

Włodzimierz Wrona

Neues Beispiel einer Finslerschen Geometrie.

In Finslers Verallgemeinerung der Massbestimmung treten auch solche Geometrien auf, in denen gewisse Punkte eine sonderbare Eigentümlichkeit besitzen. Diese Eigentümlichkeit besteht darin, dass die zu dem betrachteten Punkte gehörige Indikatrix durch denselben geht. Wir nennen diese Punkte *uneigentliche* Punkte.

In meiner Magisterarbeit (erschieden in „Wiadomości Matematyczne“ B. XXXIX) habe ich ein Beispiel jener Geometrie angeführt, wo jeder Punkt uneigentlich ist. Gegenwärtig will ich noch gewisse Eigenschaften dieser Geometrie angeben, die ich schon nach Beendung der erwähnten Arbeit ergründet habe.

§ 1. Bezeichnen wir einen gewählten Punkt B auf der euklidischen Ebene als Pol und bilden eine neue Geometrie, indem wir die Länge auf jeder euklidischen Geraden mit Hilfe der Einheit abmessen, die dem euklidischen Abstand der betrachteten Geraden vom Punkte B gleich ist. Wenn wir die neue Länge der Strecke KL mit (KL) bezeichnen, dann erhalten wir

$$(1) \quad (KL) = \frac{KL}{BS},$$

wobei KL die euklidische Länge des Abschnittes, BS der euklidische Abstand der Geraden KL vom Pol ist (Fig. 1).

Durch jeden Punkt K unserer Ebene gibt es Geraden, auf welchen das Messen der Strecken unmöglich ist. Es ist nämlich diejenige Gerade (im Falle $K \neq B$ eindeutig bestimmt) die durch den Pol B hindurchgeht. Jeder auf der Ebene gelegene Punkt ist also uneigentlich.

Man kann leicht bestätigen, dass *das neue Mass der Strecken sich*

invariant gegenüber der Gruppe von Drehungen um B und Dilatationen vom B aus, verhält.

Wenn wir auf jeder Halbgeraden vom Punkt K eine der Einheit gleiche Strecke von K abmessen, dann ist es leicht nachzuweisen, dass die so entstandene Indikatrix des Punktes K aus zwei gleichen, sich berührenden Kreisen besteht, für welche BK die gemeinsame Tangente im Punkt K ist, wobei der Durchmesser der Kreise dem Abschnitte BK

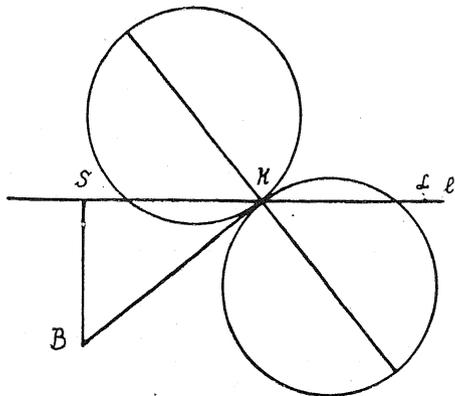


Fig. 1

gleich ist (Fig. 1). Da die Indikatrix Konkavitätspunkte besitzt, so ergibt sich daraus, dass die Dreiecksungleichung in unserer Geometrie nicht erfüllt werden kann.

§ 2. Es entsteht die Frage nach den kürzesten Linien in unserer Geometrie. Das Ziel dieser Note ist es einen wesentlichen Ansatz zu diesem Problem zu geben.

Zunächst werden wir elementargeometrisch beweisen, dass

die um den Pol gezogenen euklidischen Kreisbogen die kürzesten Linien sind.

Zeichnen wir einen solchen Kreis mit dem Halbmesser r auf und zwei Strahlen vom Pol l_1 und l_2 , die einen Winkel $\alpha < \frac{\pi}{2}$ enthalten (Fig. 2).

