REFERENCES.

[1] V. Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach. Norske Vid. Selsk. Skr., Mat.-Naturv. Kl. (1920), no. 3.

[2] F. P. Cantelli, Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri etc. Giorn. Inst. Ital. Attuari, vol. 4 (1933), p. 327.

[3] H. Cramér, Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Math. Z., vol. 4 (1919), p. 104.

[4] H. Cramér, Some theorems concerning prime numbers. Ark. Mat. Astron. Fys., vol. 15 (1920), no. 5.

[5] H. Cramér, On the distribution of primes. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol 20 (1921), p. 272.

[6] H. Cramér, Prime numbers and probability. 8:de Skandinav. Mat.-Kongr. 1934, Förhandl., p. 107.

[7] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of partitio numerorum, III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta math., vol. 44 (1922), p. 1.

[8] G. Hoheisel, Primzahlprobleme in der Analysis. S.-B. preuss. Akad. Wiss. (1930), n:o 33.

[9] A. Piltz, Über die Häufigkeit von Primzahlen in arithmetischen Progressionen etc., Habilitationsschrift, Jena (1884).

[10] A. E. Western, Note on the magnitude of the difference between successive primes. J. London Math. Soc., vol. 9 (1934), p. 276.

[11] E. Westzynthius, Über die Verteilung der Zahlen, die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind. Soc. Sci. Fennicae Comment. Phys.-Math., vol. 5 (1931). n:o 25.

(Received december 9, 1935.)

Sur la connexion rhéonome et sur un problème de l'équivalence.

(O koneksji reonomicznej i o pewnem zagadnieniu równoważności.)

Par

W. Ślebodziński.

Dans un Mémoire inséré aux Prace mat.-fiz. [1]) M. Wundheiler a développé la théorie d'une connexion géométrique, associée à la forme quadratique

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\, d x_i\, d x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i\, d x_i\, d t + A\, d t^2$$

suivant une loi invariante par les transformations cinématiques

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i (x_1, \ldots, x_n, t), \quad \bar{t} = t.$$

Dans les pages qui suivent nous allons montrer qu'on est conduit à la même connexion, en partant du problème de l'équivalence suivant: étant donnés dans l'espace euclidien deux mouvements d'un milieu continu, définis au moyen des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, reconnaître, si ces mouvements peuvent être transformés l'un dans l'autre par une transformation du groupe euclidien à coefficients fonctions du temps t. Ce dernier problème a été posé

[1]) A. Wundheiler. Rhéonome Geometrie, Absolute Mechanik. Prace mat.-fiz. t. 40 (1932). p. 97—142.

et résolu par M. Żorawski[2]). Nous donnerons ici une autre solution, en le réduisant au problème d'équivalence de deux systèmes de formes pfaffiennes (n°s 1 et 2); dans les n^{os} suivants (3 et 4) nous en déduirons la connexion de M. Wundheiler.

1. Désignons par le symbole (G) le groupe des transformations définies par les formules

$$\bar{x}_i = \sum_{r=1}^{t} a_{ir} x_r + a_i, \quad \bar{t} = t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

les coefficients a_i, a_{ir} étant des fonctions de la variable t, assujetties aux conditions suivantes

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{jr} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri} a_{rj} = \delta_{ij}, \quad \|a_{ij}\| = +1, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Les *équations de définition* du groupe (G)

$$\bar{t} = t, \quad \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_r} = \delta_{ij} \tag{3}$$

peuvent être remplacées par un système de Pfaff équivalent. En effet, si l'on pose

$$\alpha_{hi} = \frac{\partial \bar{x}_h}{\partial x_i}, \quad \alpha_h = \frac{\partial \bar{x}_h}{\partial t}, \tag{4}$$

les transformations du groupe (G) seront évidemment définies par les équations suivantes

$$\bar{t} = t, \quad d\bar{x}_h = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{hr}\, dx_r + \alpha_h\, dt, \tag{5}$$

dans lesquelles les variables t, x_r jouent le rôle des variables indépendantes, les symboles $\bar{t}$, $\bar{x}_h$, α_{hr}, α_h désignant les inconnues. Observons

[2]) K. Żorawski. Invariantentheoretische Untersuchung gewisser Eigenschaften der Bewegung kontinuierlicher Medien, Bull. Acad. de Cracovie 1911, p. 175—218; Über gewisse Eigenschaften der Bewegungen kontinuierlicher Medien, Ibidem, 1912, p. 269—292.

que les variables α_{hr} doivent satisfaire aux relations finies suivantes

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{hr} \alpha_{ir} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rh} \alpha_{ri} = \delta_{hi}, \tag{6}$$

qui résultent immédiatement des équations (3) et (4).

