$$\int_0^x P_2^2(u)\,du = 2^2 V_0(x) + 2^3 V_0\left(\frac{x}{2}\right) + 2^9 V_0\left(\frac{x}{8}\right) + 2^{14} V_0\left(\frac{x}{16}\right) \tag{202}$$

$$- 2^4 V_1\left(\frac{x}{2}\right) - 2^{13} V_1\left(\frac{x}{16}\right) - 2^8 V_2\left(\frac{x}{8}\right) + 2^8 V_3\left(\frac{x}{8}\right)$$

$$+ 2^{11} V_3\left(\frac{x}{16}\right) - 2^{11} V_4\left(\frac{x}{16}\right) + B \qquad (199,\ 1).$$

(III) — (V) folgen aus (200) — (202) und (VI).

Radość, den 1. Juli 1936.

(Eingegangen am 8. Juli 1936.)

Tadeusz Rakowiecki.

Détermination des orbites des étoiles doubles spectroscopiques d'après les positions opposées.

Nombre d'étoiles doubles forment des couples si serrés, qu'aucun télescope ne peut séparer leurs composantes. C'est à l'aide des observations spectroscopiques qu'on démontre leur duplicité. Les lignes du spectre de telles étoiles se montrent déplacées de leurs positions normales. Ce déplacement pourtant ne reste pas constant, mais il varie regulièrement pendant une période déterminée. Les raies du spectre font des oscillations de part et d'autre d'une position moyenne. Conformément au principe de Doppler-Fizeaux, on explique ces déviations périodiques des raies par les *variables vitesses radiales* des composantes du couple dans leur mouvement autour du centre de gravité commun.

L'intervalle de temps pendant lequel les raies font une oscillation complète, c'est la durée de la révolution des étoiles ou *la période* de leur mouvement orbital. Quand la distance entre l'étoile et l'observatoire augmente, les ondes de la lumière émise par l'astre, deviennent plus longues, quand elle diminue, celles-ci deviennent plus courtes que dans le cas d'une distance invariable. Il en suit que dans le premier cas les raies du spectre sont déviées vers le rouge, dans le second, vers le violet. La grandeur du déplacement est proportionnelle à la vitesse radiale du mouvement rélatif de l'étoile par rapport à la terre. Entre la vitesse radiale W d'un astre et la déviation observée de la raie du spectre il existe la relation suivante:

$$W = 299860 \cdot \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \text{ kilomètres par seconde} \tag{1}$$

299860 km/sec étant la vitesse de la lumière, λ la longueur d'onde d'une raie choisie, perçue au laboratoire d'une source terrestre, λ' la longueur d'onde de la même raie dans le spectre de l'astre[1]. Quand l'astre s'éloigne, $\lambda' > \lambda$, et la vitesse W est positive, quand il se rapproche, elle est négative. La vitesse W, déduite du déplacement des raies, est une vitesse totale, résultante des mouvements de l'étoile et de la terre. Pour obtenir la vitesse propre de l'astre, il faut corriger W de la vitesse radiale du double mouvement de la terre 1⁰) de révolution autour du soleil et 2⁰) de rotation autour de l'axe.

Les suivantes formules servent à faire ces corrections:

$$1^0) \qquad x = 29{,}77 \cos\beta \sin(L - \lambda) + 0{,}5 \cos\beta \sin(\pi - \lambda) \qquad (2)$$

(vitesse du mouvement annuel de la terre vers l'étoile)

où 29,77 km/sec répresente la vitesse moyenne de révolution de la terre, β et λ la latitude et la longitude de l'étoile, L la longitude du soleil au moment de l'observation, $\pi = 281^0 20'$ la longitude du périgée;

$$2^0) \qquad y = 0{,}46 \sin(\mu - \alpha) \cos\delta \cos\varphi$$

(vitesse du mouvement de rotation de l'observatoire vers l'étoile)

où 0,46 km/sec est la vitesse de rotation de l'équateur, μ le temps sidéral de l'observation, α et δ l'ascension droite et la déclinaison de l'astre, φ la latitude géocentrique de l'observatoire.

Ces corrections faites, on a la vitesse radiale propre du compagnon

$$V = W + x + y$$

laquelle, à son tour, se compose de la vitesse radiale constante du mouvement rectiligne du centre de gravité du couple (par rapport au soleil regardé comme immobile) et de la vitesse radiale variable du mouvement orbital du satellite:

$$V = V_0 + w$$

Parmi les couples spectroscopiques il faut distinguer deux groupes d'étoiles, selon le caractère de leurs spectres. Dans l'un, les deux composantes sont à peu près d'égal éclat et possèdent des spectres semblables, avec les raies identiques. Dans l'autre, les grandeurs photométriques des composantes diffèrent de plus d'une magnitude et on ne perçoit

[1]) Pour $\lambda = 4340{,}66$ Angström (la raie de l'hydrogène $H\gamma$) un déplacement d'un Angström correspond à une vitesse radiale 69,07 km/sec.

alors qu'un seul spectre, ou, si les deux spectres sont visibles, ils n'ont pas de raies communes, mais deux systèmes différents de lignes isolées. Dans la première catégorie, on observe un dédoublement des raies qui s'écartent et se réunissent périodiquement. Dans la deuxième, il n'y a pas de dédoublement des raies, mais seulement les déviations périodiques des lignes isolées. Brièvement, il y a des binaires spectroscopiques à raies doubles et des binaires à raies simples.

Dans les spectres à raies doubles, celles-ci s'écartent et se réunissent périodiquement, chaque période consistant de deux écartements, en général inégaux, et de deux réunions des lignes. La ligne qui se trouve plus près du rouge, appartient à l'étoile qui s'éloigne. Celle qui est plus près du violet, appartient á l'astre qui se rapproche. Or, les vitesses radiales des composantes sont généralement différentes, sauf le moment quand les lignes de la raie se réunissent. Alors les vitesses de deux étoiles sont les mêmes et égales à la vitesse du centre du couple, $V = V_0$, la vitesse w du mouvement orbital dévenant pour moment égale au zéro. Il en suit que la position unie des raies détermine la vitesse V_0 du centre du système et le zéro des déplacements des lignes dédoublées. Les écartements de chaque ligne de la raie unie vers le rouge marquent des vitesses radiales positives, ceux vers le violet, les vitesses négatives du mouvement orbital de l'étoile correspondante autour du centre de gravité. Les déviations extrêmes donnent une valeur maxima A et une valeur minima — B de la vitesse radiale des composantes. Si nous ne regardons que le mouvement relatif d'un membre du couple par rapport à l'autre, les distances réciproques des lignes dédoublées donnent immédiatement des vitesses radiales du compagnon par rapport à l'étoile principale, les corrections de mouvement de la terre et la détermination de la vitesse du centre de gravité étant alors superflues. En définitive, dans le cas des couples à raies doubles, l'observation du spectre permet de déterminer séparément la vitesse radiale V_0 du mouvement rectiligne du centre de gravité et les vitesses radiales w_{c1} et — w_{c2} du mouvement orbital de chaque composante autour du centre, ou la vitesse relative w_r d'une étoile par rapport à l'autre; ainsi qu'à chaque instant

$$w_r = w_{c1} + w_{c2} \qquad (6)$$

Dans les spectres des couples à raies simples, on ne perçoit que les oscillations des raies isolées. Mais la position moyenne (zéro des oscillations) n'est pas connue. L'observation ne permet pas donc de séparer ici les vitesses V_0 et w et ne donne que la somme V de ces vitesses.