Die euklidische Bogenlänge dieses Kreises, der dem Winkel α entspricht, bezeichnen wir mit b . Da jedes Bogenelement vom Pol um den Halbmesser r entfernt ist, beträgt die neue Länge dieses Bogens

$$(b) = \frac{b}{r} = \alpha.$$

Zunächst beweisen wir, dass die neue Bogenlänge (b) kleiner ist als die Länge jeder Strecke (KL), welche die auf den Halbgeraden l_1 und l_2 liegenden Punkte K und L verbindet. Zum Beweis verschieben wir parallel die Gerade KL so, dass sie mit der Tangente unseres Kreises zu-

sammenfällt. Die Strahlen l_1 und l_2 schneiden jetzt auf dieser Geraden die Strecke $K'L'$ ab. Da die Strecke $K'L'$ das homothetische Bild der Strecke KL ist, so ergibt sich

$$(L'K') = (LK).$$

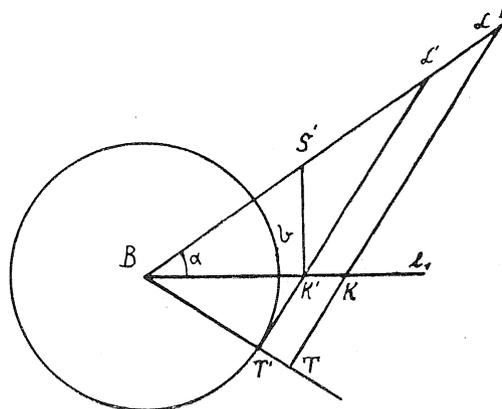


Fig. 2.

Nehmen wir nun in Betracht den Fall, wo der Stützpunkt T nicht auf dem Bogen b liegt. Da $\sphericalangle BT'K' = \frac{\pi}{2}$ ist, so erhalten wir:

$\sphericalangle BK'L' > \frac{\pi}{2}$. Wenn wir jetzt die im Punkte K' zu l_1 senkrechte Gerade führen, so trifft sie die Strecke BL' im Punkte S' . Es ist $\sphericalangle L'S'K' > \frac{\pi}{2}$ und folglich $K'L' > K'S'$. Da die Einheit BK' , mit der wir die neue Länge der Strecke $K'S'$ messen, grösser ist als die Einheit BT' der Strecke $L'K'$, so haben wir:

$$(K'S') < (K'L') = (KL).$$

Andererseits haben wir aber

$$(K'S') = \frac{K'S'}{BK'} = \text{tg } \alpha > \alpha = (b).$$

Aus der vorhergehenden Ungleichheit ergibt sich also

$$(b) < (KL).$$

Ähnlich gestaltet sich der Beweis, wenn der Stützpunkt der Geraden $K'L'$ und des Kreises auf dem Bogen b gelegen ist.

Wenn α stumpf ist, ist der Satz auch wichtig. Es genügt zum Beweis die Halbierungslinie l_3 des Winkels α (Fig. 3) zu führen, dann aus dem oben bewiesenen Satz bekommen wir $(KR) > (b_1)$, $(RL) > (b_2)$ und folglich $(KL) > (b)$.

Kehren wir jetzt zum Beweis des ursprünglichen Satzes zurück und nehmen in Betracht den Bogen $b = MN$ des oben angeführten Kreises, der kleiner als der Halbkreis sein soll und einen in jedem Punkte eine Tangente besitzenden Bogen B , der die Punkte M und N verbindet (Fig. 4). Setzen wir

zuerst voraus, dass keine Tangente dieses Kurvenbogens durch den Pol geht. Wenn wir in diese Kurve einen beliebigen Streckenzug L einschreiben, so haben wir nach dem bewiesenen Satz $(L) > (b)$. Durch den Grenzübergang erhalten wir daraus $(B) \geq (b)$.

Die obige Ungleichheit gilt auch dann, wenn der Bogen B aus einer endlichen Anzahl der im neuen Sinn messbaren Bogen besteht, die die zusätzliche Voraussetzung erfüllen. Somit haben wir bewiesen, dass keine von den behandelten Verbindungen der Punkte M und N kürzer als der Bogen (b) ist.