Posons maintenant

$$\omega_i = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir}\, dx_r + \alpha_i\, dt. \tag{7}$$

En différentiant extérieurement ces équations, on obtient

$$\omega_i' = \sum_{r=1}^{n} [d\alpha_{ir}\, dx_r] + [d\alpha_i\, dt]. \tag{8}$$

Mais, si l'on résout les équations (7) par rapport aux différentielles dx_r, en tenant compte des relations (6), on aura

$$dx_r = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr} \omega_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr} \alpha_j\, dt. \tag{9}$$

En portant les expressions ci-dessus dans les équations (8), on trouve

$$\omega_i' = \sum_{rj=1}^{n} \alpha_{jr} [d\alpha_{ir} \omega_j] + \left[\left(d\alpha_i - \sum_{rj=1}^{n} \alpha_{jr} \alpha_j\, d\alpha_{ir} \right) dt \right].$$

Si l'on pose encore

$$\omega_{ij} = -\sum_{r=1}^{n} \alpha_{jr}\, d\alpha_{ir} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir}\, d\alpha_{jr}, \quad \tau_i = -d\alpha_i + \sum_{rj=1}^{n} \alpha_{jr} \alpha_j\, d\alpha_{ir},$$

les formules précédentes prendront la forme

$$\omega_i' + \sum_{j=1}^{n} [\omega_{ij} \omega_j] + [\tau_i\, dt] = 0. \tag{10}$$

Telles sont les *équations de structure* du groupe (G)[3]). Les transforma-

[3]) E. Cartan. Sur la structure des groupes infinis de transformations Ann. Éc. Norm., t. 21, 1904; t. 22, 1905.

tions de celui-ci seront maintenant déterminées par les équations suivantes

$$\bar{t} = t, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i, \tag{11}$$

les symboles $\bar{\omega}_i$ désignant ce que deviennent les formes ω_i, si l'on y remplace les variables t, x_r, α_{ir}, α_i par les variables $\bar{t}$, $\bar{x}_r$, $\bar{\alpha}_{ir}$, $\bar{\alpha}_i$.

2. Supposons maintenant que l'on se donne deux systèmes d'équations différentielles

$$\frac{d x_i}{d t} = u_i (t_1 x_1 \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

et

$$\frac{d \bar{x}_i}{d \bar{t}} = \bar{u}_i (\bar{t}_1 \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{13}$$

on sait que chacun de ces systèmes représente le mouvement d'un milieu continu dans un espace à n dimensions. Nous nous proposons d'étudier le problème de l'équivalence de ces mouvements par rapport aux transformations du groupe infini (G), défini dans le n^o précédent. Or, si l'on introduit $2n^2$ variables auxiliaires β_{ir}, $\bar{\beta}_{ir}$, en posant

$$\Theta_i = \sum_{r=1}^{n} \beta_{ir} (d x_r - u_r d t), \quad \bar{\Theta}_i = \sum_{r=1}^{n} \bar{\beta}_{ir} (d \bar{x} - \bar{u}_r d \bar{t}) \tag{14}$$

et que l'on rapproche les équations (11) du groupe (G), le problème d'équivalence posé plus haut se réduit à l'étude du système d'équations suivantes

$$\bar{t} = t, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i, \quad \bar{\Theta}_i = \Theta_i. \tag{15}$$

Nous allons réduire le système (15), en suivant la méthode de M. Cartan[4]). Remplaçons, à cet effet, dans les formes Θ_i les differentielles $d x_r$ par leurs expressions (9) du n^o **1**; il viendra

$$\Theta_i = \sum_{rj=1}^{n} \alpha_{jr} \beta_{ir} \omega_j - \sum_{r=1}^{n} \beta_{ir} \left(u_r + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr} \alpha_j \right) d t.$$

Or, on peut établir entre les paramètres α_{jr}, α_j, β_{ir} des relations telles

[4]) E. Cartan, Les sous-groupes des groupes continus de transformations, Ann. Ec. Norm., t. 25, 1908, Ch. I.

que les coefficients de ω_j et de $d t$ dans l'expression ci-dessus prennent des valeurs numériques fixes. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit de poser

$$\beta_{ir} = \alpha_{ir}, \quad \alpha_j = -\sum_{r=i}^{n} \alpha_{jr} u_r \tag{16}$$

