n^0 **2**).

20. Classification des surfaces C. Nous pouvons classifier les surfaces C d'après la nature de la forme différentielle

$$R_{\lambda\mu}\,d\,u^\lambda\,d\,u^\mu \tag{9}$$

et nous obtenons ainsi trois classes suivantes:

I. la forme (9) est définie: $R_{11}\,R_{22}-R_{12}{}^2>0$, *type elliptique;*

II. la forme (9) est indéfinie: $R_{11}\,R_{22}-R_{12}{}^2<0$, *type hyperbolique;*

III. la forme (9) est dégénérée: $R_{11}\,R_{22}-R_{12}{}^2=0$, *type parabolique.*

Dans les n^{os} suivants nous allons examiner séparément les surfaces des trois types précédents, maintenant nous nous bornons à la remarque suivante. D'après la définition même des surfaces C, les composantes $R_{\lambda\mu}$ du tenseur contracté de courbure satisfont aux conditions suivantes

$$\nabla_\varkappa R_{\lambda\mu}=0.$$

En les explicitant, on trouve

$$\begin{gathered}\frac{\partial R_{11}}{\partial u^1}-2\,\Gamma_{11}{}^\rho R_{\rho 1}=0,\quad \frac{\partial R_{12}}{\partial u^1}-\Gamma_{11}{}^\rho R_{\rho 2}-\Gamma_{21}{}^\rho R_{1\rho}=0,\quad \frac{\partial R_{22}}{\partial u^1}-2\,\Gamma_{21}{}^\rho R_{\rho 2}=0,\\ \frac{\partial R_{11}}{\partial u^2}-2\,\Gamma_{12}{}^\rho R_{\rho 1}=0,\quad \frac{\partial R_{12}}{\partial u^2}-\Gamma_{12}{}^\rho R_{\rho 2}-\Gamma_{22}{}^\rho R_{1\rho}=0,\quad \frac{\partial R_{22}}{\partial u^2}-2\,\Gamma_{22}{}^\rho R_{\rho 2}=0.\end{gathered} \tag{10}$$

Il en résulte que la connexion induite sur les surfaces C du type elliptique et hyperbolique est une connexion *métrique* de forme fondamentale (9) multipliée au besoin par -1; nous allons montrer au n^0 **25** qu'il en est de même pour les surfaces du type parabolique et que leur métrique est dégénérée.

21. Type elliptique. La première des deux formes différentielles

$$R_{\lambda\mu}\, du^\lambda\, du^\mu, \qquad D_{\lambda\mu}\, du^\lambda\, du^\mu$$

étant par hypothèse définie, on peut choisir les variables u^α d'une façon telle qu'il soit [17])

$$R_{12} = 0, \qquad D_{12} = 0.$$

Remarquons que la première des relations ci-dessus entraîne les deux égalités suivantes

$$R_{121}{}^{1} = 0, \qquad R_{122}{}^{2} = 0.$$

En les comparant aux équations (4) du Ch. **II**, on trouve

$$B_2{}^1 = B_1{}^2 = 0.$$

On aura par suite, d'après les mêmes équations, $R_{121}{}^{2} = -D_{11} B_2{}^2$, $R_{122}{}^{1} = = D_{22} B_1{}^1$, c'est-à-dire

$$R_{11} = D_{11} B_2{}^2, \quad R_{22} = D_{22} B_1{}^1. \tag{11}$$

Notons encore que l'équation (23) du Ch **I** prend maintenant la forme suivante

$$D_{11} D_{22} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{12}$$

et que les relations (10) du n^0 précédent conduisent aux formules

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}{}^1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \log R_{11}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{12}{}^1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \log R_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{22}{}^1 = -\frac{1}{2R_{11}}\frac{\partial R_{22}}{\partial u^1},\\
&\Gamma_{11}{}^2 = -\frac{1}{2R_{22}}\frac{\partial R_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}{}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \log R_{22}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{22}{}^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \log R_{22}}{\partial u^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Nous distinguerons dans la suite deux cas suivant que le second membre de l'équation (12) est égal à $+1$ ou à -1.

Nous traiterons d'abord le premier cas, où l'on a

$$D_{11} D_{22} = 1.$$

D'après les formules (11) on aura par conséquent

$$B_1{}^1 B_2{}^2 = R_{11} R_{22}.$$

[17]) V. par exemple L. B i a n c k i [1], p. 55.