Die obige Ungleichheit gilt auch dann, wenn der Bogen B aus einer endlichen Anzahl der im neuen Sinn messbaren Bogen besteht, die die zusätzliche Voraussetzung erfüllen. Somit haben wir bewiesen, dass keine von den behandelten Verbindungen der Punkte M und N kürzer als der Bogen (b) ist.

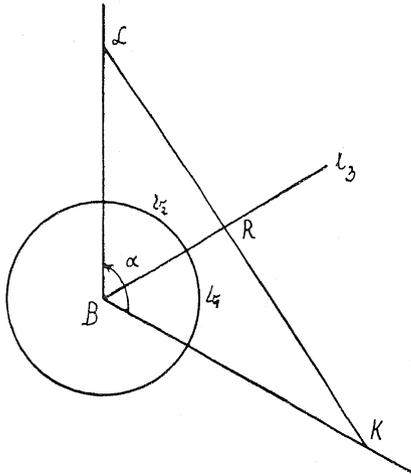


Fig. 3.

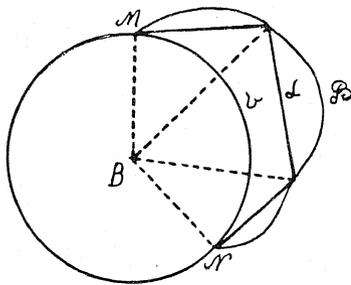


Fig. 4.

§ 3. Die anderen Extremalen werden wir auf Grund der Variationsrechnung ermitteln. Zu diesem Zweck finden wir das Bogenelement der neuen Massbestimmung. Wir bezeichnen es mit dl . Um dies zu berechnen führen wir das rechtwinklige Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Pol ein. Das euklidische Bogenelement im Punkt $M(x, y)$ ist $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Die Tangente in diesem Punkte hat die Gleichung $(\xi - x)dy - (\eta - y)dx = 0$ und ihre Entfernung vom Pol beträgt

$$\frac{|-x dy + y dx|}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Daraus ergibt sich

$$(2) \quad dl = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\frac{|x dy - y dx|}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}} = \frac{dx^2 + dy^2}{|x dy - y dx|}.$$

dl ist unbestimmt, wenn $x dy - y dx = 0$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ d. h. wenn die Tangente durch den Pol geht.

Um in unserer Geometrie die kürzesten Linien zu finden, müssen wir folgendes Variationsproblem lösen:

$$(3) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{|x \dot{y} - y \dot{x}|} dt = 0.$$

Mit dem Punkt bezeichnen wir hier die Ableitungen in Bezug auf den Parameter t .

In den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf die regulären Kurven der Klasse C_2 die keine den Pol treffenden Tangenten besitzen. Dann gilt durchaus die Ungleichheit

$$(4) \quad x \dot{y} - y \dot{x} \neq 0.$$

Es soll bemerkt werden, dass das Vorzeichen der linken Seite von (4) mit der Änderung des Laufsinns auf der Kurve wechselt. Es lohnt sich die Polarkoordinaten (mit dem Pol in B) einzuführen. Dann erhalten wir:

$$(5) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi; & y = \rho \sin \varphi; \\ \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}; & \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}; \\ & x \dot{y} - y \dot{x} = \rho^2 \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, dass die Annahme

$$x\dot{y} - y\dot{x} > 0$$

mit der Beschränkung auf die im Sinne des wachsenden Winkels φ gerichteten Kurven gleichbedeutend ist. Betrachten wir weiter nur solche Kurven, für welche die letzte Ungleichheit gilt.

