il s'agit des valeurs pour les $t < t_0$. On a notamment $v \equiv \bar{v}$ pour $t \geqslant \bar{t}_0$. Il y a parmi ces courbes intégrales une qui est la droite $v = \bar{v}$ et les autres se composent d'un rayon parallèle à l'axe t pour $t \geqslant t_1$, où $t_1 \geqslant t_0$ d'ailleurs quelconque, et d'une partie croissante (de $-\infty$] ou décroissante (de $+\infty$) conformément au fait que I_2 respectivement I_1 possède une valeur finie.

Dans le cas II, 1 par chaque point $(t_0, \bar{v})$ passe une et une seule courbe intégrale de l'équation (10), valable pour tous les t. Cette courbe intégrale se réduit à la droite $v = \bar{v}$, parallèle à l'axe des t.

T. Rakowiecki.

Détermination de l'orbite du compagnon de l'étoile double visuelle à l'aide des temps et des angles de position.

(Wyznaczenie toru towarzysza teleskopowej gwiazdy podwójnej z czasów i kątów pozycyjnych).

Bien entendu, si, pour un système binaire d'étoiles, sont donnés les seuls instants du passage du satellite aux certains angles de position, alors on ne peut parler que de la détermination de la période P, de l'époque du passage au périastre T et des éléments angulaires de l'orbite e, ω, i et Ω qui définissent la forme de l'ellipse et sa position par rapport au plan tangent à la sphère céleste au point de l'étoile principale. Afin de déterminer le demi-grand axe de l'orbite, la connaissance au moins de une distance du compagnon à l'astre principal est indispensable.

Théoriquement il suffit d'avoir six angles de position quelconques θ, avec leurs instants t, pour calculer les six éléments de l'orbite cités ci-dessus. En effet, nous pouvons écrire alors les six équations de Képler

$$E - e \sin E = \frac{360^0}{P}(t - T),$$

les six de la forme

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\frac{E}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

et les six

$$\cos i = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \Omega)}{\operatorname{tg}(v + \omega)},$$

en somme dix huit équations qui renferment autant d'inconnues: les six anomalies excentriques E, les six anomalies vraies v et les six éléments cherchés P, T, e, ω, i et Ω. Mais le problème ainsi posé se montre inextricable, à cause d'insurmontables difficultés que présente la résolution de ces dix huit équations. Pourtant ces difficultés disparaitront et le problème deviendra non seulement résoluble, mais simple, et le procédé même bien pratique, si, au lieu des positions quelconques du satellite, nous prenons les positions particulières, choisies convenablement, et si nous excluons, en la supposant connue, la période P du nombre des éléments à calculer, en le réduisant à cinq. La dernière condition n'est admissible que si la révolution complète du compagnon a été perçue, permettant de déterminer la période directement de l'observation.

Dans la méthode que nous allons développer ici, nous partageons le problème en deux parties:

1^0, la détermination de l'excentricité e de l'orbite et de l'époque T du passage au périastre,

2^0, la détermination des éléments ω, i, Ω lesquels définissent la position de l'orbite.

A. Détermination de l'excentricité et de l'époque du passage au périastre.

Pour calculer ces éléments il faut et il suffit de prendre des temps de deux paires de positions opposées du compagnon.

Soient donnés

$$P \qquad t_1, t_1' \qquad t_2, t_2' \qquad (t_1 < t_2 < t'_1)$$

c'est-à-dire, la période P et les instants t_1, t_1' et t_2, t_2' des positions du satellite aux bouts de deux cordes principales de l'ellipse apparente, t_2 étant plus avancé que t_1.

Pour les positions opposées de l'astre sur la voie elliptique il existe des relations

$$2g - \sin 2g = \mu(t' - t)$$

$$e \operatorname{sos} G = \cos g\text{*})$$

$\mu = \dfrac{360^0}{P}$ étant le mouvement moyen du compagnon, $g = \dfrac{E' - E}{2}$ la demi-différence, $G = \dfrac{E' + E}{2}$ la demi-somme des anomalies excentriques des positions opposées. Ces deux équations appliquées aux deux paires de positions opposées, jointes à quatre équations de Képler écrites pour ces positions, serviront à trouver les éléments e et T.

*) V. *Deux méthodes pour la détermination de l'orbite du satellite de l'étoile double visuelle à l'aide des positions opposées.* Wiadomości Matematyczne T. XLII, 1936,

D'abord, à l'aide des équations

$$\begin{aligned} 2g_1 - \sin 2g_1 &= \mu(t_1' - t_1) \\ 2g_2 - \sin 2g_2 &= \mu(t_2' - t_2) \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

que l'on peut remplacer par celles

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1 &= \mu(t_1' - t_1 - 0{,}5\,P); \qquad g_1 = 90^0 + \alpha_1 \\ 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2 &= \mu(t_2' - t_2 - 0{,}5\,P); \qquad g_2 = 90^0 + \alpha_2 \end{aligned} \qquad \text{(I')}$$

plus commodes pour le calcul, nous trouvons les angles g_1 et g_2. Puis nous prenons les équations

$$e \cos G_1 = \cos g_1 \qquad (1)$$

$$e \cos G_2 = \cos g_2 \qquad (2)$$

pour les mêmes deux cordes focales et celles de Képler

$$E_1 - e \sin E_1, = \mu(t_1 - T) \qquad (3)$$

$$E_1' - e \sin E_1' = \mu(t_1' - T) \qquad (4)$$

$$E_2 - e \sin E_2 = \mu(t_2 - T) \qquad (5)$$

$$E_2' - e \sin E_2' = \mu(t_2' - T) \qquad (6)$$

pour les mêmes quatre positions.

En additionaant (3) et (4) et puis (5) et (6), on a

$$E_1 + E_1' - 2e \sin \frac{E_1 + E_1'}{2} \cos \frac{E_1' - E_1}{2} = \mu(t_1 + t' - 2T)$$

$$E_2 + E_2' - 2e \sin \frac{E_2 + E_2'}{2} \cos \frac{E_2' - E_2}{2} = \mu(t_2 + t_2' - 2T)$$

ou, en introduisant les désignations acceptées et en tenant compte des relations (1) et (2),

$$2\,G_1 - e^2 \sin 2\,G_1 = \mu\,(t_1 + t_1' - 2\,T) \tag{7}$$

$$2\,G_2 - e^2 \sin 2\,G_2 = \mu\,(t_2 + t_2' - 2\,T) \tag{8}$$

En retranchant maintenant (7) de (8), on obtient

$$2\,(G_2 - G_1) - 2\,e^2 \sin (G_2 - G_1) \cos (G_1 + G_2) = \mu\,(t_2 + t_2' - t_1 - t_1')$$

ou, en mettant

$$G_2 - G_1 = 2\,x$$

$$G_1 + G_2 = 2\,y,$$

$$4\,x - 2\,e^2 \sin 2\,x \cos 2\,y = \mu\,(t_2 + t_2' - t_1 - t_1') \tag{9}$$

ou autrement

$$x - e^2 \sin x \cos x\,(\cos^2 y - \sin^2 y) = \frac{\mu}{4}(t_2 + t_2' - t_1 - t_1') \tag{10}$$

