Calcul du demigrand axe a.

$$a(1-e^2)=\rho(1+e\cos v)\frac{\cos(\theta-\Omega)}{\cos(v+\omega)}=\frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'}\frac{\cos(\theta-\Omega)}{\cos(v+\omega)}$$

$e=0{,}406$	$\theta=135^0$	$\theta=\ 90^0$
$\Omega=100^0\ 4'$	$\rho=2'',69$	$\rho=\ 2'',35$
$\omega=127^0 23'$		$\rho'=\ 1\ ,85$
$1-e^2=0{,}835164$	$v=182^0 32' 25''$	$v=\ 249^0 52'$
	$\theta-\Omega=\ 34^0 56'$	$\theta-\Omega=-\ 10^0\ 4'$
	$v+\omega=309^0 55' 25''$	$v+\omega=\ 17^0 15'$
	$a=2'''446$	$a=2'',556$

Valeur moyenne $a=2'',501$.

Eléments de l'orbite du compagnon de ξ Ursae Majoris

	P	T	a	e	ω	i	Ω
Auteur	$59^a,82$	1875,390	2'',501	0,406	$127^0,4$	$55^0,6$	$100^0,1$
Nörlund	59 ,81	1875,767	2 ,513	0,411	129 ,2	53 ,4	100 ,7
Van den Bos	59 ,86	1875,167	2 ,535	0,413	127 ,2	57 ,2	101 ,4

Comme on voit, les élements calculés à l'aide de notre méthode diffèrent fort peu de ceux calculés per Nörlund (1905) et par Van den Bos (1928). (L'Astronomie, 1932, p. 81).

Calcul des éléments géométriques de l'orbite apparente suivant la méthode développée sur les pages 18 et 19 donne les valeurs

$$\theta_\alpha=315^0 26'',5 \qquad \alpha=1'',941$$

$$\theta_\beta=257^0 37'',0 \qquad \beta=1'',993$$

T. Rakowiecki

Détermination de l'orbite d'une binaire spectroscopique à raies dédoublées, selon la période, les temps des écartements extrêmes et des réunions des raies.

(Wyznaczenie orbity podwójnej gwiazdy spektroskopowej z czasów).

Je me suis déjà occupé partiellement de ce problème dans l'article: „Détermination des orbites des étoiles doubles spectroscopiques" (Prace Matematyczno-fizyczne, t. XLV p. 189—192), où j'ai donné une méthode pour le calcul des éléments e et ω de l'orbite *d'après les seuls temps*. Voici les formules que j'ai là déduites

$$2g-\sin 2g=\frac{360}{P}(t'-t)$$

$$e^2=\cos^2 g+\pi^2\left(\frac{t'_0-t_0}{P}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$e\sin\omega=\operatorname{ctg} g\sqrt{1-e^2}$$

$$e\cos\omega=\pi\left(\frac{t'_0-t_0}{P}-\frac{1}{2}\right)\operatorname{cosec} g$$

Je reviens ici au problème pour l'examiner en entier, en simplifiant considérablement la déduction des formules de la méthode. Supposons un couple spectroscopique dont les composantes sont d'égal éclat et appartiennent au même type spectral. Le spectre d'un tel système possède des raies dédoublées en deux lignes qui s'écartent et se réunissent périodiquement. L'observation donne alors: 1^0, l'intervalle de temps pendant lequel les raies font une oscillation complète, en revenant à leurs positions initiales, c'est la période P de révolution des étoiles du couple, 2^0, les instants t et t' des écartements extrêmes; 3^0, les instants t_0 et t'_0 de deux réunions successives des lignes dédoublées. En regardant une des lignes (appartenant à l'étoile principale) comme immobile, l'instant t marque l'écartement de l'autre ligne (du satellite) vers le côté rouge du spectre, l'instant t' celui vers le violet, le moment t_0 indique la réunion des raies pendant le mouvement de cette ligne vers le violet, le moment t'_0 celle pendant son retour vers le rouge. Aux déviations extrêmes de la ligne correspondent les valeurs extrêmes de la vitesse radiale du satellite. Quand les raies se réunissent, la vitesse radiale du mouvement orbital devient égale au zéro. Il suit de la relation

$$w = \frac{2\pi}{P} \frac{a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} (e \cos \omega + \cos u) \tag{1^0}$$