Führen wir nun in unseres Variationsproblem als neue Veränderlichen die Polarkoordinaten ein und betrachten ρ als Funktion von φ , was wegen $\dot{\varphi} > 0$ erlaubt ist. Da die linken Seiten der Euler—Lagrangeschen Gleichungen die Komponenten eines Vektors darstellen, so verändern sich die Extremalen durch Übergang zum anderen Koordinatensystem *nicht*. Wird jetzt die Differentiation in bezug auf φ mit Strich bezeichnet, so bekommen wir

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\rho'^2 + \rho^2) \dot{\varphi}^2, \quad |x\dot{y} - y\dot{x}| = \rho^2 \dot{\varphi}$$

und die Gleichung (3) nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$(3') \quad \partial \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{\rho'^2}{\rho^2} + 1 \right) d\varphi = 0.$$

Rachnen wir jetzt die Euler-Lagrangesche Gleichung aus:

$$(6) \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0,$$

wobei F den Integrand der linken Seite von (3') bezeichnet. Es ist:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{\rho'^2}{\rho^2} + 1 \quad \text{und folglich} \\ \frac{\partial F}{\partial \rho'} = \frac{2\rho'}{\rho^2}, \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial \rho'} \right) = \frac{2\rho\rho'' - 4\rho'^2}{\rho^3}, \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{2\rho'^2}{\rho^3}. \end{array} \right.$$

Wenn wir jetzt diese Grössen in die Gleichung (6) einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{2\rho\rho'' - 2\rho'^2}{\rho^3} = 0,$$

was zu $\left(\frac{\rho'}{\rho} \right)' = 0$ führt. Dies ergibt: $\frac{\rho'}{\rho} = a$ und nach der Integration

bekommen wir endlich:

$$(8) \quad \rho = b e^{a\varphi},$$

wobei $b > 0$ ist.

Somit haben wir die Menge sämtlicher logarithmischer Spiralen mit dem gemeinsamen Pol in B erhalten.

Die Jacobische Bedingung ist in unserem Variationsproblem erfüllt, weil für die Schar von Extremalen, die durch den Punkt (φ_2, ρ_2) gehen die nachstehende Formel gilt:

$$(9) \quad \Delta(\varphi, a) = \rho_2^2 \cdot e^{a(\varphi - \varphi_2)} \cdot (\varphi_2 - \varphi).$$

Diese Grösse verschwindet nur für $\varphi = \varphi_2$; daher ist die Weierstrass'sche Konstruktion möglich. Der zugehörige Wert der Weierstrass'schen Funktion ist gleich:

$$(10) \quad E(x, y; \dot{x}, \dot{y}; x', y') = \frac{(x^2 + y^2) \sin^2 \gamma (x^2 + \dot{y}^2) (x'^2 + y'^2)}{(x\dot{y} - y\dot{x}) (x y' - y' x)^2};$$

(x', y') beziehen sich auf die Extremale s und (\dot{x}, \dot{y}) auf eine beliebige, der in Betracht kommenden, einer gewissen Umgebung von s angehörige Kurve; γ bedeutet den Winkel der Vektoren (x', y') , (\dot{x}, \dot{y}) .

E kann nur in ordentlicher Weise *) verschwinden und wegen der angenommenen Begrenzungen der betrachteten Kurven ist $E > 0$. Daraus ergibt sich, dass die Kurven $\rho = b e^{a\varphi}$ das Minimum unseres Integrals zwischen den Kurven einer gewissen Umbebung bilden.

Dieselben Ergebnisse erhalten wir, wenn wir die in der Richtung des abnehmenden Winkels φ gerichteten Kurven behandeln.

Wie aus den Gleichungen (8) zu ersehen ist, bilden die kürzesten Linien in der neuen Geometrie die logarithmischen Spiralen (wenn $a \neq 0$) sowie die besprochenen Kreise um den Pol (wenn $a = 0$).

§ 4. Betrachten wir jetzt alle die Punkte $A(\varphi_1, \rho_1)$ und $C(\varphi_2, \rho_2)$ verbindenden regulären Kurven der Klasse C_3 , für welche $x dy - y dx \neq 0$ gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\varphi_1 = 0$. Behandeln wir nur solche Lagen des Punktes C , für welche $0 < \varphi_2 < \pi$. Wir können den Punkt C mit A durch einfache Spiralen s_1 und s_1' , wie auch durch solche Spiralen verbinden, die den Pol einige Male umschlingen z. B. s_2 (Fig. 5).