Retranchons et ajoutons les équations (1) et (2):

$$e \sin \frac{G_2 - G_1}{2} \sin \frac{G_1 + G_2}{2} = \frac{1}{2}(\cos g_1 - \cos g_2) = \sigma$$

$$e \cos \frac{G_2 - G_1}{2} \cos \frac{G_1 + G_2}{2} = \frac{1}{2}(\cos g_1 + \cos g_2) = \varkappa$$

ou

$$e \sin x \sin y = \sigma \tag{11}$$

$$e \cos x \cos y = \varkappa \tag{12}$$

D'où

$$\sin y = \frac{\sigma}{e \sin x} \tag{11'}$$

$$\cos y = \frac{\varkappa}{e \cos x} \tag{12'}$$

En substituant (11') en (12') dans l'équation (10), on a

$$x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x = \frac{\mu}{4}(t_2 + t_2' - t_1 - t_1') \tag{13}$$

l'équation qui ne contient qu' une seule inconnue x.

Finalement on a obtenu trois équations

$$\left.\begin{aligned} x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x &= \tau \\ e \sin x \ \sin y &= \sigma \\ e \cos x \ \cos y &= \varkappa \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}(\cos g_1 - \cos g_2) = \sin \frac{g_2 - g_1}{2} \sin \frac{g_1 + g_2}{2} \\ \varkappa &= \frac{1}{2}(\cos g_1 + \cos g_2) = \cos \frac{g_2 - g_1}{2} \cos \frac{g_1 + g_2}{2} \\ \tau &= \frac{1}{4}(t_2 + t_2' - t_1 - t_1') \end{aligned}\right\} \tag{II'}$$

et qui permettent de calculer les inconnues $x = \dfrac{G_2 - G_1}{2}$, $y = \dfrac{G_1 + G_2}{2}$ et l'excentricité e de l'orbite.

Discussion de l'équation: $x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x = \tau$ (x).
Remarquons d'abord que si $t_2 > t_1$, le terme connu τ est positif:

$$\tau = 90^0 \times \frac{t_2 - t_1 + t_2' - t_1'}{P} > 0$$

et si l'on prend les positions t_1 et t_2 non pas trop éloignées l'une de l'autre, de sorte que $t_2 - t_1 < \frac{1}{2}P$ et $t_2' - t_1' < \frac{1}{2}P$,

alors $\tau < 90^0.$

Donc le premier membre de l'équation (x) est contenu entre les limites 0^0 et 90^0.
Pareillement l'angle inconnu

$$x = \frac{G_2 - G_1}{2} = \frac{E_2 - E_1 + E_2' - E_1'}{4}$$

se place dans les mêmes bornes, si les positions t_1 et t_2 ne sont pas trop écartées.

Puis, il résulte de l'équation (x) que

$$1^0,\ \text{si}\ \sigma^2 \operatorname{ctg}\tau - \varkappa^2 \operatorname{tg}\tau = 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\tau = \left[\frac{\sigma}{\varkappa}\right], \ \text{alors}\ x = \tau;$$

$$2^0,\ \text{si}\ \sigma^2 \operatorname{ctg}\tau - \varkappa^2 \operatorname{tg}\tau < 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\tau > \left[\frac{\sigma}{\varkappa}\right], \qquad x > \tau;$$

$$3^0,\ \text{si}\ \sigma_2 \operatorname{ctg}\tau - \varkappa^2 \operatorname{tg}\tau > 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\tau < \left[\frac{\sigma}{\varkappa}\right], \qquad x < \tau,$$

Trouvons maintenant combien de racines a l'équation

$$f(x) = x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x - \tau = 0.$$

L'équation dérivée est

$$f'(x) = 1 - \sigma^2 \operatorname{cosec}^2 x - \varkappa^2 \sec^2 x = 0$$

ou

$$\sin^4 x - (1 + \sigma^2 - \varkappa^2) \sin^2 x + \sigma^2 = 0.$$

Elle a quatre racines

$$\sin^2 x = \frac{1 + \sigma^2 - \varkappa^2 \mp \sqrt{(1 + \sigma^2 - \varkappa^2)^2 - 4\sigma^2}}{2}$$

En substituant dans la dernière expression les valeur (II′) de σ et de $\varkappa$, on obient après la réduction

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos(g_2 \mp g_1)}{2}.$$

Il en suit que

$$\cos 2x = \cos(g_2 \mp g_1)$$

donc

$$x = \mp \frac{g_2 \pm g_1}{2} \tag{17}$$

De la sorte, l'équation dérivée a quatre racines, dont deux négatives et deux positives. Ce sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction $f(x)$ prend les valeurs critiques, ses minima et ses maxima. Il y en a quatre: deux pour les valeurs négatives et deux pour les valeurs positives de la variable x.

Quand x augmente de -90^0 à 0^0, la fonction $f(x)$ change de $+\infty$ à $-\infty$, en passant par un minimum quand $x = -\dfrac{g_2 + g_1}{2}$ et par un maximum, quand $x = -\left[\dfrac{g_2 - g_1}{2}\right]$*).

Quand x augmente de 0^0 à 90^0, la fonction $f(x)$ change aussi de $+\infty$ à $-\infty$, en passant par un minimum quand $x = +\left[\dfrac{g_2 - g_1}{2}\right]$, et par un maximum quand $x = +\dfrac{g_2 + g_1}{2}$.

En mettant dans $f(x)$ les quatre valeurs (17) de x, on obtient les valeurs critiques de la fonction

$$F(x) = \mp \left\{ \frac{g_2 \pm g_1}{2} + \sin^2 \frac{g_2 - g_1}{2} \sin^2 \frac{g_2 + g_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{g_2 \pm g_1}{2} - \right.$$

$$\left. - \cos^2 \frac{g_2 - g_1}{2} \cos^2 \frac{g_2 + g_1}{2} \operatorname{tg} \frac{g_2 \pm g_1}{2} \right\} - \tau$$

ou après la réduction

$$F(x) = \mp \frac{1}{4} \{ (2g_2 - \sin 2g_2) \pm (2g_1 - \sin 2g_1) \} - \tau$$

ou, en tenant compte encore des équations (I),

$$F(x) = \mp \frac{\mu}{4} [(t_2' - t_2) \pm (t_1' - t_1)] - \tau$$

En y mettant la valeur de τ

$$\tau = \frac{\mu}{4} [(t_2' + t_2) - (t_1' + t_1)],$$

on a finalement pour les points critiques de la fonction $f(x)$ les valeurs suivantes:

1) pour le point $x = -\dfrac{g_2 + g_2}{2}$

le minimum $F(x) = -\dfrac{\mu}{2}(t_2' - t_1) < 0;$

*) Les crochets renferment des valeurs absolues.

