Über einen Satz von A. Khintchine. Zweite Mitteilung[1]).

Von

Vojtěch Jarník (Praha).

§ 1. Einleitung.

Es sei s ganz, $s \geqq 1$; es seien $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ reelle Zahlen[2]). Dann gelten folgende wohlbekannte Sätze, die sehr einfach mit Hilfe des Dirichletschen Fächerprinzips zu beweisen sind:

I. Es gibt unendlichviele verschiedene Systeme ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ mit

$$x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|) > 0, \left|\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1}\right| < \frac{1}{x^s}.$$

II. Es gibt unendlichviele verschiedene Systeme ganzer Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit

$$q > 0, \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Wir führen nun folgende Definition ein: *Gegeben sei ein System* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *von reellen Zahlen* $(s \geqq 1)$. *Dann sei*

[1]) Die erste Mitteilung ist in Prace Matematyczno-Fizyczne 43 (1936), S. 151—166 erschienen; die vorliegende Abhandlung ist ganz unabhängig von der 1. Mitteilung lesbar.

[2]) Alle Zahlen dieser Abhandlung sind reell; nur die Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ im Beweis des Hauptsatzes für $\beta = 0$ brauchen nicht reell zu sein.

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$$

die obere Grenze derjenigen Zahlen α, für welche die Ungleichungen

$$x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|) > 0, \left|\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1}\right| < \frac{1}{x^{s+\alpha}}$$

unendlichviele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ besitzen. Analog sei

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$$

die obere Grenze derjenigen Zahlen α, für welche die Ungleichungen

$$q > 0, \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1+\alpha}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

unendlichviele Lösungen in ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ besitzen.

Nach den angeführten Sätzen ist stets

$$0 \leqq \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \infty, \quad 0 \leqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \infty.$$

Für $s = 1$ ist trivialerweise $\beta_1(\theta_1) = \beta_2(\theta_1)$; für $s > 1$ hat Herr A. Khintchine bewiesen[3]): stets ist

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s), \tag{1}$$

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \frac{\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{(s-1)\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) + s^2}. \tag{2}$$ [4])

In der ersten Mitteilung habe ich bewiesen, dass die Ungleichung (2) für jeden vorgeschriebenen Wert von $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ scharf ist; hier soll dasselbe für die Ungleichung (1) bewiesen werden. Unser Ziel ist also gegeben durch den folgenden

Hauptsatz. *Es sei s ganz, $s > 1$, $0 \leqq \beta \leqq \infty$. Dann gibt es ein System reeller Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ mit*

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta.$$

Um dem Leser das Nachschlagen zu ersparen, reproduziere ich zunächst den einfachen Beweis von (1)[5]). Es sei also $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ ein System von s $(s > 1)$ reellen Zahlen. Gilt eine Beziehung

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1} = 0$$

mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$, so ist offenbar $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$, also (1) wahr. Sonst sei $-s < \beta < \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$. Ist $c > 0$, so gibt es ganze Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit

$$q > c, \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1+\beta}{s}}}.$$

Nach dem Dirichletschen Fächerprinzip kann man leicht schliessen, dass die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{s} p_i x_i \equiv 0 \pmod{q}$$

mindestens eine Lösung in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ mit

$$0 < x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|) \leqq q^{\frac{1}{s}}$$

besitzt; bei geeignetem ganzen x_{s+1} ist also

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{q} x_i + x_{s+1} = 0,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i + x_{s+1}\right| < \frac{s x}{q^{1+\frac{1+\beta}{s}}} \leqq \frac{s}{x^{s+\beta}}. \tag{3}$$

Für $c \to \infty$ strebt die nichtverschwindende linke Seite von (3) gegen Null, also durchläuft das System $x_1, x_2, \ldots, x_s$ unendlichviele verschiedene Systeme, also ist $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta$ für jedes $\beta < \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, also gilt (1).

Wir wollen noch gleich zwei einfache Fälle des Hauptsatzes erledigen. Für $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_s = 1$ ist $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$, also ist der Hauptsatz wahr für $\beta = \infty$.[6])

---

[3]) A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Palermo-Rendiconti 50 (1926), 170—195; vgl. insb. S. 189—195.

[4]) Dabei soll

$$\frac{\infty}{(s-1)\infty + s^2} = \frac{1}{s-1}$$

gesetzt werden.

[5]) Schwieriger ist der Beweis von (2). Umgekehrt, der Beweis, dass diese Ungleichungen scharf sind, scheint mir für (1) schwieriger zu sein als für (2).

[6]) Man kann sogar auch *linear unabhängige* Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ mit $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$ (also $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \infty$) konstruieren; vgl. O. Perron, Über diophantische Approximationen, Math. Annalen 83 (1921), 77—84.