Les positions extrêmes des oscillations d'une raie marquent une valeur maxima M et une valeur minima N de la vitesse combinée V.

Telles sont les données de l'observation. D'autre part la théorie établit une expression pour la vitesse radiale w du mouvement orbital en fonction des éléments de l'orbite et de l'anomalie vraie du compagnon. Pour le mouvement elliptique cette expression est

$$w = \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} (e \cos \omega + \cos u) \tag{7}$$

où P est la période de révolution, e l'excentricité de l'ellipse, ω la distance angulaire du périastre au noeud ascendant, i l'inclinaison de l'orbite sur le plan perpendiculaire à la ligne de visée, u l'angle entre la droite foyer — noeud ascendant et le rayon vecteur du satellite, égal à la somme $\omega + v$, v étant l'anomalie vraie du rayon vecteur. Le noeud ascendant est celui dans lequel le compagnon s'éloigne de la terre. Voici une déduction géométrique de l'expression (7).

On sait que la vitesse du mouvement elliptique est

$$c = \frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}} \sqrt{1+e^2+2e\cos v} \tag{8}$$

La projection de cette vitesse sur la perpendiculaire à la ligne des noeuds sera

$$c_p = c \cos \theta \tag{9}$$

où θ répresente l'angle d'inclinaison de la tangente à l'ellipse (indiquant la direction du mouvement) sur la perpendiculaire à la ligne des noeuds. L'angle d'inclinaison du grand axe de l'ellipse sur la ligne des noeuds est ω, l'angle d'inclinaison de la normale sur le grand axe est φ, l'angle d'inclinaison de la tangente sur la normale est 90^0. Par suite, l'angle d'inclinaison de la tangente sur la ligne des noeuds est $\omega + \varphi + 90^0$, et celui de la tangente sur la perpendiculaire à la ligne des noeuds est

$$\theta = \omega + \varphi$$

En substituant cette valeur de θ dans la relation (9), on a

$$c_p = c \cos(\omega + \varphi) = c \cos \omega \cos \varphi - c \sin \omega \sin \varphi \tag{10}$$

Mais dans les coniques

$$\sin(v - \varphi) = e \sin \varphi$$

$v - \varphi$ étant un angle formé par le rayon vecteur et par la normale, d'où on tire

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin v}{e + \cos v}, \qquad \sin \varphi = \frac{\sin v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}},$$

$$\cos \varphi = \frac{e + \cos v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} \tag{11}$$

les formules qui expriment φ en fonction de l'anomalie vraie v.

En remplaçant dans (10) c par (8), $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par (11), on obtient après une simple réduction

$$c_p = \frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}} [e \cos \omega + \cos(\omega + v)]$$

une projection de la vitesse du mouvement elliptique sur laperpendiculaire à la ligne des noeuds. Une projection de c_p sur la ligne de visée, c'est-à-dire, la vitesse radiale du mouvement elliptique sera

$$w = \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} (e \cos \omega + \cos u) \tag{7}$$

puisque c_p forme l'angle i avec la sphère céléste et $u = \omega + v$. Soient a un demi grand axe de l'orbite du satellite par rapport à l'étoile principale, a_1 et a_2 ceux des orbites des deux composantes par rapport au centre de gravité du couple, w_r, w_{c1}, w_{c2} les valeurs absolues des vitesses correspondantes. Alors

$$a_1 + a_2 = a$$

$$w_{c1} + w_{c2} = w$$

$$w_{c1} = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} (e \cos \omega + \cos u)$$

$$w_{c2} = \frac{2\pi a_2 \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} (e \cos \omega + \cos u)$$

donc

$$w_{c2} : w_{c1} = a_2 : a_1$$

En mettant $K = \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}$, on obtient l'expression (7) sous la forme

$$w = K(e \cos \omega + \cos u) \tag{12}$$

$\frac{K}{\sin i} = \frac{2\pi a}{P\sqrt{1-e^2}}$ répresente la moyenne arithmétique des vitesses orbitales de l'astre au périastre et à l'apoastre. La formule (12) permet de calculer la vitesse radiale w du mouvement orbital, si les quantites constantes K, $e\cos\omega$ et l'angle variable u sont connus. Afin de calculer $u = \omega + v$ pour un instant donné t, il faut connaître la période P, l'époque T du passage au périastre, l'excentricité e de l'orbite et l'angle ω. Pour calculer une vitesse combinée $V = V_0 + w$, il faut avoir encore la vitesse radiale V_0 du mouvement uniforme du centre de gravité. Les valeurs de V pour les époques successives forment *l'éphéméride* d'une binaire spectroscopique. Par conséquent, pour le calcul de l'éphéméride d'une étoile spectroscopique, les *six éléments* du mouvement du satellite sont nécessaires:

P, période de révolution (en jours moyens),
T, époque du passage au périastre,
e, excentricité de l'orbite,
ω, distance angulaire du périastre au noeud ascendant,
K, facteur des vitesses (en kilomètres par seconde),
V_0, vitesse radiale du mouvement du centre du couple (en kilomètres par seconde),

Ces éléments connus, on calcule l'éphéméride à l'aide des formules

$$\begin{aligned} E - e\sin E &= \frac{360^0}{P}(t - T) \\ \operatorname{tg}\frac{v}{2} &= \operatorname{tg}\frac{E}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \\ u &= \omega + v \\ w &= K(e\cos\omega + \cos u) \\ V &= V_0 + w \end{aligned} \tag{13}$$

I. Détermination des orbites des binaires spectroscopiques à raies doubles.

Il suit de l'expression (12) que la vitesse radiale du mouvement orbital prend une valeur maxima positive A, quand $u = 0^0$, et une valeur minima négative $-B$, quand $u = 180^0$, c'est-à-dire, quand le compagnon passe par *les positions opposées* sur la ligne des noeuds. Alors

$$\begin{aligned} A &= K(1 + e\cos\omega) \\ B &= K(1 - e\cos\omega) \end{aligned} \tag{14}$$

A et B désignant les valeurs absolues des vitesses extrèmes, aux noeuds ascendant et descendant.

En divisant les équations (14), on a

$$\frac{A}{B} = \frac{1+e\cos\omega}{1-e\cos\omega} = \frac{p}{1-e\cos\omega} : \frac{p}{1+e\cos\omega} = \frac{r'}{r}$$

r' et r étant les distances des noeuds descendant et ascendant au foyer de l'orbite.

Or
$$\frac{A}{B} = \frac{r'}{r} \tag{15}$$

les vitesses radiales du compagnon aux points nodaux de l'orbite sont inversement proportionnelles aux distances de ces points au foyer.