Comme le produit $R_{11} R_{22}$ est par hypothèse positif, on peut poser

$$B_1{}^1 = \sqrt{R_{11} R_{22}}\, \operatorname{tgh} \Theta, \qquad B_2{}^2 = \sqrt{R_{11} R_{22}}\, \operatorname{cotgh} \Theta. \tag{14}$$

Nous allons substituer ces expressions dans les équations (27) du Ch. **I** qui peuvent s'écrire maintenant comme il suit

$$\frac{\partial B_1{}^1}{\partial u^2} = \Gamma_{22}{}^2 B_2{}^1 + \Gamma_{12}{}^1 B_2{}^2, \qquad \frac{\partial B_2{}^2}{\partial u^1} = \Gamma_{12}{}^2 B_1{}^1 + \Gamma_{11}{}^1 B_2{}^2.$$

Si l'on utilise encore les formules (13), on sera conduit ainsi aux relations suivantes

$$\frac{\partial \log R_{11}}{\partial u^2} = 2\,\frac{\partial \log \cosh \Theta}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial \log R_{11}}{\partial u^1} = 2\,\frac{\partial \log \sinh \Theta}{\partial u^1}.$$

On peut donc poser, sans diminuer la généralité,

$$\begin{aligned}
R_{11} = \eta \cosh^2 \Theta, &\qquad R_{22} = \eta \sinh^2 \Theta\\
\eta &= \pm 1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Si l'on se reporte aux formules (11) et (14) et que l'on change au besoin le sens du vecteur $\vec{I}_3$ (v. n^0 **4**, Remarque 4⁰), on trouve

$$D_{11} = D_{22} = 1 \tag{16}$$

et par suite

$$B_1{}^1 = \eta \sinh^2 \Theta, \qquad B_2{}^2 = \eta \cosh^2 \Theta. \tag{17}$$

Il est facile de voir que les expressions ci-dessus satisfont bien aux équations de C o d a z z i (équ. (26) et (27) du Ch. **I**). Il faut encore chercher à satisfaire aux équations de G a u s s qui se réduisent ici à deux relations suivantes

$$D_{22} B_1{}^1 = \frac{\partial \Gamma_{21}{}^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}{}^1}{\partial u^1} + \Gamma_{12}{}^1 (\Gamma_{12}{}^1 - \Gamma_{22}{}^2) - \Gamma_{22}{}^1 (\Gamma_{11}{}^1 - \Gamma_{12}{}^2),$$

$$D_{11} B_2{}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}{}^2}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}{}^2}{\partial u^2} + \Gamma_{12}{}^2 (\Gamma_{12}{}^2 - \Gamma_{11}{}^1) - \Gamma_{11}{}^2 (\Gamma_{22}{}^2 - \Gamma_{12}{}^1).$$

En y portant les expressions (13), (15), (16) et (17), on est conduit à une seule équation de la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^1 \partial u^1} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2 \partial u^2} = \eta \sinh \Theta \cosh \Theta. \tag{18}$$

b) Si l'on pose dans l'équation (12) $\varepsilon = -1$, un raisonnement tout semblable au précédent nous conduira aux résultats résumés dans le tableau suivant:

$$D_{11} = D_{12} = 1,$$

$$B_1{}^1 = \eta \sin^2 \Theta, \qquad B_2{}^2 = \eta \cos^2 \Theta,$$

$$R_{11} = \eta \cos^2 \Theta, \qquad R_{22} = \eta \sin^2 \Theta,$$

la fonction Θ devant satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2 \partial u^2} = \eta \sin \Theta \cos \Theta, \tag{19}$$

$$\eta = \pm 1.$$

On voit ainsi que *la détermination des surfaces C du type elliptique se ramène à l'intégration de l'équation* (18) *et de l'équation* (19). Ces équations expriment respectivement que la courbure des deux formes différentielles

$$\eta\,[\cosh^2 \Theta\,(d\,u^1)^2 + \sinh^2 \Theta\,(d\,u^2)^2], \quad \eta\,[\cos^2 \Theta\,(d\,u^1)^2 + \sin^2 \Theta\,(d\,u^2)^2]$$

est constante. On en conclut que *toute surface C du type elliptique admet un groupe d'isomorphies à trois paramètres.* Nous verrons d'ailleurs dans les n^{os} suivants que toutes les surfaces C jouissent de la même propriété.

Observons encore que parmi les solutions obtenues plus haut se trouvent les surfaces de courbure constante de l'espace ordinaire et celles qui se déduisent d'elles par une transformation quelconque du groupe affine. On sait d'ailleurs que pour les surfaces de courbure gaussienne constante la normale affine se confond avec la normale ordinaire [18]). Pour obtenir ces solutions particulierès il faut poser dans

[18]) W. Blaschke [2], p. 166.

l'équation (18) $\eta = -1$ (surfaces à courbure $+1$) et dans l'équation (19) $\eta = +1$ (surfaces à courbure -1) [19]). (Pour être d'accord avec la définition habituelle de la courbure d'une surface de l'espace ordinaire il faudrait changer la définition du tenseur $R_{12\lambda}{}^{\mu}$ donnée au moyen de l'équation (3) du Ch. **II**, en remplaçant $R_{12\lambda}{}^{\mu}$ par $-R_{12\lambda}{}^{\mu}$.)