2 et 3) pour les points $x = \mp \left[\frac{g_2 - g_1}{2}\right]$

le maximum et le minimum

$$F(x) = -\frac{\mu}{2}(t_2' - t_1') < 0;$$

ou

$$F(x) = -\frac{\mu}{2}(t_2 - t_1) < 0;$$

4) pour le point $x = +\frac{g_2 + g_1}{2}$

le maximum $F(x) = \frac{\mu}{2}(t_1' - t_2) > 0.$

Comme nous voyons, parmi les quatre points critiques de la fonction $f(x)$, le seul dernier maximum est positif.

Il suit de la discussion précédente que l'équation

$$x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x = \tau$$

a quatre racines réelles: une négative entre -90^0 et $-\frac{g_2 + g_1}{2}$, et trois positives

1^0, $$0 < x < + \left[\frac{g_2 - g_1}{2}\right]$$

2^0, $$+ \left[\frac{g_2 - g_1}{2}\right] < x < \frac{g_2 + g_1}{2}$$

3^0, $$\frac{g_2 + g_1}{2} < x < 90^0.$$

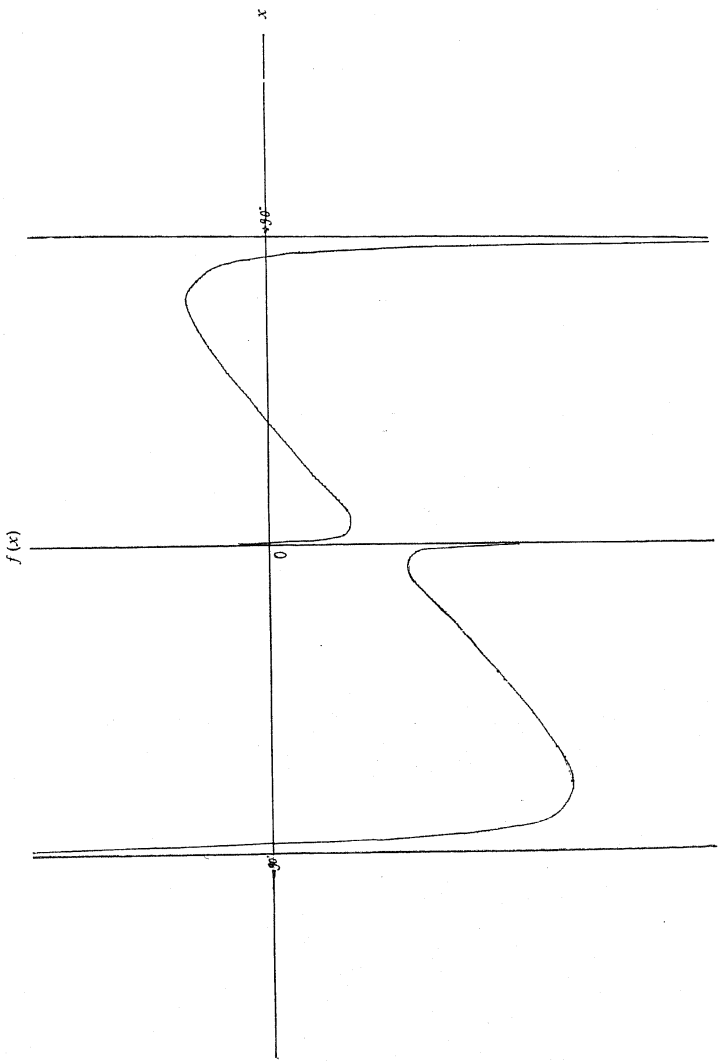
La racine négative doit être rejetée. Quelle des racines positives convient au problème? Celle qui donne pour l'excentricité une valeur $e < 1$.

Des équations (11′) et (12′) nous tirons

$$e^2 = \sigma^2 \operatorname{cosec}^2 x + \varkappa^2 \sec^2 x < 1$$

Il en suit que la racine doit satisfaire à l'inégalité

$$1 - \sigma^2 \operatorname{cosec}^2 x - \varkappa^2 \sec^2 x > 0.$$



Voici une courbe représentant la fonction $f(x) = x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x - \tau$, quand x change de -90^0 à $+90^0$.

Mais le premier membre de cette inégalité c'est la dérivée de la fonction $f(x)$. Donc la racine convenable doit se trouver là, où la fonction s'accroît, c'est-à-dire, entre le minimum et le maximum; et c'est la racine positive 2^0 qui la seule convient à cette condition.

Le calcul de la racine x s'accomplit par un des procédés de résolution des équations numériques. Avant tout, il faut exprimer tous les termes de l'équation en degrés, et dans ce but multiplier les coefficients σ^2 et $\varkappa^2$ par 57,2958, ou ajouter aux logarithmes de σ^2 et de $\varkappa^2$ le nombre 1,75812.

Parce que la valeur de la racine en général ne diffère que peu du terme connu τ, on trouve facilement ses premières approximations: l'une plus grande, l'autre plus petite que la racine, en mettant $x' = \tau + \varkappa^2 \operatorname{tg} \tau$ et $x'' = \tau + \varkappa^2 \operatorname{tg} \tau - \sigma^2 \operatorname{ctg} \tau$.

Ensuite, par interpolation on calcule la valeur exacte. Pour cela on peut se servir aussi de la relation

$$dx = \frac{d\tau}{1 - \sigma^2 \operatorname{cosec}^2 x - \varkappa^2 \sec^2 x}, \qquad (dx > d\tau)$$

si dx est assez petit pour que son carré puisse être négligé.

En ayant x, les équations

$$e \sin x \sin y = \sigma$$

$$e \operatorname{sos} x \cos y = k$$

permettent sans ambiguité de déterminer l'angle y et l'excentricité e.

Détermination de l'époque du passage au périastre.

Retournons aux équations (7) et (8) de le page 4. En les additionnant on a après la reduction

$$4y - 2e^2 \sin 2y \cos 2x = \mu (t_1 + t_1' + t_2 + t_2' - 4T) \tag{15}$$

Le produit des équations (11) et (12) donne

$$\frac{1}{4} e^2 \sin 2x \sin 2y = \sigma \varkappa$$

d'où

$$2e^2 \sin 2y = \frac{8\sigma\varkappa}{\sin 2x}.$$

En substituant la dernière relation dans l'équation (15), on en obtient

$$T = \frac{t_1 + t_1' + t_2 + t_2'}{4} - \frac{y - 2\sigma\varkappa \operatorname{ctg} 2x}{\mu} \tag{16}$$

l'expression pour l'époque du passage du satellite au périastre.