Dans notre article: „Deux méthodes pour la détermination de l'orbite réelle du satellite de l'étoile double visuelle à l'aide des positions opposées" (Wiadomości Matematyczne, T. XLII, pp. 85—125) nous avons déduit pour les positions opposées du compagnon les relations suivantes (p. 107 — 108)

$$\begin{aligned} 2g - \sin 2g &= n(t' - t) && \text{(a)} \\ e\sin v &= -\frac{2\sqrt{r'r}}{r'+r}\cos g && \text{(b)} \\ e\cos v &= \frac{r'-r}{r'+r} && \\ e\sin G &= \frac{r'-r}{r'+r}\sin g && \text{(c)} \\ e\cos G &= \cos g && \\ T &= \frac{t'+t}{2} - \frac{G - e^2\sin G\cos G}{n} && \end{aligned} \tag{16}$$

où $n = \frac{360^0}{P}$ répresente le mouvement moyen du satellite, t et t' des instants du passage aux positions opposées, r et r' les rayons vecteurs de ces positions, $g = \frac{E' - E}{2}$ la demi-différence, $G = \frac{E' + E}{2}$ la demi-somme de leurs anomalies excentriques, v l'anomalie vraie du rayon r. En appliquant ces formules aux positions nodales du satellite de l'étoile double spectroscopique, on y peut, en tenant compte de la relation

(15), remplacer r' par A et r par B. En remarquant encore, qu'alors $v = 360^0 - \omega$, on a

$$2g - \sin 2g = n(t' - t) \qquad \text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned} e \sin \omega &= \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \cos g \qquad \text{(b)} \\ e \cos \omega &= \frac{A-B}{A+B} \\ e \sin G &= \frac{A-B}{A+B} \sin g \\ e \cos G &= \cos g \qquad \text{(c)} \\ T &= \frac{t'+t}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{n} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Dans le cas des binaires à raies doubles, quand, comme nous avons montré plus haut, les valeurs les plus grandes A et B des vitesses radiales orbitales peuvent être déterminées des écartements extrêmes des lignes dédoublées, les équations (17) permettent immédiatement de calculer les éléments e, T, ω de l'orbite, les instants t et t' des vitesses extrêmes, la période P et la vitesse V_0 du centre de gravité étant aussi connues des observations.

Par l'addition et la soustraction des équations (14), on obtient

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} = \frac{A+B}{2} \\ K e \cos \omega &= \frac{2\pi a \sin i \;\, e \cos \omega}{P\sqrt{1-e^2}} = \frac{A-B}{2} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

d'où

$$e \cos \omega = \frac{A-B}{A+B}$$

[en accord avec la dernière équation (17)],

et
$$a \sin i = \frac{A+B}{2} \frac{P}{2\pi} \sqrt{1-e^2} = \sqrt{AB} \frac{P}{2\pi} \sin g \qquad (20)$$

Comme nous voyons de (19), la quantité K, comptée généralement parmi les éléments, répresente la demi-amplitude des oscillations des vitesses radiales du satellite; $a \sin i$ est une valeur minima possible du demi-

grand axe de l'orbite, a et $\sin i$ ne pouvant être calculés séparément à l'aide des vitesses radiales parce que ces dernières ne dépendent que du produit $a \sin i$ et restent les mêmes, si ce produit ne change pas. La position de la ligne des noeuds est aussi indéterminable, parcequ'elle n'a aucune influence sur les vitesses radiales. Puisque les vitesses A et B sont exprimées en kilomètres par seconde, la période P, contenue dans la formule (20'), doit être aussi exprimée en secondes.

En substituant les valeurs (19) de K et de $K e \cos \omega$ dans (12), on obtient une nouvelle forme de l'expression pour la vitesse radiale du mouvement orbital:

$$w = \frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2} \cos u \qquad (21)$$

permettant de calculer w pour chaque valeur de l'angle u, si les valeurs des vitesses extrèmes A et B sont connues des observations.

La détermination des éléments e et ω de l'orbite dans le cas d'une binaire spectroscopique à raies dédoublées peut être faite aussi d'une autre manière. On peut les calculer *seulement des temps*: de la période de révolution et des moments des positions extrèmes et des positions unies des raies dédoublées, précisément, des intervalles de temps entre les positions aux bouts de la ligne des noeuds et entre les positions aux bouts du diamètre de l'orbite joignant les points dans lesquels le

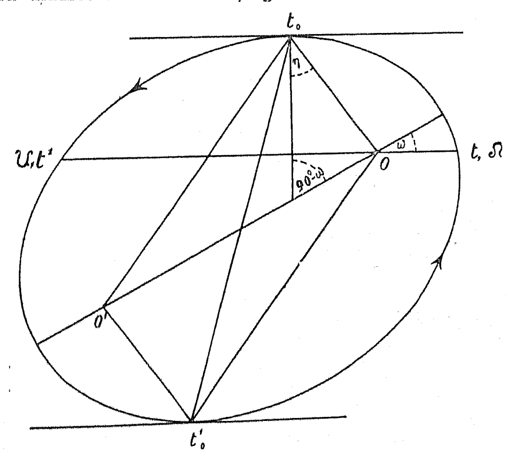

Fig. 1

mouvement du satellite est perpendiculaire au rayon visuel, *sans connaissance des vitesses radiales*. Soient $p = t' - t$ l'intervalle de temps pendant lequel la raie se déplace de sa position extrème du côté de rouge à celle du côté de violet du spectre, c'est-à-dire, pendant lequel le compagnon passe du noeud ascendant au noeud descendant, $p_0 = t_0' - t_0$ l'intervalle de temps entre deux réunions successives des raies pendant lequel le satellite passe du point le plus éloigné au point le plus rapproché de l'orbite. La figure 1 représente ces deux paires de positions du satellite. Pendant le temps p_0 le rayon vecteur du satellite balaie l'aire

$$(0\, t_0\, t'\, t_0'\, 0) = \frac{\pi\, a\, b\, p_0}{P},$$

qui se compose de la demi ellipse

$$(t_0\, t'\, t_0'\, t_0) = \frac{1}{2} \pi\, a\, b$$

et du triangle $(0\, t_0\, t_0') = b^2 \operatorname{tg} \eta$ (égal au triangle $0\, t_0\, 0'$), où η est l'angle entre le rayon vecteur $0\, t_0$ et la normale au point t_0.