22. Type hyperbolique. Considérons une surface C quelconque du type hyperbolique. La forme

$$\Lambda = R_{\lambda\mu}\, d\,u^\lambda\, d\,u^\mu \tag{20}$$

étant par hypothèse indéfinie, on peut choisir les coordonnées $u^\varkappa$ de telle manière que l'on ait $R_{11} = R_{22} = 0$. Si l'on porte ces valeurs dans les équations (10) du n^0 **20**, il viendra

$$\Gamma_{11}{}^1 = \frac{\partial \log R_{12}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{12}{}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}{}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}{}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}{}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}{}^2 = \frac{\partial \log R_{12}}{\partial u^2},$$

et les formules (3) du n^0 **7** nons conduirons à l'équation

$$\frac{\partial^2 \log R_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} = R_{12}.$$

L'intégrale générale de la dernière équation est donnée par la formule

$$R_{12} = \frac{2\, U_1'\, U_2'}{(U_1 + U_2)^2},$$

$U_\varkappa$ désignant une fonction arbitraire de la variable $u^\varkappa$. En changeant convenablement les variables, on peut donc ramener l'égalité (20) à la forme suivante

$$\Lambda = \frac{4\, d\,u^1\, d\,u^2}{(u^1 + u^2)^2}, \tag{21}$$

et les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^\varkappa$ seront donnés par les formules

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}{}^1 = -\frac{2}{u^1 + u^2}, \quad \Gamma_{12}{}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}{}^1 = 0, \\ &\Gamma_{11}{}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}{}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}{}^2 = -\frac{2}{u^1 + u^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

[19]) L. Biancki [1], p. 458 et 488.

Nous voyons ainsi que dans le cas des surfaces C du type hyperbolique les coefficients de la connexion induite peuvent être ramenés à une forme canonique; cela nous permet d'énoncer la proposition suivante:

Toutes les surfaces C du type hyperbolique sont affinement isomorphes l'une à l'autre.

Il est encore facile de vérifier que la forme (21) reste inaltérée, si l'on soumet les variables $u^{\varkappa}$ aux transformations suivantes

$$u^1 = \frac{\alpha \bar{u}^1 + \beta}{\gamma \bar{u}^1 + \delta}, \quad u^2 = \frac{\alpha \bar{u}^2 - \beta}{\gamma \bar{u}^2 - \delta};$$

$$u^1 = \frac{\alpha \bar{u}^2 + \beta}{\gamma \bar{u}^2 + \delta}, \quad u^2 = \frac{\alpha \bar{u}^1 - \beta}{\gamma \bar{u}^2 - \delta};$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre constantes telles que l'on ait $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ces transformations forment le groupe d'isomorphies d'une surface C du type hyperbolique.

Remarquons aussi que la forme différentielle (21) est identique à l'élément linéaire de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ plongé dans l'espace de forme fondamentale $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$.

23. Type hyperbolique (suite). Il nous reste à ramener la détermination des surfaces C du type hyperbolique à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. Nous distinguerons dans cette étude deux cas:

a) Cherchons d'abord les surfaces à lignes asymptotiques imaginaires. On aura par hypothèse

$$D_{11} D_{22} - D_{12}^{\;2} = 1. \tag{23}$$

Nous savons que dans ce cas les deux familles de lignes de courbure affines sont distinctes et réelles. On peut donc supposer que les variables $u^{\varkappa}$ sont les paramètres de ces lignes. On aura par suite (v. n^0 **10**)

$$D_{12} = 0, \quad R_{12} = 0,$$

ce qui entraîne d'après l'équation (23) et d'après les formules (14) du Ch. **II** les relations suivantes

$$B_2^{\;1} = B_1^{\;2} = 0, \quad D_{11} D_{22} = 1, \quad B_1^{\;1} B_2^{\;2} = R_{11} R_{22} < 0. \tag{24}$$

On peut donc poser

$$B_1^{\;1} = -\sqrt{-R_{11} R_{22}}\,\mathrm{tg}\,\Theta, \quad B_2^{\;2} = \sqrt{-R_{11} R_{22}}\,\mathrm{cotg}\,\Theta$$

En procédant de la même manière que dans le n^0 **21**, on sera conduit aux résultats suivants

$$R_{11} = \cos^2\Theta, \quad R_{22} = -\sin^2\Theta,$$

$$D_{11} = D_{22} = 1,$$

$$B_1^{\;1} = -\sin^2\Theta, \quad B_2^{\;2} = \cos^2\Theta, \quad B_2^{\;1} = B_1^{\;2} = 0,$$