*) L. Koschmieder: „Variationsrechnung“. (1933) S. 46.

Bezeichnen wir mit s_n bzw. s_n' diejenige spirale die den Punkt C mit A verbindet, den Pol Bn —mal umschlingt und den positiven bzw.

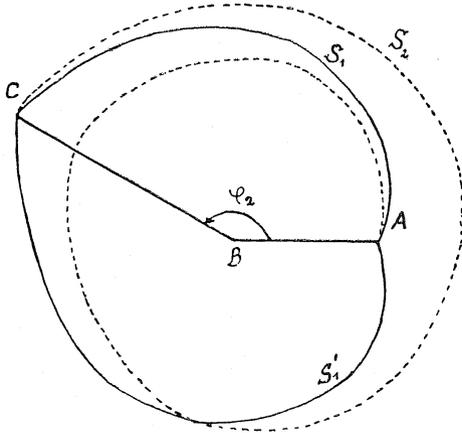


Fig. 5.

negativen Umlaufssinn besitzt, dann erhalten wir durch Berechnung des Integrals in (3')

$$(11) \quad \begin{cases} (s_n) = \frac{1}{2(n-1)\pi + \varphi_2} \log^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} + 2(n-1)\pi + \varphi_2, \\ (s'_n) = \frac{1}{2n\pi - \varphi_2} \log^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} + 2n\pi - \varphi_2. \end{cases}$$

Mann kann durch eine leichte Rechnung bestätigen, dass zwischen allen Spiralen s_n und s_k' diejenige die kleinste Länge (im neuen Sinne) besitzt, für welche die Ungleichheit

$$(12) \quad \begin{cases} [4(n-1)^2\pi^2 - \varphi_2^2] \leq \log^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \leq [2(n-1)\pi + \varphi_2][2n\pi - \varphi_2] \\ \text{bzw.} \\ [2(k-1)\pi + \varphi_2][2k\pi - \varphi_2] \leq \log^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \leq [4k^2\pi^2 - \varphi_2^2] \end{cases}$$

erfüllt ist. Die natürlichen Zahlen n , bzw. k sind durch die obigen Un-

gleichheiten eindeutig bestimmt. Daraus ersieht man, dass die einfache Spirale s_1 , die kürzeste ist, wenn folgende Ungleichheit gilt:

$$(13) \quad \log^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \leq \varphi_2 (2\pi - \varphi_2).$$

§ 5. Wir wollen noch ohne in die Einzelheiten der Rechnung einzugehen das Resultat anführen, was die Existenz der Extremalen mit Ecken betrifft.

Lassen wir in unseren Erwägungen Extremalen mit Ecken zu, so erhalten wir im Falle $\log \frac{\rho_2}{\rho_1} > \varphi_2$ als die kürzeste Verbindungslinie der Punkte A und C , die gebrochene Linie, die aus zwei Spiralen mit den Gleichungen

$$(14) \quad \begin{aligned} \rho_i &= b_i e^{\varepsilon_i t} \\ (i &= 1, 2) \end{aligned}$$

besteht, wobei $\varepsilon_1 = +1$ $\varepsilon_2 = -1$ und b_i positive konstante Faktoren sind.

Wenn wir $\rho_1 = 1$ annehmen, was der Allgemeinheit nicht schadet, da— wie wir schon bemerkt haben — die neuen Längen sich invariant gegenüber Dilatationen verhalten, so können wir für die Konstruktion der Spiralen (14) und des Eckpunktes folgendes angeben.

Wir zeichnen die Spirale $\rho = e^t$ und ziehen vom Punkt B einen Kreis mit dem Halbmesser ρ_2 (Fig. 6). Den Schnittpunkt des Kreises mit der Spirale bezeichnen wir mit D . Jetzt zeichnen wir die Halbierende des Winkels CBD . Sei etwa K ihr Schnittpunkt mit der Spirale.