Remarquons que l'équation (15) donne aussi

$$T = \frac{t_1 + t_1' + t_2 + t_2'}{4} - \frac{y + \sigma^2 \operatorname{ctg} y - \varkappa^2 \operatorname{tg} y}{\mu} \tag{16'}$$

Récapitulons les équations et les formules à l'aide desquelles on peut calculer les éléments e et T de l'orbite, en ayant la période P et les instants t_1, t_1' et t_2, t_2' des deux paires de positions opposées du satellite:

$$\mu = \frac{360^0}{P},$$

$$2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1 = \mu (t_1' - t_1 - 0{,}5\,P)\ ^{*)}$$

$$g_1 = 90^0 + \alpha_1$$

$$2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2 = \mu (t_2' - t_2 - 0{,}5\,P)$$

$$g_2 = 90^0 + \alpha_2$$

$$\sigma = \sin \frac{g_2 - g_1}{2} \sin \frac{g_2 + g_1}{2} = \frac{\cos g_1 - \cos g_2}{2}$$

$$\varkappa = \cos \frac{g_2 - g_1}{2} \cos \frac{g_2 + g_1}{2} = \frac{\cos g_1 + \cos g_2}{2}$$

$$\tau = \frac{\mu}{4} (t_2 - t_1 + t_2' - t_1')$$

$$x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x = \tau$$

$$e \sin x \sin y = \sigma$$

$$e \cos x \cos y = \varkappa$$

$$T = \frac{t_1 + t_2 + t_1' + t_2'}{4} - \frac{y - 2\sigma\varkappa \operatorname{ctg} 2x}{\mu}.$$

*) V. mon article „Détermination des orbites des étoiles doubles spectroscopiques d'après les positions opposées", *Prace Matematyczno-Fizyczne*, T. XLV. où se trouve une table pour le calcul de 2α.

B. Détermination des éléments géométriques de l'orbite.

Il reste à déterminer les éléments qui définissent la position de l'orbite.

En ayant la période P, l'époque T et l'excentricité de l'orbite e, on peut calculer l'anomalie vraie v du satellite pour chaque instant t, à l'aide des équations ordinaires

$$E - e \sin E = \mu (t - T)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{tg} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad (v)$$

Pour les positions opposées qui nous ont servi à calculer les éléments e et T, on peut trouver E à l'aide des résultats du calcul précédent, sans l'équation de Képler.

1⁰. On a, en effet,

$$\frac{G_2 + G_1}{2} = y \qquad \text{donc} \quad G_2 = \frac{E_2' + E_2}{2} = y + x$$

$$\frac{G_2 - G_1}{2} = x \qquad\qquad G_2 = \frac{E_1' + E_1}{2} = y - x$$

mais aussi

$$\frac{E_2' - E_2}{2} = g_2$$

$$\frac{E_1' - E_1}{2} = g_1$$

par suite

$$E_2 = y + x - g_2 \qquad E_2' = y + x + g_2$$

$$E_1 = y - x - g_1 \qquad E_1' = y - x + g_1$$

La formule (v) donnera les valeurs des anomalies vraies.

2⁰. On peut aussi calculer v_1 et v_2 immédiatement par la formule

$$\sin v = - \operatorname{ctg} g \frac{\sqrt{1-e}}{e} \text{*)}$$

valable pour les cordes focales de l'orbite.

*) V. Deux méthodes pour la détermination de l'orbite du satellite de l'étoile double visuelle... *Wiadomości Matematyczne* T. XLII, 1936.

Parce que $\cos v = \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho}$ *) (ρ étant la distance du satellite à l'étoile principale et ρ' celle de la position opposée), $\cos v > 0$, quand $\rho' > \rho$; et $\cos v < 0$, quand $\rho' < \rho$.

I. Il suffit d'avoir trois angles quelconques de position θ_1, θ_2, θ_3 sur l'ellipse apparente et les anomalies vraies correspondantes v_1, v_2, v_3 sur l'ellipse réelle pour calculer les élément Ω, ω et i qui déterminent la position de l'orbite réelle par rapport au plan perpendiculaire à la ligne de visée, fixée sur l'étoile principale. On fait ce calcul à l'aide des formules (V. *Wiadomości Matematyczne*, T. XLII, p. 109—110)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\omega + \Omega) &= - \frac{\cos(\theta_1 - v_2) - k \cos(\theta_2 - v_1)}{\sin(\theta_1 - v_2) - k \sin(\theta_2 - v_1)} \\ \operatorname{tg}(\omega - \Omega) &= \frac{\cos(\theta_1 + v_2) - k \cos(\theta_2 + v_1)}{\sin(\theta_1 + v_2) - k \sin(\theta_2 + v_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\omega &= - \frac{k^2 \sin 2v_1 + \sin 2v_2 - 2k \sin(v_1 + v_2) \cos(\theta_2 - \theta_1)}{k^2 \cos 2v_1 + \cos 2v_2 - 2k \cos(v_1 + v_2) \cos(\theta_2 - \theta_1)} \\ \operatorname{tg} 2\Omega &= \frac{k^2 \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1 - 2k \sin(\theta_2 + \theta_1) \cos(v_2 - v_1)}{k^2 \cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_1 - 2k \cos(\theta_2 + \theta_1) \cos(v_2 - v_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (17')$$

dans lesquelles

$$k = \frac{\rho_2}{r_2} \cdot \frac{r_1}{\rho_1} = \frac{\sin(v_3 - v_2)}{\sin(v_3 - v_1)} \cdot \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \qquad (18)$$

comme cela suit des équations

$$\left.\begin{aligned} \rho_2 \rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) &= r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2) \cos i \\ \rho_1 \rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) &= r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1) \cos i \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Quand $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$ et $\theta_3 - \theta_1 = \theta_2 - \theta_3$, alors

$$k = \frac{\sin(v_2 - v_3)}{\sin(v_3 - v_1)} \qquad (18')$$

II. On obtient aussi de simples formules pour le calcul des éléments Ω, ω, i, si, au lieu des positions quelconques, on emploie les positions convenablement choisies, en particulier, si l'on prend *deux paires de* *telles positions du satellite que les angles de position de chaque paire diffèrent l'un de l'autre de 90⁰.*

Soient

$$\begin{array}{ll} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1 + 90^0 & \theta_2 + 90^0 \end{array}$$

deux paires d'angles de position du satellite différant de 90^0,

et

$$\begin{array}{ll} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{array}$$

les anormalies vraies de ces positions.