Le coefficient de $d t$ devient alors nul et le coefficient de ω_j prendra, en vertu des relations (6), la valeur δ_{ij}. On aura donc

$$\Theta_i = \omega_i.$$

Le système (15) se réduit ainsi au suivant

$$\bar{t} = t, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i. \tag{17}$$

Observons aussi que, en vertu des relations (6) et (16), les formes ω_i et $\bar{\omega}_i$ s'écriront maintenant de la façon suivante

$$\omega_i = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} (d x_r - u_r d t), \quad \bar{\omega}_i = \sum_{r=1}^{n} \bar{\alpha}_{ir} (d \bar{x}_r - \bar{u}_r d \bar{t}); \tag{18}$$

on en déduit

$$d x_r - u_r d t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ir} \omega_i, \quad d \bar{x}_r - \bar{u}_r d \bar{t} = \sum_{r=1}^{n} \bar{\alpha}_{ir} \bar{\omega}_i. \tag{19}$$

D'après les considérations précédentes le problème de l'équivalence des systèmes (12) et (13) par rapport au groupe (G) a été réduit en définitive à l'étude du système (17). Pour aborder ce problème différentions extérieurement la forme ω_i donnée par la première des formules (18); il viendra

$$\omega_i' = \sum_{r=1}^{n} [d \alpha_{ir} (d x_r - u_r d t)] - \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} [d u_r d t]$$

ou

$$\omega_i' = \sum_{r=1}^{n} [d \alpha_{ir} (d x_r - u_r d t)] - \sum_{rs=1}^{n} \alpha_{ir} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} [d x_s d t]$$

ce qu'on peut aussi présenter sous la forme suivante

$$\omega_i' = \sum_{r=1}^{n} [d\alpha_{ir}(dx_r - u_r dt)] - \sum_{rs=1}^{n} \alpha_{ir} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} [(dx_s - u_s dt) dt].$$

Si l'on y remplace les différences $dx_r - u_r dt$ par les expressions (19), on aura

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\omega_j \left(- \sum_{r=1}^{n} \alpha_{jr} d\alpha_{ir} - \sum_{rs=1}^{n} \alpha_{ir} \alpha_{js} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} dt \right) \right].$$

Les relations (6) entraînant l'identité

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{jr} d\alpha_{ir} + \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} d\alpha_{jr} = 0, \tag{20}$$

la dérivée ω_i' peut être écrite aussi comme il suit

$$\omega_i' = \sum_{j=1}^{n} \left[\omega_j \left(\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} d\alpha_{jr} - \sum_{rs=1}^{n} \alpha_{ir} \alpha_{js} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} dt \right) \right]. \tag{21}$$

Posons maintenant

$$\zeta_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right), \quad \eta_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right); \tag{22}$$

on aura évidemment

$$\zeta_{rs} + \zeta_{sr} = 0, \quad \eta_{rs} = \eta_{sr} \tag{23}$$

et

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s} = \zeta_{rs} + \eta_{rs}. \tag{24}$$

Avec ces notations la relation (21) devient

$$\omega_i' = \sum_{j=1}^{n} \left[\omega_j \left(\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} d\alpha_{jr} - \sum_{rs=1}^{n} \alpha_{ir} \alpha_{js} \zeta_{rs} dt \right) \right]$$
$$- \sum_{rsj=1}^{n} \alpha_{ir} \alpha_{js} \eta_{rs} [\omega_j dt].$$

Nous pouvons lui donner une forme plus condensée, en écrivant

$$\omega_i' + \sum_{j=1}^{n} [\omega_{ij} \omega_j] = \Omega_i, \tag{25}$$

où l'on a posé

$$\omega_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} d\alpha_{jr} - \sum_{rs=1}^{n} \alpha_{ir} \alpha_{js} \zeta_{rs} dt \tag{26}$$

et

$$\Omega_i = - \sum_{rsj=1}^{n} \alpha_{ir} \alpha_{js} \eta_{rs} [\omega_j dt]. \tag{27}$$

Remarquons qu'on a

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0; \tag{28}$$

ceci résulte immédiatement des formules (26) et des relations (20) et (23).

Revenons maintenant au système (17). Celui-ci entraînant l'équation $\bar{\omega}_i' = \omega_i'$, si l'on y remplace la dérivée extérieure ω_i' par l'expression (25) et la dérivée $\bar{\omega}_i'$ par une expression analogue et que l'on tient compte des équations du système (17), on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} [(\bar{\omega}_{ij} - \omega_{ij}) \omega_j] = \bar{\Omega}_i - \Omega_i$$

ou encore, en vertu des formules (27),

$$\sum_{j=1}^{n} [(\bar{\omega}_{ij} - \omega_{ij}) \omega_j] = - \sum_{rsj=1}^{n} \{\bar{\alpha}_{ir} \bar{\alpha}_{js} \bar{\eta}_{rs} - \alpha_{ir} \alpha_{js} \eta_{rs}\} [\omega_j dt]. \tag{29}$$