Par conséquent

$$\frac{\pi\, a\, b\, p_0}{P} = \frac{1}{2} \pi\, a\, b + b^2 \operatorname{tg} \eta$$

d'où

$$\operatorname{tg} \eta \sqrt{1 - e^2} = \pi \left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2} \right) \tag{1}$$

Comme on voit de la figure 1, la normale forme avec le grand axe de l'ellipse l'angle $90^0 - \omega$. Entre les angles η et $90^0 - \omega$, formés par la normale avec le rayon vecteur et le grand axe de l'ellipse, il existe la relation suivante:

$$\sin \eta = e \sin (90^0 - \omega) = e \cos \omega \tag{2}$$

Il en vient que

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{e \cos \omega}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}} = \operatorname{ctg} \omega \frac{e \sin \omega}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}}$$

Mais, comme nous avons déduit plus haut,

$$\left.\begin{aligned} e \sin \omega &= \frac{2 \sqrt{A\, B}}{A + B} \cos g \\ e \cos \omega &= \frac{A - B}{A + B} \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Par suite

$$\frac{e \sin \omega}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}} = \cos g \tag{2}$$

et

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{ctg} \omega \cos g \tag{3}$$

En substituant (3) dans (1), on a

$$\operatorname{ctg} \omega \cos g \sqrt{1 - e^2} = \pi \left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2} \right) \tag{4}$$

En multipliant la dernière équation par la relation

$$\frac{e \sin \omega}{\sqrt{1 - e^2}} = \operatorname{ctg} g \tag{5}$$

qu'on déduit du système (I), on obtient

$$e \cos \omega = \pi \left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{cosec} g \tag{6}$$

En mettant la valeur obtenue de $e \cos \omega$ dans (2), on a

$$\frac{e \sin \omega}{\sqrt{\sin^2 g - \pi^2 \left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2} \right)^2}} = \operatorname{ctg} g \tag{7}$$

Il résulte de (5) et (7) que

$$1 - e^2 = \sin^2 g - \pi^2 \left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2} \right)^2$$

d'où

$$e^2 = \cos^2 g + \pi^2 \left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2} \right)^2 \tag{8}$$

On trouve l'agle g de l'équation

$$2\, g - \sin 2\, g = n\, (t' - t) = \frac{2\, \pi\, p}{P} \tag{9}$$

Finalement, les équations (9 et 8) permettent de calculer l'excentricité e. Après cela les équations (5 et 6) donnent l'argument du périastre ω.

Si nous posons $g = 90^0 - \alpha$, alors ces équations, prendront la forme

$$2\alpha + \sin 2\alpha = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{P}\right) = 360^0 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{P}\right)$$

$$e^2 = \sin^2\alpha + \pi^2\left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$e \sin\omega = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-e^2}$$

$$e\cos\omega = \pi\left(\frac{p_0}{P} - \frac{1}{2}\right)\sec\alpha$$

II. Détermination des orbites des binaires spectroscopiques à raies simples.

Dans le cas des couples spectroscopiques à raies simples, les valeurs extrèmes A et $-B$ de la vitesse radiale du satellite ne peuvent être déduites des observations et, par conséquent, on ne peut pas se servir des formules (17) pour le calcul des éléments. Les mesures des déplacements d'une raie isolée donnent ici la vitesse combinée V, c'est-à-dire, la somme de la vitesse V_0 du centre de gravité et de la vitesse w du satellite

$$V = V_0 + w$$

En remplaçant, dans la dernière relation, w par la valeur (21), on a

$$V = V_0 + \frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}\cos u \qquad (22)$$

Remarquons que la vitesse V prend une valeur maxima M au noeud ascendant et une valeur minima N au noeud descendant, où la vitesse w possède les valeurs extrèmes A et $-B$, de sorte que

$$\left.\begin{aligned} M &= V_0 + A \\ N &= V_0 - B \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Il résulte de (23) que

$$V_0 + \frac{A-B}{2} = \frac{M+N}{2} \qquad (24)$$

$$\frac{A+B}{2} = \frac{M-N}{2} = K \qquad (24')$$

En substituant les valeurs (24) dans l'équation (22), on obtient

$$V = \frac{M+N}{2} + \frac{M-N}{2}\cos u \qquad (25)$$

d'où on déduit facilement la formule

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{M-V}{V-N}} \qquad (25')$$

Quand les vitesses V, M et N sont déterminées par l'observation, on peut, au moyen des relations (25 ou 25'), calculer sans ambiguité l'angle de position du satellite u, en tenant compte de cela que $0 < u < 180^0$, quand le compagnon se trouve entre le noeud ascendant et descendant, et que $180^0 < u < 360^0$, quand il se place entre le noeud descendant et ascendant. En remplaçant, dans la formule (25), l'angle u par $u + 180^0$, on a

$$V' = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2}\cos u \qquad (26)$$

la vitesse radiale du satellite à la position opposée.

En ajoutant (25) et (26), on obtient

$$V + V' = M + N$$

la somme des vitesses radiales aux positions opposées est une quantité constante.

Si V est une vitesse radiale du compagnon à l'instant t, alors

$$V' = M + N - V$$

sera sa vitesse à la position opposée. De la serie de vitesses mesurées en époques successives, ou de *la courbe des vitesses radiales*, on trouve le moment t', auquel a lieu la vitesse V'. En ayant les instants t et t' des positions opposées, on peut, de l'équation (16a)

$$2g - \sin 2g = n(t' - t) \qquad (28)$$

calculer la valeur de $g = \frac{E'-E}{2}$, si la période P est connue.

Par une simple combinaison des équations (16 b et 16 c), en les élevant au carré, ajoutant et puis en divisant $e \sin v$ par $\sqrt{1-e^2}$, on obtient

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v = -\operatorname{ctg} g$$

ou, en posant $e = \sin \varphi$

$$\operatorname{tg} \varphi \sin v = -\operatorname{ctg} g \tag{29}$$

L'équation (29), valable ainsi pour les binaires visuelles que pour les couples spectroscopiques, exprime l'anomalie vraie de la position du satellite en foction de la demi-différence g des anomalies excentriques de cette position et de la position opposée.

Les équations (26, 28 et 29) jouent un rôle capital dans le calcul des éléments des orbites des binaires spectroscopiques. Deux paires de positions opposées du satellite suffiront pour calculer l'orbite à l'aide de ces équations. Nous allons considérer la solution dans un cas singulier et la solution générale du problème.

1⁰) Prenons deux paires singulières de positions opposées, l'une sur la ligne des noeuds, l'autre aux bouts de la corde perpendiculaire à cette ligne. Soient t_0 et t_0' les instants du passage aux noeuds, M et N les vitesses radiales à ces instants. En posant, dans l'équation (25), $u = 90^0$ ou $u = 270^0$, on a pour les vitesses correspondantes du satellite une valeur commune:

$$V_p = \frac{M+N}{2} \tag{30}$$

La série de vitesses observées, ou *la courbe des vitesses radiales*, fournira les instants t_p et t_p' auxquels ont lieu les vitesses (30). Alors les équations (28), écrites pour les deux cordes choisies

$$\left.\begin{aligned} 2\,g_0 - \sin 2\,g_0 &= n\,(t_0' - t_0) \\ 2\,g_p - \sin 2\,g_p &= n\,(t_p' - t_p) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

permettront de calculer les angles g_0 et g_p.