Θ devant être une intégrale quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^1 \partial u^1} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2 \partial u^2} = \sin\Theta \cos\Theta.$$

b) Envisageons maintenant une surface C du type hyperbolique admettant des lignes asymptotiques réelles et prenons les paramètres de ces lignes comme variables $u^{\varkappa}$. On peut donc écrire

$$D_{11} = D_{22} = 0, \quad D_{12} = 1 \tag{25}$$

et, en tenant compte des équations (26) du Ch. **I**,

$$\Gamma_{12}^{\;1} = \Gamma_{12}^{\;2} = 0. \tag{26}$$

Par suite les équations (10) du n^0 **20** conduiront aux relations suivantes

$$\frac{\partial R_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial R_{22}}{\partial u^1} = 0.$$

On voit donc que chacun des coefficients R_{11}, R_{22} de la forme (9) peut être réduit à l'une des trois valeurs: -1, 0, $+1$. Nous pouvons nous borner à examiner les trois cas suivants:

b$_1$) $R_{11} = R_{22} = \pm 1$, b$_2$) $R_{11} = +1$, $R_{22} = -1$, b$_3$) $R_{11} = -1, 0, +1$, $R_{22} = 0$.

b$_1$) On a par hypothèse

$$R_{11} = R_{22} = \eta, \qquad \eta = \pm 1;$$

posons encore $R_{12}=\cosh\Theta$. En portant ces expressions dans les équations (10) du n^0 **20**, et en ayant égard aux relations (26), on trouve sans effort

$$\Gamma_{11}{}^{1}=\operatorname{cotgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u^1},\quad \Gamma_{12}{}^{1}=0,\quad \Gamma_{22}{}^{1}=-\frac{\eta}{\sinh\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u^2},$$
$$\Gamma_{11}{}^{2}=-\frac{\eta}{\sinh\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u^1},\quad \Gamma_{12}{}^{2}=0,\quad \Gamma_{22}{}^{2}=\operatorname{cotgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u^2}. \tag{27}$$

Les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\varkappa}$ et $D_{\varkappa\lambda}$ une fois connus, on calcule les coefficients $B_{\mu}{}^{\lambda}$ à l'aide de l'égalité (29) du Ch. **I** et des relations (4) du Ch. **II**, et on obtient

$$B_1{}^1=-\cosh\Theta,\quad B_2{}^1=B_1{}^2=\eta,\quad B_2{}^2=-\cosh\Theta. \tag{28}$$

En substituant les expressions (27) et (28) dans les équations de Gauss (n^0 **3**), il vient

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^1\,\partial u^2}=-\sinh\Theta.$$

En traitant de la même manière les cas b₂) et b₃), on est conduit aux résultats suivants:

b₂) $$R_{11}=1,\quad R_{12}=\sinh\Theta,\quad R_{22}=-1,$$

$$\Gamma_{11}{}^{1}=\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u^1},\quad \Gamma_{12}{}^{1}=0,\quad \Gamma_{22}{}^{1}=\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u^2},$$

$$\Gamma_{11}{}^{2}=-\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u^1},\quad \Gamma_{12}{}^{2}=0,\quad \Gamma_{22}{}^{2}=\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u^2},$$

$$B_1{}^1=B_2{}^2=-\sinh\Theta,\quad B_2{}^1=-1,\quad B_1{}^2=1,$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^1\,\partial u^2}=-\cosh\Theta.$$

b₃) $$R_{11}=\eta,\quad R_{12}=\Theta,\quad R_{22}=0,$$

$$\eta=-1,0,1,$$

$$\Gamma_{11}{}^{1}=\frac{\partial\log\Theta}{\partial u^1},\quad \Gamma_{12}{}^{1}=0,\quad \Gamma_{22}{}^{1}=0,$$

$$\Gamma_{11}{}^{2}=\eta\frac{\partial}{\partial u^1}\frac{1}{\Theta},\quad \Gamma_{12}{}^{2}=0,\quad \Gamma_{22}{}^{2}=\frac{\partial\log\Theta}{\partial u^2},$$

$$B_1{}^1=B_2{}^2=-\Theta,\quad B_2{}^1=0,\quad B_1{}^2=\eta,$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2\,\partial u^2}=-\Theta.$$

En résumant les considérations de ce n^0, nous constatons que *la détermination des surfaces C du type hyperbolique se ramène à l'intégration des équations suivantes:*

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^1\,\partial u^1}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2\,\partial u^2}=\sin\Theta\cos\Theta,\quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial u^1\,\partial u^2}=-\sinh\Theta,$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^1\,\partial u^2}=-\cosh\Theta,\quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial u^1\,\partial u^2}=-\Theta.$$