Les formes ω_j, dt étant indépendantes, pour que l'équation ci-dessus ait lieu, il faut que les différences $\bar{\omega}_{ij} - \omega_{ij}$ puissent s'exprimer d'une façon linéaire et homogène par les expressions ω_i, dt. Les équations (29) ont donc pour conséquence des relations de la forme

$$\bar{\omega}_{ij} - \omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} \omega_k + \gamma_{ij} dt, \tag{30}$$

dont les coefficients satisfont aux conditions suivantes

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = 0, \quad \gamma_{ij} + \gamma_{ji} = 0. \tag{31}$$

En introduisant les expressions (30) dans l'équation (29) et en identifiant les deux membres, on obtient des relations nouvelles entre les coefficients γ:

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{ikj}\,, \tag{32}$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{rs=1}^{n} \{\bar{\alpha}_{ir}\,\bar{\alpha}_{js}\,\bar{\gamma}_{|rs} - \alpha_{ir}\,\alpha_{js}\,\gamma_{|rs}\}. \tag{33}$$

Les relations (30) et (32) entraînent la nullité de tous les coefficients γ à trois indices; on a de même $\gamma_{ij} = 0$; en effet, les quantités $\gamma_{|rs}$ étant symétriques en r et s d'après leur définition (22), on a aussi $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$; si l'on rapproche ce résultat de la deuxième des relations (31), on trouve que les coefficients γ_{ij} sont tous nuls. Nous sommes ainsi conduit aux relations nouvelles $\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij}$ que l'on doit adjoindre aux équations du système (17).

En résumant les considérations précédentes, on peut énoncer la proposition suivante:

S'il existe une transformation du groupe (G), *transformant les systèmes* (12) *et* (13) *l'un dans l'autre, celle-ci peut être prolongée aux variables* α_{ij} *de manière que les équations suivantes*

$$\bar{t} = t,\ \bar{\omega}_i = \omega_i\,,\ \bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} \tag{34}$$

soient satisfaites,

Maintenant nous allons démontrer la réciproque suivante: *s'il existe des relations entre les variables* t, x_i, α_{ij} *d'une part et les variables* $\bar{t}$, $\bar{x}_i$, $\bar{\alpha}_{ij}$ *d'autre part, réalisant les équations* (34), *les systèmes* (12) *et* (13) *sont équivalents par rapport au groupe* (G).

Observons en premier lieu que, d'après les équations $\bar{t} = t$, $\omega_i = \omega_i$, il existe n relations entre les différentielles $d\bar{x}_i$, dx_i, dt, indépendantes en $d\bar{x}_i$. Il en résulte que la transformation qui réalise les équations (34) entraîne des relations suivantes

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ \bar{t} = t. \tag{35}$$

En portant ces expressions dans les équations $\bar{\omega}_i = \omega_i$, qui peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\sum_{r=1}^{n} \bar{\alpha}_{ir}(d\bar{x}_r - \bar{u}_r\,dt) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir}(dx_r - u_r\,dt)\,, \tag{36}$$

on trouve

$$\sum_{r=1}^{n} \bar{\alpha}_{ir}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_s}\,dx_s + \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial t}\,dt - \bar{u}_r\,dt\right) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir}(dx_r - u_r\,dt)\,;$$

cette relation étant une identité, on en déduit

$$\sum_{r=1}^{n} \bar{\alpha}_{ir}\,\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_s} = \alpha_{is}\,, \tag{37}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \bar{\alpha}_{ir}\left(\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial t} - \bar{u}_r\right) = -\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir}\,u_r\,. \tag{38}$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (37) par $\bar{\alpha}_{it}$ et que l'on fait la somme par rapport à l'indice i, en ayant égard aux relations (6), on sera conduit aux équations,

$$\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_s} = a_{rs}\,, \tag{39}$$

où l'on a posé

$$a_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_{ir}\,\alpha_{is}\,. \tag{40}$$

Observons que, les quantités $\bar{\alpha}_{ir}$, α_{is} étant des coefficients de deux substitutions orthogonales, il en est de même pour les grandeurs a_{rs}.