Alors

$$\cos i = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \Omega)}{\operatorname{tg}(v + \omega)} = -\frac{\operatorname{ctg}(\theta - \Omega)}{\operatorname{tg}(v' + \omega)} \tag{20}$$

d'où

$$\cos^2 i = -\operatorname{ctg}(v + \omega)\operatorname{ctg}(v' + \omega) \tag{21}$$

$$\operatorname{tg}^2(\theta - \Omega) = -\frac{\operatorname{tg}(v + \omega)}{\operatorname{tg}(v' + \omega)} \tag{22}$$

$\cos i$ étant une quantité constante, il suit de la relation (21) l'équation

$$\operatorname{ctg}(v_1 + \omega)\operatorname{ctg}(v_1' + \omega) = \operatorname{ctg}(v_2 + \omega)\operatorname{ctg}(v_2' + \omega) \tag{23}$$

de laquelle on tire facilement

$$\frac{\cos(v_1 + v_1' + 2\omega)}{\cos(v_1' - v_1)} = \frac{\cos(v_2 + v_2' + 2\omega)}{\cos(v_2' - v_2)} \tag{24}$$

La relation (24) donne à son tour

1^0,

$$\frac{\cos(v_1 + v_1' + 2\omega) - \cos(v_2 + v_2' + 2\omega)}{\cos(v_1 + v_1' + 2\omega) + \cos(v_2 + v_2' + 2\omega)} =$$

$$= \frac{\cos(v_1' - v_1) - \cos(v_2' - v_2)}{\cos(v_1' - v_1) + \cos(v_2' - v_2)}$$

d'où

$$\operatorname{tg}\left(\frac{v_1 + v_1' + v_2 + v_2'}{2} + 2\omega\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' - v_2 + v_1' - v_1)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' - v_2 - v_1' + v_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' + v_2 - v_1' - v_1)} \tag{25}$$

la formule qui permet de calculer ω, si les anomalies v_1, v_1', v_2, v_2' sont connues

2^0,

$$\frac{\cos(v_1 + v_1' + 2\omega)}{\cos(v_2 + v_2' + 2\omega)} = \frac{\cos(v_1 + v_1') - \sin(v_1 + v_1')\operatorname{tg} 2\omega}{\cos(v_2 + v_2') - \sin(v_2 + v_2')\operatorname{tg} 2\omega} =$$

$$= \frac{\cos(v_1' - v_1)}{\cos(v_2' - v_2)}$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{\cos(v_1' - v_1)\cos(v_2' + v_2) - \cos(v_2' - v_2)\cos(v_1' + v_1)}{\cos(v_1' - v_1)\sin(v_2' + v_2) + \cos(v_2' - v_2)\sin(v_1' + v_1)} \tag{25'}$$

l'autre formule pour le calcul de ω.

Après avoir trouvé l'élément ω, à l'aide des formules (21) et (22), on calcule ceux i et Ω. Remarquons, que les relations (25) et (25') donnent quatre valeurs de ω différant l'une de l'autre successivement de 90^0, mais au problème ne convient qu'une seule, celle pour laquelle $\cos i < 1$, $\Omega < 180^0$, les angles $v + \omega$ et $\theta - \Omega$ comptés dans le même sens appartenant au même quadrant.

L'angle de position de la ligne des noeuds Ω peut être déterminé aussi indépendamment de l'élément ω. En effet, prenons la relation (22) qu'on peut écrire:

$$\frac{\sin^2(\theta - \Omega)}{\cos^2(\theta - \Omega)} = -\frac{\sin(v + \omega)\cos(v' + \omega)}{\cos(v + \omega)\sin(v' + \omega)}$$

On en déduit facilement la relation

$$\sin(v + v' + 2\omega) = \sin(v' - v)\cos 2(\theta - \Omega). \tag{26}$$

Prenons encore la relation (4) qu'on peut écrire

$$\frac{1 - \sin^2(v_1 + v_1' + 2\omega)}{\cos^2(v_1' - v_1)} = \frac{1 - \sin^2(v_2' + v_2 + 2\omega)}{\cos^2(v_2' - v_2)}$$

Substituons ici l'expression (26). Alors

$$\frac{1 - \sin^2(v_1' - v_1)\cos^2 2(\theta_1 - \Omega)}{\cos^2(v_1' - v_1)} = \frac{1 - \sin^2(v_2' - v_2)\cos^2 2(\theta_2 - \Omega)}{\cos^2(v_2' - v_2)}$$

d'où $\quad \operatorname{tg}(v_1'-v_1)\sin 2(\theta_1-\Omega)=\operatorname{tg}(v_2'-v_2)\sin 2(\theta_2-\Omega) \qquad (27)$

l'équation qui ne contient que une seule inconnue Ω.
En la résolvant, on obtient

$$\operatorname{tg} 2\Omega=\frac{\operatorname{tg}(v_2'-v_2)\sin 2\theta_2-\operatorname{tg}(v_1'-v_1)\sin 2\theta_1}{\operatorname{tg}(v_2'-v_2)\cos 2\theta_2-\operatorname{tg}(v_1'-v_1)\cos 2\theta_1} \qquad (28)$$

ou
$$\operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2-2\Omega)=-\operatorname{tg}(\theta_2-\theta_1)\frac{\sin(v_2'-v_2+v_1'-v_1)}{\sin(v_2'-v_2-v_1'+v_1)} \qquad (29)$$

Si $\theta_1=0^0$ et $\theta_2=45^0$, les deux dernières expressions prenent la forme simple

$$\operatorname{tg} 2\Omega=-\frac{\operatorname{tg}(v_2'-v_2)}{\operatorname{tg}(v_1'-v_1)} \qquad (28')$$

$$\operatorname{tg}(2\Omega-45^0)=\frac{\sin(v_2'-v_2+v_1'-v_1)}{\sin(v_2'-v_2-v_1'+v_1)} \qquad (29')$$

Récapitulation des formules pour le calcul des éléments ω, i Ω, à l'aide des quatre positions.

Données:

a) les angles de position

θ_1	θ_2
θ_1+90^0	θ_2+90^0

b) les anomalies vraies

v_1	v_2
v_1'	v_2'

calculées à l'aide des relations

$$E-e\sin E=\mu(t-T)$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\operatorname{tg}\frac{E}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

ou
$$\sin v=-\operatorname{ctg} g\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$$

Formules

1) calcul de la distance angulaire du périastre à la ligne des noeuds

$$\operatorname{tg}\left(\frac{v_1+v_1'+v_2+v_2'}{2}+2\omega\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2'-v_2+v_1'-v_1)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2'-v_2-v_1'+v_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2'+v_2-v_1'-v_1)},$$

2) calcul de l'inclinaison

$$\cos^2 i=-\operatorname{ctg}(v_1+\omega)\operatorname{ctg}(v_1'+\omega)=-\operatorname{ctg}(v_2+\omega)\operatorname{ctg}(v_2'+\omega)<1,$$