Die Linie, die aus dem Stücke AK der Spirale $\rho = e^t$ und aus dem Stücke CK der Spirale $\rho = \rho_2 e^{(\varphi_2 - t)}$ besteht, bildet die kürzeste Verbindungslinie der genannten zwei Punkte. Im Falle $\varphi_2 = 0$ d. h., wenn sich der Punkt C auf dem Strahl BA befin-

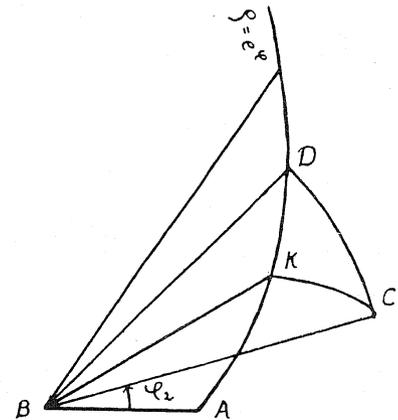


Fig. 6.

det, ist der Punkt K der Schnittpunkt der besprochenen Spirale und des Kreises um B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $\sqrt{\rho_2}$.

§ 6. Die vorstehenden Betrachtungen lösen nicht in voller Allgemeinheit das Problem der kürzesten Verbindungslinien zweier beliebiger Punkte. Der Grund dieser Tatsache liegt in der einschränkenden Voraussetzungen, die zur Anwendung der Methode der klassischen Variationsrechnung notwendig sind. Zur allgemeinen Lösung des angeführten Problems ist auch eine Präzisierung notwendig, in welchem Sinne wir den Begriff der Bogenlänge in einer singulären Finslerschen Geometrie auffassen. Das erwähnte Problem werde ich in meiner nächsten Arbeit weiter entwickeln.

Zum Schluss danke ich herzlichst dem Herrn St. Gołąb für die mir bei dieser Arbeit erteilten Ratschläge.

Streszczenie polskie.

W pracy powyższej są podane niektóre własności pewnej, szczególnej, płaskiej geometrii Finslera, otrzymanej przez autora w ten sposób, że długości na każdej prostej mierzy się przy pomocy jednostki równej odległości tej prostej od stałego punktu — bieguna. Linjami najkrótszemi są w takiej geometrii koła i spirale logarytmiczne.

Sur quelques problèmes de la théorie des surfaces de l'espace affine.

(O kilku zagadnieniach teorii powierzchni przestrzeni afinalnej).

P a r

W. Ślebodziński.

On sait que la théorie des surfaces de l'espace affine à groupe des transformations linéaires unimodulaires s'est développée dans les deux dernières dizaines d'années grâce aux travaux des géomètres allemands (G. Pick, W. Blaschke, J. Radon, L. Berwald) dont les développements ont été exposés dans l'excellent livre de M. Blaschke¹⁾. Ces recherches ont été complétées d'une contribution importante due à M. Cartan²⁾ qui a introduit, entre autres, la notion de connexion affine induite sur une surface et la notion de surfaces affinement isomorphes. On doit encore remarquer que les développements de M. Cartan ont pour objet les surfaces de l'espace affine général.

Ce Mémoire, qui est consacré en premier lieu à deux problèmes liés des notions introduites par M. Cartan, se divise en quatre chapitres. Le Chapitre I constitue un exposé succinct des notions et des équations fondamentales de la théorie des surfaces de l'espace affine général qui interviennent dans la suite; cette théorie ne diffère pas essentiellement de la théorie des surfaces de l'espace à groupe des transformations affines unimodulaires, la principale différence se révélant par le fait que les rayons de courbure principaux, la courbure affine

¹⁾ W. Blaschke [2]. (Les nombres entre crochets se rapportent à l'index bibliographique placé à la fin du Mémoire).

²⁾ E. Cartan [7]; v. aussi [6].