En résolvant les équations (36) par rapport aux expressions $d\bar{x}_r - \bar{u}_r\,d\bar{t}$ et en tenant compte des relations (39) et (40), on obtient

$$d\bar{x}_r - \bar{u}_r\,d\bar{t} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_s}(dx_s - u_s\,dt).$$

De même, les équations (38) nous conduisent à l'identité

$$\bar{u}_r = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_s}\,u_s + \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial t}\,.$$

On voit donc que les systèmes d'équations (12) et (13) sont équivalents par rapport à la transformation (35). Pour achever la démonstration

de la réciproque il nous reste encore de montrer que cette transformation appartient au groupe (G). Or, d'après la formule (40) on a

$$d\,a_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ir}\, d\,a_{is} + \sum_{i=1}^{n} a_{is}\, d\,\bar{a}_{ir}\,.$$

Si l'on y substitue les expressions suivantes

$$d\,a_{is} = \sum_{q=1}^{n} a_{qs}\,\omega_{qi} - \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\,\zeta_{qs}\,d\,t,\quad d\,\bar{a}_{ir} = \sum_{q=1}^{n} \bar{a}_{qr}\,\bar{\omega}_{qi} - \sum_{q=1}^{n} \bar{a}_{iq}\,\zeta_{qr}\,d\,t,$$

tirées des équations (26), on sera conduit aux relations qui peuvent s'écrire comme il suit

$$d\,a_{rs} = \sum_{pq=1}^{n} \bar{a}_{pr}\,a_{qs}\,(\bar{\omega}_{pq} + \omega_{qp}) - \sum_{q=1}^{n} a_{qs}\,\zeta_{qr}\,d\,t - \sum_{q=1}^{n} a_{rq}\,\zeta_{qs}\,d\,t.$$

Mais, en vertu des équations (34) et (28), on a

$$\bar{\omega}_{pq} + \omega_{qp} = \omega_{pq} + \omega_{qp} = 0.$$

Donc

$$d\,a_{rs} = -\sum_{q=1}^{n} (a_{qs}\,\zeta_{qr} + a_{rq}\,\zeta_{qs})\,d\,t.$$

Ceci montre que les coefficients a_{rs} ne dépendent que de la variable t. Eu égard aux formules (39), on en déduit que le transformation (35) est de la forme suivante

$$\bar{x}_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\,x_r + a_i\,,$$

les coefficients a_i étant des fonctions arbitraires de la variable t. Ceci montre que la transformation (35) est une transformation du groupe (G), c'est ce qu'il fallait démontrer.

Le problème de l'équivalence des système (12) et (13) par rapport au groupe (G) est ainsi réduit à celui de deux systèmes t, ω_i, ω_{ij} et $\bar{t}, \bar{\omega}_i, \bar{\omega}_{ij}$. Or, ce dernier problème se résout par la méthode générale de M. Cartan[5]). Pour l'appliquer au cas actuel il faut différentier extérieurement les équations $\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij}$. Si l'on effectue cette opération sur les formes ω_{ij}, données par les formules (26), on obtient par un calcul facile les relations suivantes

$$\omega'_{ij} + \sum_{r=1}^{n} [\omega_{ir}\,\omega_{rj}] = \Omega_{ij}\,, \tag{41}$$

les formes Ω_{ij} étant définies par les égalités

$$\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} K_{ijk}\,[\omega_k\,d\,t] \tag{42}$$

et

$$K_{ijk} = -\sum_{rst=1}^{n} a_{ir}\,a_{js}\,a_{kt}\,\frac{\partial\,\zeta_{rs}}{\partial\,x_t} \tag{43}$$

En poursuivant ainsi cette méthode, on sera conduit aux invariants différentielles du système (12), trouvés par M. Żorawski.

3. Après avoir étudié le problème d'équivalence de deux mouvements d'un milieu continu, nous en déduirons une géométrie généralisée. Désignons pour ce but par $x_1, \ldots, x_n, t$ les coordonnées d'un point arbitraire M de l'espace euclidien E_{n+1} rapporté à un repère rectangulaire (R), formé de l'origine O et de $n+1$ vecteurs unitaires $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \ldots \bar{I}_n, \bar{I}$. On aura donc

$$\overline{OM} = x_1\,I_1 + \ldots + x_n\,\bar{I}_n + t\,\bar{I}.$$

Comme *groupe fondamental* de l'espace E_{n+1} nous prendrons le groupe de transformations suivantes

$$\bar{x}_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\,x_r + a_i\,,\quad \bar{t} = t \tag{44}$$

les symboles a_{ir} désignant des coefficients d'une substitution orthogonale à n variables et les symboles a_i des constantes arbitraires.