En tenant compte de cela que pour $u = 0^0$, $v = 360^0 - \omega$, et pour $u = 90^0$, $v = 90^0 - \omega$, on a pour ces positions, au lieu de (29), les équations

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi \sin \omega &= \operatorname{ctg} g_0 \\ \operatorname{tg} \varphi \cos \omega &= -\operatorname{ctg} g_p \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

qui ne contiennent que deux inconnues: $\operatorname{tg} \varphi$ et l'angle ω, lesquelles s'en

calculent facilement. Après cela, de la relation $e = \sin \varphi$ on obtient l'excentricité de l'orbite, et puis, au moyen des équations

$$\left.\begin{aligned} e \sin G_0 &= e \cos \omega \sin g_0 \,^{1)} \\ e \cos G_0 &= \cos g_0 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$T = \frac{t_0' + t_0}{2} - \frac{G_0 - e^2 \sin G_0 \cos G_0}{n}$$

l'époque T du passage au périastre. L'élément T peut être calculé aussi à l'aide des formules

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad \text{et} \quad T = t_0 - \frac{E_0 - e \sin E_0}{n} \tag{34}$$

Après avoir déterminé $\cos \omega$ et e, de la relation (17 c):

$$\frac{A-B}{A+B} = e \cos \omega$$

en tenant compte de (24′), on obtient

$$A - B = (M - N)\, e \cos \omega \tag{35}$$

En substituant cette valeur dans l'équation (24), on a la vitesse radiale du centre de gravité du couple

$$V_0 = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2} e \cos \omega \tag{36}$$

Enfin, en remplaçant dans la formule (20′) $A+B$ par $M-N$, on a

$$a \sin i = \frac{M-N}{2} \cdot \frac{P}{2\pi} \sqrt{1-e^2} \tag{37}$$

la valeur minima du demi grand axe de l'orbite.

1⁰ a) Prenons deux paires de positions opposées aux bouts de deux cordes focales perpendiculaires l'une à l'autre. Soient M et N les

[1]) Il résulte des équations (16) que

$$e \sin G = e \cos v \sin g$$

où v est l'anomalie vraie du point initial de la corde focale.

vitesses radiales aux noeuds, V une vitesse à l'instant t_1. Alors la formule

$$V_1' = M + N - V_1$$

nous donnera la vitesse au point opposé. La courbe des vitesses fournira le temps t_1' de la vitesse V_1'.

Les formules

$$\cos u = \frac{2\,V_1 - (M+N)}{M-N}$$

$$V_2 = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2}\sin u$$

$$V_2' = M + N - V_2$$

nous donneront les vitesses V_2 et V_2' aux bouts de la corde perpendiculaire. Soient t_2 et t_2' les instants des vitesses V_2 et V_2'. Alors les équations

$$2\,g_1 - \sin 2\,g_1 = n\,(t_1' - t_1)$$

$$2\,g_2 - \sin 2\,g_2 = n\,(t_2' - t_2)$$

permettent de calculer les angles g_1 et g_2.

Les anomalies vraies des cordes prises sont v et $v + 90^0$. En écrivant l'équation (29) pour les deux cordes perpendiculaires, on a

$$\operatorname{tg}\varphi \sin v = -\operatorname{ctg} g_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi \cos v = -\operatorname{ctg} g_2$$

d'où on calcule l'anomalie v et $\operatorname{tg}\varphi$.

La formule $e = \sin\varphi$ fournit l'excentricité.

En ayant les angles u et v, on trouve l'angle de position du périastre $\omega = u - v$.

2[0]) Ci-dessus nous avons déterminé les éléments de l'orbite d'un couple spectroscopique à l'aide des deux paires de positions aux bouts des cordes focales, perpendiculaires l'une à l'autre. Mais on peut généraliser la méthode et calculer l'orbite des deux paires de positions opposées quelconques.

Soient M et N les valeurs extrêmes de la vitesse radiale du satellite, V_1 et V_2 les vitesses radiales observées aux instants t_1 et t_2. Des équations

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{M+N}{2} + \frac{M-N}{2}\cos u_1 \\ V_2 &= \frac{M+N}{2} + \frac{M-N}{2}\cos u_2 \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

on calcule les angles u_1 et u_2.

Mais $u_1 = \omega + v_1$ et $u_2 = \omega + v_2$; par suite, la relation

$$v_2 - v_1 = u_2 - u_1 = 2f \tag{39}$$

fournit la différence des anomalies vraies des positions prises du satellite.

Les relations

$$\left.\begin{aligned} V_1' &= M + N - V_1 \\ V_2' &= M + N - V_2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

donnent les valeurs des vitesses radiales aux positions opposées. De la courbe des vitesses radiales nous trouvons les instants t_1' et t_2' de ces vitesses.

Alors les équations

$$\left.\begin{aligned} 2\,g_1 - \sin 2\,g_1 &= n\,(t_1' - t_1) \\ 2\,g_2 - \sin 2\,g_2 &= n\,(t_2' - t_2) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

permettront de calculer g_1 et g_2. En ayant ces angles, on écrit les équations

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi \sin v_1 &= -\operatorname{ctg} g_1 \\ \operatorname{tg}\varphi \sin v_2 &= -\operatorname{ctg} g_2 \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

d'où on tire

$$\frac{\sin v_2 + \sin v_1}{\sin v_2 - \sin v_1} = \frac{\operatorname{ctg} g_2 + \operatorname{ctg} g_1}{\operatorname{ctg} g_2 - \operatorname{ctg} g_1}$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{v_2 + v_1}{2} = -\operatorname{tg}\frac{v_2 - v_1}{2} \cdot \frac{\sin(g_2 + g_1)}{\sin(g_2 - g_1)} \tag{43}$$

En ayant $\dfrac{v_2 - v_1}{2} = f$ et $\dfrac{v_2 + v_1}{2} = F$, on trouve des anomalies vraies des deux cordes

$$v_1 = F - f \qquad \text{et} \qquad v_2 = F + f \tag{44}$$

Alors la relation

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \tag{45}$$

nous donnera la position du périastre, et les équations (42) fourniront $\operatorname{tg}\varphi$ et, par conséquent, l'excentricité $e = \sin\varphi$.

La détermination de K, V_0 et $a \sin i$ se fait de même que dans le cas précédent 1°.

L'époque T on calcule à l'aide des équations

$$e \sin G = e \cos v \sin g \qquad \qquad \operatorname{tg}\frac{E}{2} = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$e \cos G = \cos g \qquad \text{ou}$$

$$T = \frac{t'+t}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{n} \qquad \qquad T = t - \frac{E - e \sin E}{n}$$

Récapitulation des formules.

I. Calcul des orbites des binaires spectroscopiques à raies doubles.

Données:

1) les vitesses radiales orbitales aux noeuds A et $-B$,
2) les temps de ces vitesses t et t',
3) la période P.

Les éléments e, ω, T et K se calculent au moyen des équations (17) et (19), l'élément V_0 étant connu des observations.

II. Calcul des orbites des binaires spectroscopiques à raies simples.

1°) des positions opposées sur la ligne des noeuds et sur la corde perpendiculaire à cette ligne.

Données:

1) les vitesses radiales extrêmes M et N aux noeuds,
2) les temps t et t' de ces vitesses,
3) les temps du passage aux bouts de la corde perpendiculaire à la ligne des noeuds t_p et t_p', où la vitesse $V = \frac{M+N}{2}$,
4) la période P.