24. Type parabolique. Il nous reste à examiner les surfaces C de la troisième catégorie. A cet effet nous étudierons d'abord les variétes symétriques à connexion parabolique admettant une unité d'aire Comme on a, par hypothèse, $R_{11}R_{22}-R_{12}{}^2=0$, on peut choisir les coordonnées $u^{\varkappa}$ de la variété dont il est question de manière qu'il soit

$$R_{11}=R_{12}=0.$$

Par conséquent les équations

$$\nabla_{\varkappa}R_{\lambda\mu}=\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial u^{\varkappa}}-\Gamma_{\lambda\varkappa}{}^{\rho}R_{\rho\mu}-\Gamma_{\mu\varkappa}{}^{\rho}R_{\lambda\rho}=0,$$

qui expriment que la variété est symétrique, se réduiront aux suivantes

$$\Gamma_{11}{}^{2}=0,\quad \Gamma_{12}{}^{2}=0,$$
$$\frac{\partial R_{22}}{\partial u^1}=0,\quad \frac{\partial R_{22}}{\partial u^2}-2\,\Gamma_{22}{}^{2}R_{22}=0. \tag{29}$$

La composante R_{22} ne dépendant que de la variable u^2, on peut changer ce paramètre de façon que la forme $R_{\lambda\mu}\,du^{\lambda}\,du^{\mu}$ devienne $\pm(du^2)^2$, autrement dit qu'il soit

$$R_{22}=\varepsilon\qquad(\varepsilon=\pm1).$$

(Nous excluons de nos considérations ultérieures le cas de la variété sans courbure). En substituant la valeur de la composante R_{22} dans la dernière des équations (29), on trouve $\Gamma_{22}{}^{2}=0$. En résumant on peut donc écrire

$$R_{11}=0,\quad R_{12}=0,\quad R_{22}=\varepsilon, \tag{30}$$

et

$$\Gamma_{\lambda\mu}{}^{2}=0. \tag{31}$$

Nous allons montrer que les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{1}$ peuvent également être réduits à une forme canonique. Remarquons pour ce but que, la variété admettant une unité absolue d'aire, on a $R_{121}{}^{1}+R_{122}{}^{2}=0$, ce qui conduit dans le cas actuel à la relation suivante (v. équ. (3) du Ch. **II**)

$$\frac{\partial\Gamma_{11}{}^{1}}{\partial u^2}=\frac{\partial\Gamma_{12}{}^{1}}{\partial u^1}.$$

On peut donc poser

$$\Gamma_{11}{}^{1}=\frac{\partial\log\psi}{\partial u^1},\qquad \Gamma_{12}{}^{1}=\frac{\partial\log\psi}{\partial u^2}, \tag{32}$$

ψ désignant une fonction des deux variables $u^\varkappa$. Cela étant, nous allons changer les variables $u^\varkappa$ au mayen d'une transformation de la forme

$$\bar u^1=\varphi(u^1 u^2),\qquad \bar u^2=u^2.$$

On sait[20]) que le prolongement de cette transformation aux coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\varkappa}$ est donné par les relations suivantes

$$\frac{\partial^2\bar u^\varkappa}{\partial u^\lambda\,\partial u^\mu}+\bar\Gamma_{\rho\sigma}{}^{\varkappa}\frac{\partial\bar u^\rho}{\partial u^\lambda}\frac{\partial\bar u^\sigma}{\partial u^\mu}=\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\tau}\frac{\partial\bar u^\varkappa}{\partial u^\tau}. \tag{33}$$

Il est facile de vérifier au moyen de ces équations que les valeurs (31) des coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{2}$ seront conservées par la transformation ci-dessus et que les coefficients $\Gamma_{11}{}^{1}$, $\Gamma_{12}{}^{1}$ seront déterminés par les égalités

$$\frac{\partial\log\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}}{\partial u^1}+\bar\Gamma_{11}{}^{1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}=\Gamma_{11}{}^{1},\qquad \frac{\partial\log\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^2}}{\partial u^2}+\bar\Gamma_{11}{}^{1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}+\bar\Gamma_{12}{}^{1}=\Gamma_{12}{}^{1};$$

20) J. A. Schouten [9], p. 65.

en tenant compte des formules (32), on ramène ces relations à la forme suivante

$$\bar\Gamma_{11}{}^{1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}=\frac{\partial\log\psi}{\partial u^1}-\frac{\partial\log\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}}{\partial u^1},\quad \bar\Gamma_{12}{}^{1}+\bar\Gamma_{11}{}^{1}\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}=\frac{\partial\log\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\log\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}}{\partial u^2}.$$