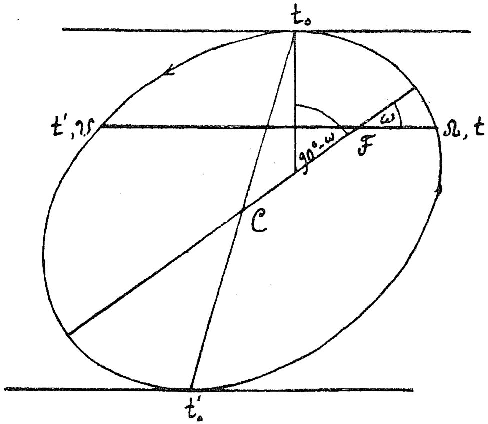
exprimant la vitesse radiale du satellite que cette vitesse prend des valeurs extrêmes quand l'angle u, formé par le rayon vecteur du satellite avec la direction positive de la ligne des noeuds, est 0^0 et 180^0, c'est-à-dire, quand le compagnon passe aux noeuds de l'orbite. Elle est égale au zéro, quand le satellite se meut parallélement à la ligne des noeuds. Par conséquent, aux instants t et t' le compagnon occupe les noeuds ascendant et descendant de l'orbite aux bouts de la corde focale; aux instants t_0 et t'_0 il passe aux points de l'orbite le plus éloigné et le plus rapproché de la terre, dont les tangentes sont parallèles à la ligne des noeuds et qui se trouvent aux bouts d'un diamètre de l'ellipse.

La figure ci-jointe répresente une orbite elliptique du satellite par rapport à l'etoile principale F, avec ligne des noeuds et les positions nommées du compagnon aux moments t, t', t_0, t'_0. En ayant ces quatre moments et la période P de révolution, on peut déterminer les éléments e, ω, T de l'orbite. Pour calculer l'élément $a \sin i$, il faut avoir encore au moins une vitesse radiale w à un instant quelconque t. Soient E et E' les anomalies excentriques du satellite aux instants t et t', c'est-à-dire, aux noeuds ascendant et descendant de l'orbite. Les anomalies vraies de ces positions sont

$$v = 360^0 - \omega \qquad \text{et} \qquad v' = v + 180^0 = 180^0 - \omega$$

Des relations connues

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \qquad \operatorname{tg} \frac{E'}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$



on déduit facilement

$$\operatorname{tg} \frac{E+E'}{2} = \operatorname{ctg} \omega \sqrt{1-e^2} \qquad \text{et} \qquad e \cos \frac{E+E'}{2} = \cos \frac{E'-E}{2}$$

ou autrement

$$\operatorname{tg} G = \operatorname{ctg} \omega \sqrt{1-e^2} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad e \cos G = \cos g \quad (2)$$

si l'on met

$$G = \frac{E+E'}{2} \qquad \text{et} \qquad g = \frac{E'-E}{2}$$

La normale à l'ellipse au point t_0, où le mouvement du compagnon est parallèle à la ligne des noeuds, forme avec le grand axe l'angle $\varphi = 90^0 - \omega$. Entre cet angle et l'anomalie excentrique E_0 a lieu la relation connue [1])

$$\operatorname{tg} E_0 = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-e^2} = \operatorname{ctg} \omega \sqrt{1-e^2}.$$

identique à celle (1).

[1]) $\operatorname{tg} \sphericalangle t_0 C F = \frac{b}{a} \operatorname{tg} E_0 = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$

d'où $\operatorname{tg} E_0 = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$

Par conséquent

$$E_0 = G = \frac{E + E'}{2},$$

l'anomalie excentrique du point de l'orbite, où le mouvement du compagnon est parallèle à ia ligne des noeuds, est égale à la demi-somme des anomalies excentriques des noeuds. (En général, l'anomalie excentrique d'un point quelconque de l'ellipse est égale à la demi-somme des anomalies excentriques des bouts de la corde focale parallèle à la tangente au point pris).

Or, les anomalies excentriques du satellite aux instants t_0 et t'_0 sont:

$$G \quad \text{et} \quad G' = G + 180^0 = G + \pi$$

Prenons des équations de Képler pour ces moments

$$G - e \sin G = \mu (t_0 - T) \tag{3}$$

$$\pi + G + e \sin G = \mu (t'_0 - T) \tag{4}$$

dans lesquelles

$$\mu = \frac{2\pi}{P}$$

En retranchant (3) de (4), on a

$$\pi + 2 e \sin G = \mu (t'_0 - t_0)$$

d'où

$$e \sin G = \frac{\pi}{P} (t'_0 - t_0 - 0{,}5\, P) \tag{5}$$

Les équations (5) et (2) permetront de calculer e et G:

$$e^2 = \frac{\pi^2}{P^2} (t'_0 - t_0 - 0{,}5\, P)^2 + \cos^2 g \tag{6}$$

$$\operatorname{tg} G = \frac{\pi}{P} (t'_0 - t_0 - 0{,}5\, P) \sec g\,, \tag{7}$$

si l'angle g est déterminé auparavant de l'équation

$$2\, g - \sin 2\, g = \mu (t' - t) \tag{8}$$

que l'on obtient par soustraction des équations de Képler, écrites pour les noeuds de l'orbite.