3) calcul de l'angle de position de la ligne des noeuds

$$\operatorname{tg}^2(\theta-\Omega)=-\frac{\operatorname{tg}(v+\omega)}{\operatorname{tg}(v'+\omega)}$$

les angles $\theta-\Omega$ et $v+\omega$ appartenant au même quadrant,

ou
$$\operatorname{tg} 2\Omega=\frac{\operatorname{tg}(v_2'-v_2)\sin 2\theta_2-\operatorname{tg}(v_1'-v_1)\sin 2\theta_1}{\operatorname{tg}(v_2'-v_2)\cos 2\theta_2-\operatorname{tg}(v_1'-v_1)\cos 2\theta_1}$$

ou
$$\operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2-2\Omega)=-\operatorname{tg}(\theta_2-\theta_1)\frac{\sin(v_2'-v_2+v_1'-v_1)}{\sin(v_2'-v_2-v_1'+v_1)}.$$

III. Il reste enfin à calculer le demi-grand axe de l'orbite.

Pour cela il faut avoir au moins une distance ρ du satellite à l'étoile principale. La distance ρ est une projection du rayon vecteur r qui forme l'angle δ avec le plan de l'orbite apparente.
Par suite

$$r\cos\delta=\rho$$

Mais
$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \qquad \text{et} \qquad \cos\delta=\frac{\cos(v+\omega)}{\cos(\theta-\Omega)}$$

donc
$$a=\rho\,\frac{1+e\cos v}{1-e^2}\cdot\frac{\cos(\theta-\Omega)}{\cos(v+\omega)}$$

Si l'on connaît deux segments ρ et ρ' d'une corde principale, on peut calculer a à l'aide de la formule

$$a(1-e^2)=\frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'}\,\frac{\cos(\theta-\Omega)}{\cos(v+\omega)}\ ^{*)}$$

C. Calcul des éléments géométriques de l'orbite apparente.

En ayant l'excentricité e et les anomalies vraies v_1, v_1' et v_2, v_2' de deux paires de telles positions du satellite que leurs angles de position diffèrent de 90^0, on peut aussi calculer les éléments de l'orbite apparente.
Les équations

$$E-e\sin E=\mu(t-T) \tag{1}$$

$$\rho\sin(\theta-\theta_\alpha)=\beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E \tag{2}$$

$$\rho\cos(\theta-\theta_\alpha)=\beta\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E+\alpha(\cos E-e) \tag{3}$$

servent à calculer l'éphéméride du compagnon, à l'aide des éléments P, T, e, α, θ_α, β, θ_β, — α et β étant les demi-diamètres conjugués de l'orbite apparente formés par la projection des demi-axes, grand et petit, de l'ellipse réelle.
En divisant (3) par (2), on a

$$\operatorname{ctg}(\theta-\theta_\alpha)=\operatorname{ctg}(\theta_\beta-\theta_\alpha)+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{cosec}(\theta_\beta-\theta_\alpha)\cdot\frac{\cos E-e}{\sin E}$$

D'où, en tenant compte de la relation

$$\frac{\cos E-e}{\sin E}=\operatorname{ctg} v\sqrt{1-e^2}$$

et en posant

$$\theta_\beta-\theta_\alpha=\psi$$

on a

$$\operatorname{ctg}(\theta-\theta_\alpha)=\operatorname{ctg}\psi+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{cosec}\psi\operatorname{ctg} v\sqrt{1-e^2}$$

Ecrivons la dernière équation pour deux positions θ et $\theta'=\theta+90^0$.

*) V. *Wiadomości Matematyczne*. T. XLII, 1936. Deux méthodes pour la détermination de l'orbite...

Alors

$$\operatorname{ctg}(\theta-\theta_\alpha)=\operatorname{ctg}\psi+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{cosec}\psi\operatorname{ctg} v\sqrt{1-e^2} \tag{4}$$

$$-\operatorname{tg}(\theta-\theta_\alpha)=\operatorname{ctg}\psi+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{cosec}\psi\operatorname{ctg} v'\sqrt{1-e^2} \tag{5}$$

Le produit de (4) et (5) donne

$$-1=\operatorname{ctg}^2\psi+\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi}(\operatorname{ctg} v+\operatorname{ctg} v')+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{1-e^2}{\sin^2\psi}\operatorname{ctg} v\operatorname{ctg} v'$$

D'où

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}(1-e^2)+\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\cos\psi(\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} v')+\operatorname{tg} v\operatorname{tg} v'=0 \tag{6}$$

En écrivant l'équation (6) pour deux paires de positions θ_1, θ_1+90^0 et θ_2, θ_2+90^0, on obtient deux équations linéaires:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}(1-e^2)+\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\cos\psi(\operatorname{tg} v_1+\operatorname{tg} v_1')+\operatorname{tg} v_1\operatorname{tg} v_1'=0$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}(1-e^2)+\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\cos\psi(\operatorname{tg} v_2+\operatorname{tg} v_2')+\operatorname{tg} v_2\operatorname{tg} v_2'=0$$

qui ne contiennent que deux inconnues $\frac{\alpha^2}{\beta^2}(1-e^2)$ et $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\cos\psi$.

On en tire facilement

$$\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\cos\psi=-\frac{\operatorname{tg} v_2\operatorname{tg} v_2'-\operatorname{tg} v_1\operatorname{tg} v'_1}{\operatorname{tg} v_2+\operatorname{tg} v_2'-\operatorname{tg} v_1-\operatorname{tg} v_1'} \tag{7}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}(1-e^2)=\frac{\operatorname{tg} v_2\operatorname{tg} v_2'(\operatorname{tg} v_1+\operatorname{tg} v_1')-\operatorname{tg} v_1\operatorname{tg} v_1'(\operatorname{tg} v_2+\operatorname{tg} v_2')}{\operatorname{tg} v_2+\operatorname{tg} v_2'-\operatorname{tg} v_1-\operatorname{tg} v_1'} \tag{8}$$

D'où on trouve $\psi<180^0$ et $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}=\operatorname{tg}\nu$. En substituant les valeurs trouvées dans l'équation (4) ou (5), on calcule θ_α et $\theta_\beta=\theta_\alpha+\psi$. Enfin, de l'équation (2) on tire β, le mieux des quatre positions, par la formule $\beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)=-\dfrac{\Sigma\rho\sin(\theta-\theta_\alpha)}{\Sigma\sin E}$ (9) et puis $\alpha=\dfrac{\beta\operatorname{tg}\nu}{\sqrt{1-e^2}}$ (10)

Exemple numérique.

Calcul de l'orbite du compagnon de ξ Ursae Majoris.

Données:

Période	Temps t	Angles de position θ	Distances ρ
$P = 59^a,82$	1846,35	135^0	$2'',69$
	1865,45	90^0	2, 35
	1871,38	45^0	
	1873,38	0^0	
	1875,51	315^0	
	1881,07	270^0	1, 85
	1888,12	225^0	
	1894,70	180^0	

Les temps et les distances sont tirés du tableau de P. Baize (L'Astronomie, 1932, p. 79), par interpolation *per partes proportionales* des positions moyennes annuelles de ce tableau.

La période est une moyenne des intervalles entre les retours du compagnon aux dix angles de position.