Donc, si l'on choisit la fonction φ de façon qu'il soit $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}=\psi$, on aura $\bar\Gamma_{11}{}^{1}=\bar\Gamma_{12}{}^{1}=0$. Il est donc permis de supposer que les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\varkappa}$ satisfont aux relations (31) et aux égalités

$$\Gamma_{11}{}^{1}=\Gamma_{12}{}^{1}=0. \tag{34}$$

Cela établi, nous nous reporterons à l'équation (3) du Ch. **II**, on y posant $\varkappa=1$, $\lambda=2$; en tenant compte des relations (30), (31) et (34), et en remarquant que l'on a $R_{122}{}^{1}=R_{22}$, nous obtenons l'équation suivante

$$\frac{\partial\Gamma_{22}{}^{1}}{\partial u^1}=\varepsilon,$$

d'où

$$\Gamma_{22}{}^{1}=\varepsilon\,u^1+A(u^2), \tag{35}$$

le symbole $A(u^2)$ désignant une fonction arbitraire de la variable u^2. Faisons maintenant un nouveau changement de variables, en posant

$$\bar u^1=u^1+B(u^2),\qquad \bar u^2=u^2.$$

Il est facile de voir que cette transformation ne touche en rien à la validité des formules (30), (31) et (34); d'autre part, si l'on pose dans l'équation (33) $\varkappa=1$, $\lambda=\mu=2$, on trouve

$$\frac{d^2B}{du^2\,du^2}+\bar\Gamma_{22}{}^{1}=\Gamma_{22}{}^{1}$$

ou, en vertu de la relation (35),

$$\frac{d^2B}{du^2\,du^2}+\bar\Gamma_{22}{}^{1}=\varepsilon\,u^1+A(u^2)$$

Ceci montre que la fonction $B(u^2)$ peut être choisie de façon que l'on ait

$$\bar\Gamma_{22}{}^{1}=\varepsilon\,\bar u^1,$$

Il résulte donc de cette étude que *les coefficients* $\Gamma_{\lambda\mu}^{\varkappa}$ *d'une variété symétrique* A_2 *à connexion parabolique admettant une unité d'aire peuvent être réduits à la forme canonique suivante*

$$\Gamma_{\lambda\mu}{}^{1}=0, \qquad \Gamma_{11}{}^{2}=\Gamma_{12}{}^{2}=0, \qquad \Gamma_{22}{}^{2}=\varepsilon\, u^{1} \qquad \varepsilon=\pm 1. \tag{36}$$

On en conclut que les surfaces de l'espace E_3 qui sont douées d'une connexion symétrique du type parabolique se partagent en deux classes suivant que l'on a $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon=-1$; les surfaces d'une même classe sont affinement isomorphes l'une à l'autre. Remarquons aussi que toute variété symétrique A_2 à connexion parabolique admet un groupe d'isomorphies à trois paramètres composé de transformations suivantes

$$\overline{u}^{1}=u^{1}+ku^{2}+a, \qquad \overline{u}^{2}=u^{2}+b. \tag{37}$$

Notons encore que la variété holonome de groupe fondamental (37) a été signalée par M. Borel[21]) et étudiée par S. Glass[22]); sa géométrie est identique à celle du plan tangent au cône $x^2+y^2-z^2=0$ plongé dans l'espace de forme fondamentale $ds^2=dx^2+dy^2-dz^2$.

25. Type parabolique (*suite*). Soit S une surface C du type parabolique. D'après les résultats obtenus dans le n^0 précédent nous pouvons supposer que l'on a sur cette surface

$$R_{11}=R_{12}=0, \qquad R_{22}=\varepsilon \qquad (\varepsilon=\pm 1) \tag{38}$$

et

$$\Gamma_{\lambda\mu}{}^{2}=0. \tag{39}$$

Nous savons aussi que ces relations se conservent par toute transformation de la forme

$$\overline{u}^{1}=\varphi(u^{1}, u^{2}), \qquad \overline{u}^{2}=u^{2}.$$

Maintenant nous nous reporterons aux équations (4) du Ch. **II** qui deviennent dans le cas actuel

$$\begin{aligned} D_{11}B_2{}^{1}-D_{12}B_1{}^{1}&=0, & D_{21}B_2{}^{1}-D_{22}B_1{}^{1}&=\varepsilon,\\ D_{11}B_2{}^{2}-D_{12}B_1{}^{2}&=0, & D_{21}B_2{}^{2}-D_{22}B_1{}^{2}&=0. \end{aligned} \tag{40}$$

---

21) E. Borel [3], p. 38.
22) S. Glass [8].

Il en résulte que l'on a

$$B_1{}^{2}=B_2{}^{2}=0 \tag{41}$$

et que, par conséquent, les courbes $du^2=0$ sont des lignes de courbure affines de la surface S (n^0 **6**).