Nous allons définir dans la variété euclidienne E_{n+1} une nouvelle connexion, induite par le mouvement continu

[5]) E. Cartan l. c.

$$\frac{d x_i}{d t} = u_i (t, x_1, \ldots, x_n) \tag{12}$$

et désignée dans la suite par le symbole $\mathfrak{W}^0_{n+1}$. Imaginons, à cet effet, au point M de l'espace E_{n+1} un repère cartésien (R_M) ayant ce point pour l'origine et tel que ses axes soient parallèles aux axes du repère (R). Or, nous convenons que dans la connexion $\mathfrak{W}^0_{n+1}$ les repères attachés deux points infiniment voisins $M(x_i, t)$ et $M'(x_i + d x_i, t + d t)$ sont liés par les relations

$$\begin{gathered} \overline{d M} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^0 \overline{I}_i + d t \overline{I}, \\ d \overline{I}_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji}^0 \overline{I}_i, \; d \overline{I} = 0, \end{gathered} \tag{45}$$

où l'on a posé

$$\omega_i^0 = d x_i - u_i d t, \; \omega_{ij}^0 = - \zeta_{ij} d t, \tag{46}$$

les coefficients ζ_{ij} ayant la même signification que précédemment (n° 2). Des équations (45) on déduit d'une façon bien connue les *équations de structure* de la connexion $\mathfrak{W}^0_{n+1}$; les voici

$$(\omega_i^0)' + \sum_{j=1}^{n} [\omega_{ij}^0 \omega_j^0] = \Omega_i^0, \; (\omega_{ij}^0)' + \sum_{r=1}^{n} [\omega_{ir}^0 \omega_{rj}^0] = \Omega_{ij}^0. \tag{47}$$

Il est facile de vérifier que les composantes du tenseur de torsion Ω_i^0 et du tenseur de courbure Ω_{ij}^0 sont données par les formules

$$\begin{gathered} \Omega_i^0 = - \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} [\omega_i^0 d t], \; \Omega_{ij}^0 = - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \zeta_{ij}}{\partial x_k} [\omega_k^0 d t], \\ \eta_{ij} = \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{gathered} \tag{48}$$

La première des équations (47) est susceptible d'une simple interprétation cinématique; pour l'obtenir nous écrirons cette équation de la manière suivante

$$\delta \omega_i^0 (d) - d \omega_i^0 (\delta) + \sum_{j=1}^{n} \{ \omega_{ij}^0 (\delta) \omega_j^0 (d) - \omega_{ij}^0 (d) \omega_j^0 (\delta) \}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} \{ \omega_j^0 (\delta) d t - \omega_j^0 (d) \delta t \}, \tag{49}$$

en désignant par d et δ deux systèmes distincts de différentiation. Choisissons ces différentiations de façon que l'on ait

$$\delta x_i = u_i \delta t, \; d t = 0.$$

Alors, on aura (v. les formules (46))

$$\omega_i^0 (d) = d x_i, \; \omega_i^0 (\delta) = 0, \; \omega_{ij}^0 (d) = 0$$

et l'équation (49) deviendra

$$\delta d x_i = \sum_{j=1}^{n} \{ \zeta_{ij} + \eta_{ij} \} d x_j \delta t.$$

On voit donc bien que pendant le mouvement continu, défini par les équations (12), l'élément linéaire $d x_i$ éprouve dans l'intervalle du temps δt une rotation infinitésimale de composantes $\zeta_{ij} \delta t$ et une dilatation infinitésimale de composantes $\eta_{ij} \delta t$. Ajoutons encore que le tenseur Ω_i^0 est un cas particulier du tenseur de dilatation (Dehnungstensor) de M. Wundheiler [6]).

Pour définir la connexion $\mathfrak{W}^0_{n+1}$ nous nous avons servi de repères parallèles de l'espace euclidien E_{n+1}. Si on utilise des repères orthogonales arbitraires, on aura, au lieu des équations (46), des formules analogues d'une forme un peu plus générale

$$\omega_i = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} (d x_r - u_r d t), \; \omega_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} d \alpha_{jr} - \sum_{rs=1}^{n} \alpha_{ir} \alpha_{js} \zeta_{rs} d t,$$

les symboles α_{ij} désignant des fonctions des variables x_i, t, satisfaisant aux identités (6). Les tenseurs de torsion et de courbure seront maintenant donnés par les formules (27) et (42) et les équations de structure s'obtiennent, en supprimant dans les relations (47) l'indice o. Signalons encore que l'interprétation cinématique donnée plus haut ne cesse pas d'être vraie dans le cas des repères arbitraires, il faut seulement remarquer que la rotation infinitésimale se compose maintenant de deux par-

[6]) A. Wundheiler, l. c.

tiés, dont l'une provient du choix des repères et l'autre du mouvement du milieu continu.

En résumant les considérations du présent $n^{\underline{o}}$, nous pouvons dire que *la connexion* $\mathfrak{W}^0_{n+1}$ *est invariablement liée au système d'équations*

$$\frac{d x_i}{d t} = u_i (t, x_1, \ldots, x_n)$$

par rapport au groupe (G). Le problème d'équivalence posé dans le $n^{\underline{o}}$ 2 se réduit donc au problème d'isomorphisme de deux connexions $\mathfrak{W}^0_{n+1}$ vis-à-vis du groupe (G).