A. Calcul de l'excentricité et de l'époque du passage au périastre

Prenons les temps des deux paires de positions opposées

$$t_1 = 1865{,}45 \qquad t_2 = 1873{,}38$$

$$t_1' = 1881{,}07 \qquad t_2' = 1894{,}70$$

et la période $P = 59^a{,}82$

1) calcul des angles g_1 et g_2 d'après la formule

$$2\alpha + \sin 2\alpha = \mu\,(t' - t - 0{,}5\,P)$$

$$\mu = \frac{360^0}{P} = 6^0{,}018$$

	t_1	t_2
$t' - t - 0{,}5\,P =$	$-14{,}29$	$-8{,}59$
$2\alpha + \sin 2\alpha =$	$-85^0{,}996$	$-51^0{,}694$
$\alpha =$	$-22^0{,}642$	$-13^0{,}152$
$g = 90^0 + \alpha =$	$67^0{,}359$	$76^0{,}848$
	$g_1 = 67^0 21' 29''$	$g_2 = 76^0 50' 53''$

2) calcul des coefficients $\sigma^2, \varkappa^2$, et τ

$$2\sigma = \cos g_1 - \cos g_2 = 0{,}157437$$

$$2\varkappa = \cos g_1 + \cos g_2 = 0{,}612505$$

$$\tau = \mu\,\frac{t_2 + t_2' - t_1 - t_1'}{4} = 6^0{,}018 \times 5{,}39 = 32^0{,}437 = 32^0 26' 13''$$

$$\sigma = 0{,}0787185, \qquad \sigma^2\ \bar{3}{,}79216,$$

$$\varkappa = 0{,}3062525, \qquad \frac{\varkappa^2\ \bar{2}{,}97216}{+\,1{,}75812},$$

$$\lg \sigma = \bar{2}{,}89608, \qquad \lg(\sigma^2)^0 = \bar{1}{,}55028$$

$$\lg \varkappa = \bar{1}{,}48608, \qquad \lg(\varkappa^2)^0 = 0{,}73028$$

3) calcul de l'angle $x = \dfrac{G_2 - G_1}{2}$ de l'équation

$$x + \sigma^2 \operatorname{ctg} x - \varkappa^2 \operatorname{tg} x = \tau$$

$$x + [\bar{1}{,}55028] \operatorname{ctg} x - [0{,}73028] \operatorname{tg} x = 32^0{,}437$$

$$\frac{\sigma}{\varkappa}\ \bar{1}{,}41000 \qquad x' = \tau + \varkappa^2 \operatorname{tg} \tau$$

$$\operatorname{tg} \tau\ \bar{1}{,}80318 \qquad \tau = 32^0{,}437$$

$$\operatorname{tg} \tau > \frac{\sigma}{\varkappa} \qquad \varkappa^2 \operatorname{tg} \tau = 3^0{,}415$$

$$x > \tau \qquad x' = 35^0{,}852$$

$$= 35^0 51' 7''$$

$$x' + \sigma^2 \operatorname{ctg} x' - \varkappa^2 \operatorname{tg} x' = 32^0{,}460 = \tau'$$

$$\tau - \tau' = -0^0{,}023$$

$$x - x' = \Delta x' = \frac{\tau - \tau'}{1 - (\sigma^2 \operatorname{cosec}^2 x' + \varkappa^2 \sec^2 x')} = -\frac{0^0{,}023}{0{,}84}$$

$$x = x' + \Delta x' = 35^0{,}852 - 0^0{,}0274 = 35^0{,}8246$$

$$x = 35^0 49' 29''$$

4) calcul de l'angle y et de l'excentricité .

$e \sin y = \sigma \operatorname{cosec} x$	$\bar{1}{,}12870$		
$e \cos y = \varkappa \sec x$	$\bar{1}{,}57716$	$e \cos y$	$\bar{1}{,}57716$
$\operatorname{tg} y$	$\bar{1}{,}55154$	$\cos y$	$\bar{1}{,}97408$
$y = 19^0 36' = 19^0{,}6$		e	$\bar{1}{,}60308$
		$e =$	$0{,}401$

5) calcul de l'époque du passage au périastre

$$T = \frac{t_1 + t_1' + t_2 + t_2'}{4} - \frac{y - 2\sigma\varkappa \operatorname{ctg} 2x}{\mu}$$

$$T = \frac{7514{,}60}{4} - \frac{19{,}6 - 0{,}9164}{6{,}018}$$

$$T = 1875{,}55$$

Calcul de l'excentricité e et de l'époque T à l'aide des autres positions opposées:

$$t_1 = 1846{,}35 \qquad t_2 = 1871{,}38$$

$$t_1' = 1875{,}51 \qquad t_2' = 1888{,}12$$

donne les valeurs

$$e = 0{,}411$$

$$T = 1875{,}225$$

Valeurs moyennes de l'excentricité e et de l'époque T

$$e = \frac{0{,}401 + 0{,}411}{2} = 0{,}406$$

$$T = \frac{1875{,}55 + 1875{,}23}{2} = 1875{,}39.$$

B. Calcul des éléments ω, i, Ω.

Données deux paires de positions dont les angles de position diffèrent l'un de l'autre de 90^0:

θ		t	$g = \dfrac{E' - E}{2}$ (calculés auparavant)	
$\theta_1 =$	0^0	1873,38	$76^0 50' 53''$	$\rho' - \rho > 0$, $\cos v > 0$
$\theta_1 + 90^0 =$	90^0	1865,45	$67^0 21' 29''$	$\rho' - \rho < 0$, $\cos v < 0$
$\theta_2 =$	45^0	1871,38	$69^0 18' 35''$	$\rho' - \rho > 0$, $\cos v > 0$
$\theta_2 + 90^0 =$	135^0	1846,35	$88^0 52' 19''$	$\rho' - \rho < 0$, $\cos v < 0$

1) Calcul des anomalies vraies à l'aide des formules

$\sin \varphi = e$		$\sin \varphi$	$\bar{1}{,}60853$
$\sin v = -\operatorname{ctg} g \operatorname{ctg} \varphi$		$\operatorname{ctg} \varphi$	$0{,}35235$

$\operatorname{ctg} g$	$\sin v$	v
$\bar{1}{,}36859$	$\bar{1}{,}72094_n$	$v_1 = 328^0 16' 6''$
$\bar{1}{,}62026$	$\bar{1}{,}97261_n$	$v_1' = 249^0 52'$
$\bar{1}{,}57712$	$\bar{1}{,}92947_n$	$v_2 = 301^0 46' 38''$
$\bar{2}{,}29426$	$\bar{2}{,}64661_n$	$v_2' = 182^0 32' 25''$