Envisageons d'abord les surfaces dont les deux familles de lignes de courbure affines sont distinctes et supposons que la seconde famille se compose de courbes $du^1=0$; d'après la remarque faite plus haut cette hypothèse est bien d'accord avec les égalités (38) et (39). On aura en outre

$$D_{12}=0, \qquad D_{11}D_{22}=\eta, \qquad B_2{}^{1}=0, \qquad D_{22}B_1{}^{1}=-\varepsilon \qquad \eta=\pm 1. \tag{42}$$

Ce sont des conséquences des équations (41), (23) et (29) du Ch. **I** et des relations (40) du n^0 présent. Les équations de Codazzi conduiront maintenant aux égalités suivantes

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial u^2}=0, \qquad \frac{\partial D_{22}}{\partial u^1}=-\Gamma_{22}{}^{1}D_{11}-\Gamma_{11}{}^{1}D_{22}, \qquad \frac{\partial B_1{}^{1}}{\partial u^2}=0. \tag{43}$$

En rapprochant la deuxième des relations (42), on obtient

$$\frac{\partial D_{22}}{\partial u^2}=0.$$

On voit donc que les coefficients D_{11}, D_{22} ne dépendent que de la variable u^1; par suite on peut choisir le paramètre u^1 de telle façon qu'il soit $D_{11}=1$ et, par conséquent, $D_{22}=\eta$. D'après la deuxième des relations (43) nous aurons alors

$$\Gamma_{22}{}^{1}+\eta\,\Gamma_{11}{}^{1}=0.$$

En comparant cette égalité aux formules (32) du n^0 précédent, on trouve

$$\Gamma_{11}{}^{1}=\frac{\partial \log\psi}{\partial u^1}, \qquad \Gamma_{12}{}^{1}=\frac{\partial \log\psi}{\partial u^2}, \qquad \Gamma_{22}{}^{1}=-\eta\frac{\partial \log\psi}{\partial u^1}.$$

En substituant ces expressions dans les équations de Gauss te en tenant compte des relations (38), on trouve que la fonction ψ doit satisfaire à l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \, \partial u^1} + \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2 \, \partial u^2} = \varepsilon \, \eta \, \psi. \tag{44}$$

En résumé, les surfaces envisagées sont déterminées par les formules

$$D_{11} = 1, \qquad D_{12} = 0, \qquad D_{22} = \eta,$$

$$B_1{}^1 = -\varepsilon \, \eta, \qquad B_2{}^1 = 0, \qquad B_1{}^1 = 0, \qquad B_2{}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{11}{}^1 = \frac{\partial \log \psi}{\partial u^1}, \qquad \Gamma_{12}{}^1 = \frac{\partial \log \psi}{\partial u^2}, \qquad \Gamma_{22}{}^1 = -\eta \frac{\partial \log \psi}{\partial u^1}, \qquad \Gamma_{\lambda\mu}{}^2 = 0,$$

$$(\varepsilon = \pm 1, \quad \eta = \pm 1),$$

ψ étant une intégrale quelconque de l'équation (44).

Il nous reste à traiter le cas où les deux familles de lignes de courbure affines de la surface se confondent. Pour faire cette étude nous adopterons le système de coordonées gaussiennes introduits dans le n^0 précédent. Les valeurs des coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\alpha}$ seront alors données par les formules (36) établies plus haut. D'autre part on aura

$$D_{11} = 0, \qquad D_{12} = 1$$

$$B_1{}^1 = 0, \qquad B_2{}^1 = \varepsilon, \qquad B_1{}^2 = 0, \qquad B_2{}^2 = 0,$$

et les équations de C o d a z z i se réduiront à la relation suivante

$$\frac{\partial D_{22}}{\partial u^1} = 0.$$

Nous pourrons donc poser

$$D_{22} = U(u^2),$$

en désignant par le symbole $U(u^2)$ une fonction arbitraire de la variable u^2. On aura en définitive

$$\Gamma_{\lambda\mu}{}^1 = 0, \qquad \Gamma_{11}{}^2 = 0, \qquad \Gamma_{12}{}^2 = 0, \qquad \Gamma_{22}{}^2 = \varepsilon \, u^1,$$

$$D_{11} = 0, \qquad D_{12} = 1, \qquad D_{22} = U(u^2),$$

$$B_1{}^1 = 0, \qquad B_2{}^1 = \varepsilon, \qquad B_1{}^2 = 0, \qquad B_2{}^2 = 0$$

$$\varepsilon = \pm 1.$$

Les surfaces définies par ces formules sont des surfaces réglées dont les normales affines sont parallèles à un plan fixe; leurs équations s'obtiennent au moyen des quadratures, en intégrant le système formé d'équations (30) et (31) du Ch. I.

En terminant nous pouvons constater que, d'après les propositions établies au n^0 précédent, *les surfaces C du type parabolique sont douées d'une connexion métrique dégénérée de forme fondamentale* $\pm (d\,u^2)^2$, *et qu'elles admettent un groupe d'isomorphies à trois paramètres formé de transformations* (37).

Index bibliographique.