L'époque T du passage au périastre peut être obtenue de deux manières:

1°, par addition des équations de Képler pour les instants t et t',

2°, par addition des équations (3) et (4) pour les moments t_0 et t'_0.

La somme 1° donne

$$T = \frac{t + t'}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{\mu}, \tag{9}$$

celle 2°

$$\pi + 2\, G = \mu (t_0 + t'_0 - 2\, T),$$

d'où

$$T = \frac{t_0 + t'_0}{2} - \frac{G + 0{,}5\, \pi}{\mu} \tag{10}$$

Il suit des formules (9) et (10) que

$$\frac{t + t'}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{\mu} = \frac{t_0 + t'_0}{\mu} - \frac{G + 0{,}5\, \pi}{\mu}$$

d'où

$$e^2 \sin G \cos G = \frac{\pi}{P} (t_0 - t + t'_0 - t' - 0{,}5\, P)$$

et, en tenant compte de la relation (5) et (2)

$$e \cos G = \cos g = \frac{t_0 - t + t'_0 - t' - 0{,}5\, P}{t'_0 - t_0 - 0{,}5\, P} \tag{11}$$

La dernière formule exprime $e \cos G$ en fonction simple des temps donnés et, liée avec celle (5), permet de calculer immédiatement l'excentricité e et l'anomalie G, en rendant superflue l'équation transcendante (8).

Il suit des équations (8) et (11) que la connaissance de la période P n'est pas indispensable pour la détermination des éléments de l'orbite, parce que, si les instants t_0, t'_0, t, t' sont donnés, ces équations

$$\cos g = \frac{t_0 - t + t'_0 - t' - 0{,}5\, P}{t'_0 - t_0 - 0{,}5\, P}$$

$$2\, g - \sin 2\, g = \frac{360^0}{P} (t' - t)$$

permettent de calculer P et g.

Après avoir déterminé e et G, on calcule l'élément ω à l'aide de la relation (1), d'où on a

$$\operatorname{tg} \omega = G \operatorname{ctg} \sqrt{1-e^2},$$

$\cos \omega$ ayant le signe de $\sin G$.

Récapitulation des formules.

Données.

P, période,

t, t', instants des déviations extrêmes des raies dédoublées,

t_0, t'_0, instants des réunions des raies.

1) *Calcul de l'excentricité et de l'anomalie G.*

a) à l'aide des équations

$$2g - \sin 2g = \mu\,(t'-t)$$

$$e \sin G = \frac{\pi}{P}(t'_0 - t_0 - 0{,}5\,P)$$

$$e \cos G = \cos g$$

b) ou à l'aide des relations

$$e \sin G = \frac{\pi}{P}(t_0' - t_0 - 0{,}5\,P)$$

$$e \cos G = \frac{t_0 - t + t'_0 - t' - 0.5\,P}{t_0' - t_0 - 0{,}5\,P}$$

2) *Calcul de l'époque T.*

a) $T = \dfrac{t+t'}{2} - \dfrac{G - e^2 \sin G \cos G}{\mu}$

b) $T = \dfrac{t_0 + t'_0}{2} - \dfrac{G + 90^0}{\mu}$

$$\left(\mu = \frac{360^0}{P}\right)$$

3) *Calcul de la distance angulaire du périastreu a noeud ascendant.*

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{ctg} G \sqrt{1-e^2},$$

$\cos \omega$ ayant le signe de $\sin G$.

Afin de calculer le dernier élément $a \sin i$, il faut avoir la valeur au moins de une vitesse radiale du compagnon, par exemple celle au

noeud ascendant (A) ou au noeud descendant ($-B$). Pour ces points la relation (1^0) donne

$$A = \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}(1 + e\cos\omega)$$

$$B = \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}(1 - e\cos\omega)$$

d'où on obtient $a \sin i$.

Parce que la détermination précise des instants t et t' du passage du satellite aux noeuds, où la vitesse radiale change le plus lentement, est dans la pratique moins sûre que celle des vitesses A et B à ces points, il vaut mieux calculer e, G et T à l'aide des formules

$$e \sin G = \frac{\pi}{P}(t'_0 - t_0 - 0{,}5\,P)$$

$$\sin g = e \sin G \cdot \frac{A+B}{A-B}\ ^{1)}$$

$$e \cos G = \cos g$$

$$T = \frac{t_0 + t'_0}{2} - \frac{G + 90^0}{\mu}$$

en tenant compte de cela que

$$0^0 < g < 90^0, \quad \text{quand} \quad t' - t < 0{,}5\,P,$$

$$90^0 < g < 180^0, \quad \text{quand} \quad t' - t > 0{,}5\,P,$$

La vitesse radiale du centre de gravité du couple est déterminée par le déplacement de la raie unie par rapport à sa position dans le spectre d'une source terrestre.