2) Calcul de ω

$$\operatorname{tg}\left(2\,\omega + \frac{v_1 + v_1' + v_2 + v_2'}{2}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' - v_2 + v_1' - v_1)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' - v_2 - v_1' + v_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' + v_2 - v_1' - v_1)}$$

$$\frac{1}{2}(v_2' - v_2 + v_1' - v^1) = -\ 98^0 49' 9'',5$$

$$\frac{1}{2}(v_2' - v_2 - v_1' + v^1) = -\ 20^0 25' 3'',5$$

$$\frac{1}{2}(v_2' + v_2 - v_1' - v_1) = -\ 46^0 54' 31'',5$$

$$\frac{1}{2}(v_2' + v_2 + v_1' + v_1) = 171^0 13' 34''$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' - v_2 + v_1' - v_1) \quad 0,80924$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_2' - v_2 - v_1' + v_1) \quad \bar{1},57083_n$$

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(v_2' + v_2 - v_1' - v_1) \quad \bar{1},97104_n$$

$$\operatorname{tg}\left(2\,\omega + \frac{v_1 + v_1' + v_2 + v_2'}{2}\right) \quad 0,35111$$

$$2\,\omega + \frac{v_1 + v_1' + v_2 + v_2'}{2} = 245^0 59' 34''$$

$$\frac{v^1 + v_1' + v_2 + v_2'}{2} = 171^0 13' 34$$

$$2\,\omega = 74^0 46'$$

$$\omega = 37^0 23' + 90^0$$

$$\omega = 127^0 23'$$

en sens du mouvement du satellite

3) calcul de i

$$\cos^2 i = -\operatorname{ctg}(v + \omega)\operatorname{ctg}(v' + \omega)$$

$$\begin{array}{lll}
v_1 = 328^0 16' 6'' & & v_2 = 301^0 46' 38'' \\
v_1' = 249^0 52' 0'' & & v_2' = 182^0 32' 25'' \\
\omega = 127^0 23' & & \omega = 127^0 23' \\
v_1 + \omega = 95^0 39' 6'' & & v_2 + \omega = 69^0\ 9' 38'' \\
v_1' + \omega = 17^0 15' & & v_2' + \omega = 309^0 55' 25'' \\
\operatorname{ctg}(v + \omega) & \bar{2},99546_n & \bar{1},58053 \\
\operatorname{ctg}(v' + \omega) & 0,50793 & \bar{1},92263 \\
\cos^2 i & \bar{1},50330 & \bar{1},50316
\end{array}$$

la moyenne $\cos^2 i \quad \bar{1},50328$

$$\cos i \quad \bar{1},75164$$

$$i = 55^0 38'$$

4) calcul de Ω

$$\operatorname{tg}(2\,\Omega - 45^0) = \frac{\sin(v_2' - v_2 + v_1' - v_1)}{\sin(v_2' - v_2 - v_1' + v_1)} = \frac{\sin 197^0 38' 19''}{\sin\ 40^0 50'\ 7''}$$

$$\operatorname{tg}(2\,\Omega - 45^0)\ \bar{1},66596_n$$

$$2\,\Omega - 45^0 = -24^0 51' 50''$$

$$2\,\Omega = 20^0\ 8' 10''$$

$$\Omega = 10^0\ 4'\ 5'' + 90^0$$

$$\Omega = 100^0\ 4'$$

$$\operatorname{tg} 2\,\Omega = -\frac{\operatorname{tg}(v_2' - v_2)}{\operatorname{tg}(v_1' - v_1)} = -\frac{\operatorname{tg} 119^0 14' 13''}{\operatorname{tg}\ 78^0 24'\ 5''}$$

$$\operatorname{tg} 2\,\Omega \quad \bar{1},56430$$

$$2\,\Omega = 20^0\ 8' 15''$$

$$\Omega = 10^0\ 4'\ 7'' + 90^0$$

$$\Omega = 100^0,07$$

en sens des angles de position

Calcul du demigrand axe a.

$$a(1-e^2)=\rho(1+e\cos v)\frac{\cos(\theta-\Omega)}{\cos(v+\omega)}=\frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'}\frac{\cos(\theta-\Omega)}{\cos(v+\omega)}$$

$e=0{,}406$	$\theta=135^0$	$\theta=90^0$
$\Omega=100^0\ 4'$	$\rho=2'',69$	$\rho=2'',35$
$\omega=127^0 23'$		$\rho'=1,85$
$1-e^2=0{,}835164$	$v=182^0 32' 25''$	$v=249^0 52'$
	$\theta-\Omega=34^0 56'$	$\theta-\Omega=-10^0\ 4'$
	$v+\omega=309^0 55' 25''$	$v+\omega=17^0 15'$
	$a=2'''446$	$a=2'',556$
Valeur moyenne	$a=2'',501.$	

Eléments de l'orbite du compagnon de ξ Ursae Majoris

	P	T	a	e	ω	i	Ω
Auteur	$59^a,82$	1875,390	2'',501	0,406	$127^0,4$	$55^0,6$	$100^0,1$
Nörlund	59 ,81	1875,767	2 ,513	0,411	129 ,2	53 ,4	100 ,7
Van den Bos	59 ,86	1875,167	2 ,535	0,413	127 ,2	57 ,2	101 ,4

Comme on voit, les élements calculés à l'aide de notre méthode diffèrent fort peu de ceux calculés per Nörlund (1905) et par Van den Bos (1928). (L'Astronomie, 1932, p. 81).

Calcul des éléments géométriques de l'orbite apparente suivant la méthode développée sur les pages 18 et 19 donne les valeurs

$$\theta_\alpha=315^0 26'',5 \qquad \alpha=1'',941$$

$$\theta_\beta=257^0 37'',0 \qquad \beta=1'',993$$

T. Rakowiecki

Détermination de l'orbite d'une binaire spectroscopique à raies dédoublées, selon la période, les temps des écartements extrêmes et des réunions des raies.

(Wyznaczenie orbity podwójnej gwiazdy spektroskopowej z czasów).

Je me suis déjà occupé partiellement de ce problème dans l'article: „Détermination des orbites des étoiles doubles spectroscopiques" (Prace Matematyczno-fizyczne, t. XLV p. 189—192), où j'ai donné une méthode pour le calcul des éléments e et ω de l'orbite *d'après les seuls temps*. Voici les formules que j'ai là déduites

$$2g-\sin 2g=\frac{360}{P}(t'-t)$$

$$e^2=\cos^2 g+\pi^2\left(\frac{t'_0-t_0}{P}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$e\sin\omega=\operatorname{ctg} g\sqrt{1-e^2}$$

$$e\cos\omega=\pi\left(\frac{t'_0-t_0}{P}-\frac{1}{2}\right)\operatorname{cosec} g$$

Je reviens ici au problème pour l'examiner en entier, en simplifiant considérablement la déduction des formules de la méthode. Supposons un couple spectroscopique dont les composantes sont d'égal éclat et appartiennent au même type spectral. Le spectre d'un tel système possède des raies dédoublées en deux lignes qui s'écartent et se réunissent pério-