Formules:

$$2g - \sin 2g = n(t' - t) \tag{1}$$
$$2g_p - \sin 2g_p = n(t_p' - t_p)$$

$$\operatorname{tg}\varphi \sin\omega = \operatorname{ctg} g$$
$$\operatorname{tg}\varphi \cos\omega = -\operatorname{ctg} g_p \tag{2}$$
$$e = \sin\varphi$$

$$e \sin G = e \cos\omega \sin g$$

$$e \cos G = \cos g \tag{3}$$
$$T = \frac{t'+t}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{n}$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{3'}$$
$$T = t - \frac{E - e \sin E}{n}$$

$$K = \frac{M-N}{2} \tag{4}$$

$$V_0 = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2} e \cos\omega \tag{5}$$

$$a \sin i = \frac{M-N}{2} \cdot \frac{P}{2\pi}\sqrt{1-e^2} \tag{6}$$

1°a) des positions aux bouts de deux cordes focales perpendiculaires l'une à l'autre.

Données:

1) les vitesses extrèmes M et N,
2) la vitesse V_1 à l'instant t_1,
3) les temps t_1', t_2, t_2',
4) la période P.

Formules.

$$V_1' = M + N - V_1 \quad \text{à l'instant } t_1',$$

$$\cos u = \frac{2V_1 - (M+N)}{M-N}, \tag{1}$$

$$V_2 = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2}\sin u \quad \text{à l'instant } t_2,$$

$$V_2' = M + N - V_2 \quad \text{à l'instant } t_2'.$$

$$2g_1 - \sin 2g_1 = n(t_1' - t_1) \tag{2}$$
$$2g_2 - \sin 2g_2 = n(t_2' - t_2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi \sin v &= -\operatorname{ctg} g_1 \\ \operatorname{tg}\varphi \cos v &= -\operatorname{ctg} g_2 \\ e &= \sin\varphi \\ \omega &= u - v \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} e \sin G &= e \cos v \sin g \\ e \cos G &= \cos g \end{aligned} \qquad (4)$$

$$T = \frac{t + t'}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{n}$$

Les éléments K, V_0 et $a \sin i$ se calculent à l'aide des formules (4, 5, 6) du point précédent.

2[0]) des positions opposées aux bouts de deux cordes quelconques. Données:

1) les vitesses extrèmes M et N,
2) les vitesses V_1 et V_2 aux points initiaux des deux cordes,
3) les instants t_1, t_1', t_2, t_2' du passage aux bouts des cordes,
4) la période P.

Formules:

$$\cos u_1 = \frac{2\,V_1 - (M+N)}{M-N}$$

ou
$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{M-V}{V-N}} \qquad (1)$$

$$\cos u_2 = \frac{2\,V_2 - (M+N)}{M-N}$$

$$v_2 - v_1 = u_2 - u_1 = 2f$$

$$\begin{aligned} V_1' &= M + N - V_1 \quad \text{à l'instant } t_1', \\ V_2' &= M + N - V_2 \quad \text{à l'instant } t_2', \\ 2\,g_1 - \sin 2\,g_1 &= n\,(t_1' - t_1) \\ 2\,g_2 - \sin 2\,g_2 &= n\,(t_2' - t_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} F = -\operatorname{tg} f \frac{\sin(g_2 + g_1)}{\sin(g_2 - g_1)}, \qquad \begin{aligned} v_1 &= F - f \\ v_2 &= F + f \end{aligned} \qquad (3)$$

(sin v ayant le signe de $-$ ctg g)

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\operatorname{ctg} g}{\sin v}, \qquad e = \sin\varphi \qquad (6)$$

Calcul des éléments T, K, V_0 et $a \sin i$ comme sous le point 1[0].

A la fin, nous dirons quelques mots sur la résolution de l'équation transcendante

$$2\,g - \sin 2\,g = \frac{360^0}{P}(t' - t) \qquad (K)$$

qui entre toujours dans le calcul de l'orbite d'une binaire spectroscopique, d'après notre méthode. Remarquons que $2\,g = E' - E$ est une différence des anomalies excentriques des bouts de la corde focale de l'ellipse. Quand la corde devient le grand axe, c'est-à-dire, quand $t' - t = \frac{1}{2}P$, alors $2\,g = 180^0$; quand $t' - t > \frac{1}{2}P$, $2\,g > 180^0$; quand $t' - t < \frac{1}{2}P$, $2\,g < 180^0$.

En général
$$2\,g = 180^0 \pm 2\,\alpha$$

où α est contenu entre les limites
$$0^0 < \alpha < \varphi$$

φ étant l'angle d'excentricité de l'orbite qui dans les systèmes spectroscopiques le plus souvent est petit. En remplaçant, dans l'équation (K), $2\,g$ par $180^0 \pm 2\,\alpha$, on obtient

$$2\,\alpha + \sin 2\,\alpha = \pm\frac{360^0}{P}(t' - t - 0{,}5\,P) = m > 0$$

La table suivante permettra, par interpolation linéaire, de calculer facilement une valeur de $2\,\alpha$.

2α	m	2α	m	2α	m	2α	m
2^{0}	$4^{0},00$	32^{0}	$62^{0},36$	62^{0}	$112^{0},59$	92^{0}	$149^{0},26$
4	8,00	34^{0}	66,04	64	115,50	94	151,16
6	11,99	36	69,68	66	118,34	96	152,98
8	15,97	38	73,27	68	121,12	98	154,74
10	19,95	40	76,83	70	123,84	100	156,43
12	23,91	42	80,34	72	126,49	102	158,04
14	27,86	44	83,80	74	129,08	104	159,59
16	31,79	46	87,21	76	131,59	106	161,08
18	35,71	48	90,58	78	134,04	108	162,49
20	39,60	50	93,89	80	136,43	110	163,84
22	43,46	52	97,15	82	138,74	112	165,12
24	47,31	54	100,35	84	140,98	114	166,34
26	51,12	56	103,50	86	143,16	116	167,50
28	54,90	58	106,59	88	145,26	118	168,59
30^{0}	$58,^{0}65$	60^{0}	$109,^{0}62$	90^{0}	147,30	120^{0}	$169,^{0}62$

Après avoir calculé 2α, on a $g = 90^{0} \pm \alpha$.

Masses des composantes. Le centre de gravité du couple spectroscopique se trouve sur la droite r joignant les centres de deux astres, en la partageant en deux segments r_1 et r_2, inversement proportionnels aux masses des compagnons. Mais les distances r_1 et r_2 sont directement proportionnelles aux demi grands axes a_1 et a_2 des orbites correspondantes, de sorte que

$$m_2 : m_1 = a_1 : a_2 \qquad (r)$$

Si la binaire a un spectre à raies dédoublées, le rapport des masses des composantes peut être déterminé immédiatement de l'observation. Soient $\Delta\lambda_1$ et $\Delta\lambda_2$ les valeurs absolues des écartements simultanés des lignes dédoublées de la position unie, w_1 et w_2 les vitesses radiales correspondantes du mouvement orbital des composantes. Il suit des relations (1 et 7) que

$$\Delta\lambda_1 : \Delta\lambda_2 = w_1 : w_2 = a_1 : a_2$$

Or

$$m_2 : m_1 = \Delta\lambda_1 : \Delta\lambda_2$$

les masses des composantes sont inversement proportionnelles aux écartements des lignes dédoublées de la position unie des raies. Lorsque le spectre d'une binaire contient des raies isolées des deux compagnons, alors on peut calculer $a_1 \sin i$ et $a_2 \sin i$ et, par conséquent, trouver le rapport des masses composantes. Si le spectre ne contient que des raies d'une seule étoile, alors on peut calculer $a_1 \sin i$ d'une seule orbite et le rapport des masses des membres du couple reste indéterminable.