STRESZCZENIE.

Wyznaczenie toru podwójnej gwiazdy spektroskopowej o widmie z prążkami rozdwojonymi, z czasów rozsunięć skrajnych i zlania się prążek.

Dane: 1^0) okres całkowitego wahnięcia się prażki od jednego skrajnego położenia do drugiego i z powrotem, czyli period P obiegu towarzysza: 2^0) chwile t i t' osiągnięcia przez prążkę położeń krańcowych po

---

1) V. „Détermination des orbites des etoiles doubles spectroscopiques". Prace matematyczno-fizyczne, t. XLV p. 188.

tronie czerwieni i fioletu, czyli czasy przejścia towarzysza przez węzły wstępujący i zstępujący orbity (patrz figurę na str. 29); 3°) chwile t_0 i t_0' zlania się prążki towarzysza z prążką gwiazdy głównej przy przesuwaniu się jej od czerwieni do fioletu i z powrotem od fioletu ku czerwieni, czyli czasy przejścia towarzysza przez najdalszy i najbliższy od ziemi punkty drogi, w których kierunek jego ruchu jest równoległy do linii węzłów i prostopadły od promienia widzenia.

Wychodząc ze znanego związku między anomalią ekscentryczną i prawdziwą

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\operatorname{tg}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

i uwzględniając, że anomalie prawdziwe węzłów są

$$v=360^0-\omega \qquad \text{i} \qquad v'=v+180^0=180^0-\omega\,,$$

otrzymujemy łatwo, że

$$\operatorname{tg}\frac{E+E^1}{2}=\operatorname{ctg}\omega\sqrt{1-e^2}\ (1), \qquad e\cos\frac{E+E'}{2}=\cos\frac{E'-E}{2}\ (2)$$

albo inaczej

$$\operatorname{tg}G=\operatorname{ctg}\omega\sqrt{1-e^2}\ \ (1'), \qquad e\cos G=\cos g\ \ (2')$$

Ponieważ dla anomalii ekscentrycznej punktu t_0 (p. str. 29) istnieje związek

$$\operatorname{tg}E_0=\operatorname{ctg}\omega\sqrt{1-e^2}, \tag{3}$$

więc z (1) i (3) wynika, że

$$E_0=G=\frac{E+E'}{2}, \tag{4}$$

t. j. *anomalia ekscentryczna punktu* t_0 *równa się połowie sumy anomalii ekscentrycznych węzłów*. Przez odjęcie równań Keplera dla węzłów otrzymujemy równanie

$$2g-\sin 2g=\frac{2\pi}{P}(t'-t) \tag{5}$$

w którym $\qquad g=\dfrac{E'-E}{2}.$

Odejmując równania Keplera dla punktów t_0 i t'_0, mamy

$$e\sin G=\frac{\pi}{P}(t_0'-t_0-5{,}0\,P) \tag{6}$$

Obliczywszy z (5) kąt g, możemy z równań (6) i (2') znaleźć mimośród e i anomalię G. Epokę T przejścia towarzysza przez periaster możemy znaleźć przez dodanie równań Keplera dla chwil t i t' albo dla chwil t_0 i t'_0. Pierwsza suma daje

$$T=\frac{t+t'}{2}-\frac{G-e^2\sin G\cos G}{\mu}, \tag{7}$$

druga

$$T=\frac{t_0+t'_0}{2}-\frac{G+90^0}{\mu}, \qquad \left(\mu=\frac{360^0}{P}\right). \tag{8}$$

Z zestawienia wzorów (7) i (8) wynika, że

$$e^2\sin G\cos G=\frac{\pi}{P}(t_0-t+t_0'-t'-0{,}5\,P) \tag{9}$$

a po uwzględnieniu wzoru (6)

$$e\cos G=\cos g=\frac{t_0-t+t'_0-t'-9{,}5\,P}{t'_0-t_0-0{,}5\,P} \tag{10}$$

związki (6) i (10) pozwalają bezpośrednio, bez równania (5), obliczyć e i G. Mając zaś te wielkości, ze wzoru (2'), który daje

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{ctg}G\sqrt{1-e^2}, \tag{11}$$

obliczamy odległość kątową ω periastru od węzła wstępującego.

Aby wyznaczyć element $a\sin i$, konieczna jest znajomość przynajmniej jednej prędkości promieniowej w towarzysza w dowolnej chwili t. Znając elementy e, T, P, obliczamy anomalię prawdziwą v dla chwili t i potem ze wzoru na prędkość promieniową

$$w=\frac{2\pi a\sin i}{P\sqrt{1-e^2}}\Big[e\cos\omega+\cos(\omega+v)\Big] \tag{12}$$

znajdujemy $a\sin i$.