4. La notion de la connexion $\mathfrak{W}^0_{n+1}$ peut être géneralisée et c'est cette généralisation qui est identique à la géométrie rhéonome imaginée par M. Wundheiler. Considérons, pour présenter cette généralisation, la forme définie positive

$$\phi = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\, d x_i\, d x_j - 2 \sum_{i=1}^{n} u_i\, d x_i\, d t + a\, d t^2$$

à $n+1$ variables t, x_i. On peut évidemment l'écrire de la façon suivante

$$\phi = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} (d x_i - u_i\, d t)(d x_j - u_j\, d t) + A\, d t^2. \tag{50}$$

Or il est toujours possible, et d'une infinité de manières de décomposer cette forme en une somme de carrés de $n+1$ formes différentielles linéaires. Soit

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \omega^2 \tag{51}$$

une de ces décompositions; les n formes ω_i sont linéaires et homogènes en $d x_j - u_j\, d t$ et la forme ω est donnée par la formule

$$\omega = \sqrt{A}\, d t.$$

Maintenant nous nous proposons de déterminer n^2 nouvelles formes linéaires ω_{ij} et n formes extérieures quadratiques Ω_i de telle manière que l'on ait

$$\omega_i' + \sum_{j=1}^{n} [\omega_{ij}\, \omega_j] = \Omega_i. \tag{52}$$

Nous supposons de plus que les formes cherchées doivent satisfaire aux conditions supplémentaires suivantes

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{53}$$

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} [\omega_j\, d t], \quad \eta_{ij} = \eta_{ji}. \tag{54}$$

Nous allons montrer qu'avec ces conditions les formes ω_{ij}, Ω_i sont complètement déterminées.

Remarquons en effet que les dérivées ω_i' peuvent être présentées sous la forme suivante

$$\omega_i' = \sum_{(rs)=1}^{n} h_{irs} [\omega_r\, \omega_s] + \sum_{r=1}^{n} h_{ir} [\omega_r\, d t], \tag{55}$$

le symbole $\sum\limits_{(rs)=1}^{n}$ désignant la somme étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices r, s, qui peuvent varier de 1 à n et les coefficients h_{irs} étant assujetties aux conditions

$$h_{irs} + h_{isr} = 0. \tag{56}$$

D'autre part on peut poser

$$\omega_{ij} = \sum_{r=1}^{n} l_{ijr}\, \omega_r + l_{ij}\, d t, \tag{57}$$

les coefficients l_{ijr}, l_{ij} vérifiant les relations

$$l_{ijr} + l_{jir} = 0, \quad l_{ij} + l_{ji} = 0. \tag{58}$$

En remplaçant dans l'équation (52) les formes ω_i', ω_{ij}, Ω_i par leurs expressions (55), (57) et (54), on trouve

$$\sum_{(rs)=1}^{n} h_{irs} [\omega_r\, \omega_s] + \sum_{r=1}^{n} h_{ir} [\omega_r\, d t] + \sum_{rs=1}^{n} l_{irs} [\omega_r\, \omega_s] - \sum_{r=1}^{n} l_{ir} [\omega_r\, d t]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \eta_{ir} [\omega_r\, d t].$$

Les formes ω_i, $d t$ étant indépendantes, on en déduit

$$h_{irs} + l_{isr} - l_{irs} = 0, \tag{59}$$

$$h_{ir} = l_{ir} + \eta_{ir}. \tag{60}$$

En tenant compte de la première des conditions (58), la relation (59) peut s'écrire sous la forme

$$l_{irs} + l_{sir} = h_{irs}. \tag{61}$$

En y permutant deux fois circulairement les indices i, r, s et en ajoutant les relations obtenues à la relation initiale, on sera conduit à l'équation suivante

$$l_{irs} + l_{rsi} + l_{sir} = \frac{1}{2}(h_{irs} + h_{rsi} + h_{sir}).$$

En la rapprochant encore de l'équation (61), on obtient

$$l_{rsi} = \frac{1}{2}(-h_{irs} + h_{rsi} + h_{sir}). \tag{62}$$

D'autre part on voit bien que, d'après les relations (60), (58) et (54), les grandeurs l_{ir} représentent la partie antisymétrique et les grandeurs η_{ir} la partie symétrique des quantités h_{ir}; donc

$$l_{ir} = \frac{1}{2}(h_{ir} - h_{ri}), \eta_{ir} = \frac{1}{2}(h_{ir} + h_{ri}). \tag{63}$$

Les formules (62) et (63) montrent qu' *à toute décomposition de la forme* ψ *en une somme* (51) *correspondent, d'une manière complètement déterminée, les expressions* ω_{ij} *et* Ω_i *satisfaisant aux relations* (52) *et aux conditions* (53) *et* (54).