Il suit de la troisième loi de Kepler (précise) que pour chaque système de deux corps tournant l'un autour de l'autre il existe la relation

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{P^2}$$

dans laquelle a, demi grand axe de l'orbite du satellite, est exprimé en unités astronomiques de longueur, P, période de révolution, en ans sidéraux terrestres. Par conséquent, lorsque les deux spectres du couple sont visibles, on peut calculer $(m_1 + m_2) \sin^3 i$ du système par la formule

$$(m_1 + m_2) \sin^3 i = \frac{a^3 \sin^3 i}{25\, P^2} \qquad (s)$$

où $a \sin i$ est donné en millions de kilomètres et P en jours (unité astr. $= 149{,}5$ millions de kilomètres, un an sidéral $= 366{,}256$ jours, $\frac{(149,5)^3}{(366,25)^2} = 25$) En combinant les relations (r et s), et en tenant compte de cela que $a_1 + a_2 = a$,

on a

$$m_1 \sin^3 i = \frac{a_2 \sin i\,(a \sin i)^2}{25\, P^2}$$

$$m_2 \sin^3 i = \frac{a_1 \sin i\,(a \sin i)^2}{25\, P^2}$$

Lorsqu'un seul spectre de l'étoile m_2 est visible, alors

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{a_2}{a}, \text{ d'où } \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^3} = \frac{a_2^3 \sin^3 i}{a^3 \sin^3 i}$$

Mais $a^3 \sin^3 i = 25\, P^2 (m_1 + m_2) \sin^3 i$. En substituant cela dans la relation précédente, on obtient *la fonction de masse* de l'étoile dont le spectre est invisible:

$$\frac{m_1^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{a_2^3 \sin^3 i}{25\, P^2}$$

STRESZCZENIE.

Wyznaczenie toru gwiazd podwójnych spektroskopowych z pozycyj przeciwległych.

Badanie widm gwiazdowych wykazuje, że prążki — absorpcyjne czy emisyjne — nie zajmują w nich zwykle miejsca normalnego, jakie przypada im w widmie otrzymanem z ziemskiego źródła światła, lecz są przesunięte w stronę czerwieni lub fioletu, wskutek czego odpowiadające prążkom fale światła stają się dłuższe lub krótsze. Zasada Doppler-Fizeaux tłumaczy te przesunięcia ruchem gwiazdy w kierunku ziemi. Jeśli odległość gwiazdy od ziemi rośnie, długość fal światła powiększa się i prążka przesuwa się ku czerwieni; jeśli odległość ta ubywa, długość fal się zmniejsza i prążka przesuwa się w stronę fioletu. Długość λ odpowiadającej prążce fali światła otrzymuje przyrost $\lambda' - \lambda$, proporcjonalny do *prędkości promieniowej* gwiazdy, t. j. prędkości ruchu względem i w kierunku obserwatorium. Prędkość ta wynosi

$$W = 299860 \cdot \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \text{ kilometrów na sekundę.} \tag{1}$$

Otrzymana z przesunięcia prążki prędkość W jest wypadkową prędkości ruchu gwiazdy i ruchu ziemi w kierunku łączącej je prostej. Prędkość ruchu rocznego ziemi w kierunku gwiazdy wyraża wzór

$$x = 29{,}77 \cos\beta \sin(L - \lambda) + 0{,}5 \cos\beta \sin(281^0{,}3 - \lambda) \text{ km/sek} \tag{2}$$

w którym β i λ są szerokością i długością gwiazdy, L długością słońca w chwili obserwacji. Prędkość zaś ruchu dziennego obserwatorjum wzór

$$y = 0{,}46 \sin(\mu - \alpha) \cos\delta \cos\varphi \text{ km/sek,}$$

w którym μ jest czasem gwiazdowym obserwacji, α i δ wzniesieniem i zboczeniem gwiazdy, φ szerokością geograficzną obserwatorjum. Zatem

$$V = W + x + y \tag{3}$$

jest *własną prędkością promieniową* gwiazdy, w odniesieniu do nieruchomej względem Słońca Ziemi. Prędkość V wielu gwiazd nie jest stała, lecz zmienia się periodycznie: albo pojedyncze prążki widma (po wykonaniu poprawki na ruch ziemi) wykazują perjodyczne wahania, albo obserwujemy rozdwojenie prążek, przyczem powstałe z nich dwie linie wahają się w przeciwne strony, zlewając się w jedną w stałym miejscu

pośrednim. Są to *podwójne gwiazdy spektroskopowe*, składające się z dwu towarzyszy, tak blisko siebie położonych, że najpotężniejsze teleskopy nie mogą ich rozdzielić, i obiegających wokoło wspólnego środka ciężkości. Gwiazda wykonywająca ruch obiegowy posiada perjodycznie zmienną prędkość promieniową V, ujawniającą się w wahaniach prążki widmowej. Prócz ruchu obiegowego, każda gwiazda układu podwójnego uczestniczy w jednostajnym prostolinijnym ruchu całego układu, tak że na prędkość V składa się stała prędkość promieniowa V_0 ruchu środka ciężkości i zmienna prędkość promieniowa w ruchu obiegowego gwiazdy

$$V = V_0 + w \tag{5}$$

Teorja ruchu eliptycznego daje następujący wzór na obiegową prędkość promieniową

$$w = \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1 - e^2}} (e \cos\omega + \cos u) = K(e \cos\omega + \cos u) \tag{6}$$

w którym P, e, ω, K są elementami ruchu towarzysza, $u = \omega + v$ kątem zawartym między jego promieniem wodzącym i odcinkiem linji węzłowej, skierowanym do węzła wstępującego.

I. Wyznaczenie toru gwiazd podwójnych o widmie z rozdwojonemi prążkami.

Położenie prążki zjednoczonej wyznacza tu prędkość promieniową V_0 środka ciężkości układu, odchylenie każdej linji rozdwojonej od położenia prążki zjednoczonej daje prędkość promieniową obiegu odpowiedniej gwiazdy wokoło środka ciężkości, zaś odchylenie wzajemne obu linij rozdwojonych — prędkość promieniową obiegu towarzysza wokoło gwiazdy głównej. Prędkość w przyjmuje wartości skrajne A i $-B$, dające się wyznaczyć z obserwacji, kiedy $u = 0^0$ i 180^0. Wtedy

$$A = K(1 + e\cos\omega) \quad \text{i} \quad B = K(1 - e\cos\omega) \tag{7}$$

Kiedy $u = 0^0$, $v = 360^0 - \omega$; kiedy $u = 180^0$, $v = 180^0 - \omega$; zatem

$$\frac{A}{B} = \frac{r'}{r} \tag{8}$$

prędkości promieniowe obiegu towarzysza w węzłach są odwrotnie proporcjonalne do promieni wodzących węzłów,