1. L. B i a n c h i — Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Aufl. (Leipzig u. Berlin 1910).
2. W. B l a s c h k e — Vorlesungen über Differentialgeometrie II (Berlin 1923).
3. E. B o r e l — Introduction géométrique à quelques théories physiques (Paris 1914).
4. E. C a r t a n — Sur l'intégration des systémes d'équations aux différentielles totales (Ann. Ec. Norm. (3) 18, 1901, 241 — 311).
5. E. C a r t a n — Sur la structure des groupes infinis de transformations (Ann. Ec. Norm. (3) 21, 1904, 153 — 206).
6. E. C a r t a n — Sur les formes diférentielles en Géométrie (C. R. 178, 1924, 182 — 185).
7. E. C a r t a n — Sur la connexion affine des surfaces (C. R. 178, 1924, 292—295).
8. S. G l a s s — Sur la Géométrie de Cayley et sur une géométrie plane particulière (Ann. Soc. Polonaise de Math. 5, 1926, 20 — 36).
9. J. A. S c h o u t e n — Der Ricci - Kalkül (Berlin 1924).
10. G. T z i t z é i c a — Géométrie différentielle projective des réseaux (Bucarest — Paris 1924).

Streszczenie.

Praca niniejsza składa się z czterech rozdziałów. W pierwszym rozdziale są wyłożone metodą ruchomego trójścianu podstawy teorji powierzchni w przestrzeni afinalnej mającej za grupę zasadniczą ogólną grupę linjową. (Teorja powierzchni rozwinięta przez niemieckich geometrów jak Pick, Blaschke, Berwald i inni, ma za przedmiot powierzchnie przestrzeni, której zasadniczą grupą jest specjalna grupa linjowa). Przedmiotem drugiego rozdziału jest koneksja afinalna indukowana na powierzchni przestrzeni afinalnej, a w szczególności teorja geodezyjnych; między innemi jest tutaj wykazana równoważność definicji geodezyjnych przyjętej w tekście z definicją E. Cartana. Trzeci rozdział zawiera rozwiązanie następującego zagadnienia będącego uogólnieniem problemu zginania powierzchni w zwykłej przestrzeni: dana jest dwuwymiarowa przestrzeń A_2 o koneksji afinalnej dozwalającej na absolutną jednostkę pola, zbadać, czy istnieją w przestrzeni afinalnej powierzchnie, na których koneksja indukowana jest identyczna z koneksją przestrzeni A_2. Okazuje się, że zagadnienie powyższe posiada rozwiązania jedynie przy pewnych ograniczających założeniach o przestrzeni A_2 a znalezienie rozwiązań sprowadza się do całkowania pewnego układu równań Pfaffa. Ostatni wreszcie rozdział poświęcony jest powierzchniom, na których koneksja indukowana jest symetryczna w znaczeniu nadanym temu terminowi przez E. Cartana; klasa tych powierzchni jest uogólnieniem klasy powierzchni o stałej krzywiźnie w zwykłej przestrzeni.

C. Białobrzeski.

Uwagi o pozytywistycznym kierunku filozofji fizyki.

Nowa fizyka, jaka powstała w ciągu ostatnich lat kilkunastu, po okresie przygotowawczym trwającym od początku bieżącego stulecia, głęboko różni się w swych podstawach ideowych od fizyki starej, opartej na mechanice Newtonowskiej.

Jest to fakt, któremu zaprzeczyć nie podobna. Wywołał on wielkie poruszenie umysłów, okazało się bowiem z całkowitą wyrazistością, że rozpowszechnione dawniej przekonanie o zdobyciu przez myśl ludzką niewzruszonych zasad, na których ma się opierać pojmowanie przyrody, było złudzeniem. Wobec tego, z jednej strony fizyka stanęła w centrum zainteresowań filozofów, nie bacząc na to, że działały odstraszająco trudności matematyczne związane z należytem jej zrozumieniem.

Z drugiej strony sami fizycy, w obliczu rewolucji, jaka wstrząsnęła podstawami ich nauki, zwrócili się do rozmyślań nad właściwym sensem pojęć naukowych i drogami myśli prowadzącemi do zrozumienia przyrody, jeżeli o zrozumieniu wogóle może tu być mowa.

A więc nastąpiło zbliżenie, albo raczej dążenie do zbliżenia między fizyką i filozofją, które z pewnością będzie się w dalszym ciągu pogłębiało.

Równocześnie na gruncie nowych idei fizycznych rozpoczęła się na nowo walka kierunków epistemologicznych, stawiających sobie za cel ustalenie wartości poznawczej pojęć i teorji naukowych.

Najbardziej wyraziście zarysowuje się w tej walce przeciwstawność kierunków pozytywistycznego i realistycznego. Obydwa kierunki występują w licznych odmianach, które najczęściej są próbami kompromisu między skrajnemi punktami widzenia znajdującemi swój wyraz w czystych pozytywizmie i realizmie.

Wszechstronne rozpatrzenie zagadnienia epistemologicznego, na tle tych rozmaitych usiłowań, zmierzających do jego rozwiązania, wymagałoby