Les formes ω_{ij} une fois déterminées, posons

$$\omega_{ij} + \sum_{r=1}^{n} [\omega_{ir}\, \omega_{rj}] = \Omega_{ij},$$

ce qui nous permet de définir les formes quadratiques extérieures Ω_{ij}.

Attachons maintenant à chaque point M de la variété (x_i, t) un espace euclidien de groupe fondamental (44) et rapportons le au repère (R) défini au commencement du $n^{\underline{o}}$ **3.** Nous raccorderons les repères

attachés à deux points infiniment voisins au moyen de la loi suivante

$$\overline{dM} = \omega_1 \overline{I}_1 + \ldots + \omega_n \overline{I}_n + \omega \overline{I}, \quad d\overline{I}_i = \Sigma\, \omega_{ji} \overline{I}_j, \; d\overline{I} = 0$$

les symboles ω_i, ω ayant la même signification que plus haut. Nous obtenons ainsi la connexion dont la *structure* est définie par les équations

$$\omega_i' + \sum_{j=1}^{n} [\omega_{ij}\, \omega_j] = \Omega_i, \; \omega' = \Omega$$

$$\omega_{ij}' + \sum_{r=1}^{n} [\omega_{ir}\, \omega_{rj}] = \Omega_{ij}.$$

Ajoutons encore qu'à un changement de la décomposition de la forme ψ en une somme de la forme (51) correspond un autre choix du repère (R) ce qui ne touche en rien la structure de la connexion.

Nous avons ainsi montré qu'avec la forme quadratique ψ est liée une géométrie généralisée d'après une loi invariante par les transformations cinématiques

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i(x_1, \ldots, x_n, t), \; \overline{t} = t.$$

Cette géométrie est identique à la géometrie rhéonome de M. Wundheiler.

Streszczenie.

W rozprawie p. t. „Rhéonome Geometrie. Absolute Mechanik", ogłoszonej w t. 40 Prac matematyczno-fizycznych, p. A. Wundheiler rozwinął podstawy geometrji odkształcających się przestrzeni riemannowskich. Ze stanowiska analitycznego geometrja ta jest teorją spółzmienników formy kwadratowej

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, dx_i\, dt + A\, dt^2$$

ze względu na grupę przekształceń kinematycznych

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n, t), \; \bar{t} = t,$$

W pracy niniejszej wykazuję, że teorję geometrji reonomicznej można skonstruować, wychodząc z następującego zagadnienia równoważności: dane są dwa ruchy ciągłego ośrodka w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej; zbadać, czy ruchy te można przeprowadzić jeden w drugi za pomocą przekształcenia euklidesowego o spółczynnikach będących funkcjami czasu t. Zagadnienie to postawił i rozwiązał prof. K. Żorawski w rozprawie ogłoszonej w r. 1911 w Biuletynie Akademji Umiejętności w Krakowie. W ust. **1** i **2** tego artykułu rozwijam inne rozwiązanie tego zagadnienia, oparte na zastosowaniu układów form Pfaffa. W następnych dwóch ustępach wyprowadzam z równań zagadnienia równoważności teorję koneksji reonomicznej oraz uzasadniam równania jej struktury.

On the representations of a number as a sum of squares.

By

T. Estermann (London).

Introduction.

If $r_s(n)$ denotes the number of solutions of the equation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 = n$$

in integers $x_1, x_2, \ldots, x_s$, and [1])

$$\vartheta_3(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i m^2 \tau} \qquad (\Im \tau > 0), \tag{1}$$

then

$$\{\vartheta_3(\tau)\}^s = \sum_{n=0}^{\infty} r_s(n) e^{\pi i n \tau} \qquad (\Im \tau > 0). \tag{2}$$

The object of this paper is to use (2) for the evaluation of $r_s(n)$ in the cases $s = 5, 6, 7, 8$ in a more elementary way than has been done before [2]). Thus I hope to make the subject accessible even to those

[1]) Readers familiar with elliptic functions will perhaps prefer the notation $\vartheta_3(0|\tau)$, but the simpler notation $\vartheta_3(\tau)$ is sufficient for the present purpose.

[2]) Hardy, Trans. American Math. Soc. 21 (1920), 255—284, and Proc. Nat. Acad. of Sciences 4 (1918), 189—193.

Mordell, Quart. J. of. Math. 48 (1917), 93—104 and Trans. Camb. Phil. Soc. 22 (1919), 361—372.

Dickson, Studies in the Theory of Numbers (1930), ch. XIII.