Dla dwu pozycyj towarzysza na torze eliptycznym, przeciwległych względem ogniska, istnieją następujące związki (p. mój artykuł w T. XLII Wiadomości Matematycznych):

$$2g - \sin 2g = n(t' - t) \quad (a) \qquad\qquad e \sin G = e \cos v \sin g$$

$$e \sin v = -\frac{2\sqrt{r'r}}{r'+r} \cos g \quad (b) \qquad (9) \qquad e \cos G = \cos g \qquad (10)$$

$$e \cos v = \frac{r'-r}{r'+r} \quad (c) \qquad\qquad T = \frac{t'-t}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{n}$$

Stosując te wzory do położeń przeciwległych na linji węzłowej, kładąc dla węzła wstępującego $v = 360^0 - \omega$ i uwzględniając związek (8), otrzymujemy zamiast (9 i 10) równania

$$2g - \sin 2g = n(t' - t) \qquad\qquad e \sin G = e \cos \omega \sin g$$

$$e \sin \omega = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \cos g \qquad (9') \qquad e \cos G = \cos g \qquad (10')$$

$$e \cos \omega = \frac{A-B}{A+B} \qquad\qquad T = \frac{t'+t}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{n}$$

za pomocą których można obliczyć elementy e, ω i T toru gwiazdy podwójnej spektroskopowej, jeśli skrajne prędkości promieniowe obiegu A i $-B$, czasy t i t' tych prędkości i perjod obiegu P są znane. Z równań (7) znajdujemy, że

$$K = \frac{A+B}{2}, \quad K e \cos \omega = \frac{A-B}{2}, \quad a \sin i = \frac{A+B}{2} \cdot \frac{P}{2\pi} \sqrt{1-e^2} \qquad (11)$$

Podstawiając te wartości K i $K e \cos \omega$ we wzór (6), otrzymujemy odmienne wyrażenie na prędkość promieniową ruchu eliptycznego

$$w = \frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2} \cos u \qquad (12)$$

II. Wyznaczenie toru gwiazd podwójnych o widmie z prążkami pojedyńczemi.

Tutaj ani V_0 ani w nie mogą być wyznaczone z obserwacji, która daje tylko ich sumę, *łączną prędkość promieniową* towarzysza

$$V = V_0 + w = V_0 + \frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2} \cos u \qquad (13)$$

Obserwacja daje również największą M i najmniejszą N wartości prędkości V i perjod P obiegu.

$$\text{Ale} \quad M = V_0 + A \qquad \text{Zatem} \qquad V_0 + \frac{A-B}{2} = \frac{M+N}{2}$$

$$N = V_0 - B \qquad\qquad \frac{A+B}{2} = \frac{M-N}{2} = K \qquad (14)$$

Kładąc to w (13), otrzymujemy

$$V = \frac{M+N}{2} + \frac{M-N}{2} \cos u \qquad (15)$$

wyrażenie na łączną prędkość promieniową towarzysza w położeniu wyznaczonym przez kąt u. Prędkość w położeniu przeciwległem jest

$$V' = \frac{M+N}{2} - \frac{M-N}{2} \cos u$$

Zatem

$$V + V' = M + N \qquad (15')$$

suma prędkości promieniowych w położeniach przeciwległych jest stała. Z tablicy obserwowanych własnych prędkości promieniowych znajdujemy czasy t i t' prędkości V i V'. Wtedy z równania (9 a)

$$2g - \sin 2g = n(t' - t) \qquad (16)$$

możemy obliczyć $g = \dfrac{E'-E}{2}$.

Przez prostą kombinację równań (9 b i 9 c), kładąc w wyniku $e = \sin \varphi$, otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \varphi \sin v = -\operatorname{ctg} g \qquad (17)$$

Za pomocą równań (15, 16 i 17) obliczamy elementy e i ω orbity z dwu par położeń przeciwległych towarzysza. W artykule rozpatrzone jest to obliczanie dla trzech odrębnych przypadków:

1⁰) Kiedy jedna para pozycyj przeciwległych znajduje się na linii węzłowej, druga na prostopadłej do niej cięciwie ogniskowej,

2⁰) kiedy pozycje przeciwległe znajdują się na krańcach dwu wzajemnie prostopadłych cięciw ogniskowych.

3⁰) kiedy pozycje przeciwległe znajdują się na końcach dwu dowolnych cięciw ogniskowych.

Czas przejścia przez perjaster oblicza się za pomocą równań (10)

$$e \sin G = e \cos v \sin g \qquad T = \frac{t' + t}{2} - \frac{G - e^2 \sin G \cos G}{n}$$
$$e \cos G = \qquad \cos g$$

albo za pomocą wzorów

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \operatorname{tg} \left(45^0 - \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{i} \quad T = t - \frac{E - e \sin E}{n} \tag{18}$$

Elementy K i $a \sin i$ dają wzory:

$$K = \frac{M - N}{2} \quad \text{i} \quad a \sin i = \frac{M - N}{2} \cdot \frac{P}{2\pi} \sqrt{1 - e^2} \tag{19}$$

Ponieważ $\frac{A - B}{A + B} = e \cos \omega$, i $A + B = M - N$, więc $A - B = (M - N) e \cos \omega$. Podstawiając to w równanie (14), mamy wzór na prędkość promieniową środka ciężkości układu

$$V_0 = \frac{M + N}{2} - \frac{M - N}{2} e \cos \omega \tag{20}$$

Ponieważ prędkość promieniowa towarzysza nie zależy wcale od położenia linii węzłowej, więc położenie to nie może być wyznaczone z prędkości promieniowych. Również półoś a i nachylenie i orbity nie dają się wyznaczyć oddzielnie, gdyż prędkości promieniowe zależą tylko od iloczynu $a \sin i$ i będą te same dla różnych wartości a i i, jeśli iloczyn $a \sin i$ pozostaje stały. Sześć wielkości stałych P, e, ω, K, V_0, T są elementami ruchu towarzysza podwójnej gwiazdy spektroskopowej. Z elementów tych oblicza się efemerydę towarzysza, t. j. prędkość promieniową w danej chwili t, według wzorów

$$n = \frac{360^0}{P}, \qquad E - e \sin E = n(t - T)$$
$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{tg} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$$
$$u = \omega + v$$
$$w = K(e \cos \omega + \cos u)$$
$$V = V_0 + w$$

Jeśli widmo gwiazdy podwójnej zawiera prążki obu gwiazd układu (te same rozdwojone lub odrębne pojedyńcze), to możemy obliczyć półosie $a_1 \sin i$ i $a_2 \sin i$ orbit obu towarzyszy ze środkiem ciężkości jako ogniskiem. Stosunek półosi $a_1 : a_2$ da nam stosunek mas gwiazd układu $m_2 : m_1$. W razie widma z prążkami rozdwojonymi stosunek wzajemny mas obu gwiazd może być otrzymany z obserwacji; mianowicie, odchylenia linji rozdwojonych od położenia prążki zjednoczonej są odwrotnie proporcjonalne do mas gwiazd dających linie.

Jeśli widmo zawiera prążki tylko jednej gwiazdy, to może być obliczona tylko półoś jednej orbity. Stosunek mas obu gwiazd układu pozostaje nieznany.