Aber auch für $\beta = 0$ ist der Hauptsatz bereits bekannt und leicht zu beweisen; wir geben hier einen einfachen Beweis, dessen Grundgedanke einer wichtigen Abhandlung des Herrn O. Perron[7]) entnommen ist. Es sei θ_0 eine reelle ganze algebraische Zahl $(s+1)$-ten Grades; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ seien die zu θ_0 konjugierten Zahlen; es sei

$$M = \operatorname{Max}(1, |\theta_0|, |\theta_1|, \ldots, |\theta_s|), \quad a = (3\,s\,M^s)^{-s}.$$

Sind dann $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ ganze Zahlen mit $0 < x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|)$, so ist

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_0^{\,i} + x_{s+1}\right| \geqq \frac{a}{x^s}. \tag{4}$$

Denn sonst wäre

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_0^{\,i} + x_{s+1}\right| < \frac{a}{x^s},$$

also

$$|x_{s+1}| < s\,x\,M^s + 1 < 2\,s\,x\,M^s,$$

also

$$\left|\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_j^{\,i} + x_{s+1}\right| < 3\,s\,x\,M^s \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, s,$$

also

$$\left|\prod_{j=0}^{s}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i \theta_j^{\,i} + x_{s+1}\right)\right| < a\,(3\,s\,M^s)^s = 1;$$

das geht aber nicht, da die linke Seite eine ganze rationale Zahl ist und nicht Null sein kann. Damit ist (4) bewiesen, also ist $\beta_1(\theta_0, \theta_0^2, \ldots, \theta_0^s) = 0$, also nach (1) auch $\beta_2(\theta_0, \theta_0^2, \ldots, \theta_0^s) = 0$.

Es genügt uns also, den Hauptsatz für $0 < \beta < \infty$ zu beweisen. Der Beweis wird etwa folgendermassen geführt: Die Systeme $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ werden als Punkte eines s-dimensionalen cartesischen Raumes aufgefasst. Dann wird erstens eine im Würfel $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ enthaltene abgeschlossene Menge E konstruiert, so dass für jeden Punkt von E die Ungleichung

$$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta$$

gilt; zweitens wird eine Menge E_1 konstruiert (im folgenden wird sie mit $P_2 + P_3 + P_4 + \ldots$ bezeichnet), welche alle diejenigen Punkte des Würfels $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ enthält, für welche

[7]) L. c. [6]).

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) > \beta$$

ist und schliesslich wird bewiesen, dass $E - E_1 \neq 0$ ist d. h., dass es einen Punkt von E gibt, der E_1 nicht angehört. Damit wird der Beweis fertig sein, denn für jeden Punkt aus $E - E_1$ ist $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta \geqq \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, also nach (1) $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta$.

Die bei dem Beweis benutzten Hilfsmittel sind äusserst elementar; der Beweis selbst ist aber nicht ganz einfach.

§ 2. Konstruktion der Menge E.

Bis zum Schluss dieser Abhandlung sind fest gegeben: eine ganze Zahl $s > 1$ und eine Zahl $\beta > 0$. Mit k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 bezeichnen wir positive absolute Konstanten, mit c_1, c_2 positive Zahlen, die nur von s abhängen.

Der wichtigste Punkt dieses Paragraphen ist der Hilfssatz 3, dessen Grundgedanke von Herrn A. Khintchine[8]) stammt; ich habe übrigens schon einmal einen verwandten Hilfssatz benutzt[9]). Die Hilfssätze 1, 2 sind trivial.

Hilfssatz 1. *Man kann die natürlichen Zahlen k_1 und k_2 derart bestimmen, dass es zu jedem $Q > k_1$ eine Primzahl $\mathfrak{q}$ mit $2\,Q < \mathfrak{q} < k_2\,Q$ gibt.*

Beweis. Ist π_r die *r-te* Primzahl, so ist bekanntlich

$$k_3\,r \log r < \pi_r < k_4\,r \log r \tag{5}$$

für $r = 2, 3, \ldots$[10]). Wird

$$k_1 > k_3 \log 2, \quad k_2 > 3\,\frac{k_4 \log 3}{k_3 \log 2}$$

gewählt und ist $Q > k_1$, so gibt es ein ganzes $r \geqq 3$ mit

$$k_3\,(r-1)\log(r-1) \leqq 2\,Q < k_3\,r \log r;$$

dann gilt (5), also

$$2\,Q < \pi_r < k_4\,r \log r \leqq 2\,Q\,\frac{k_4\,r \log r}{k_3\,(r-1)\log(r-1)} \leqq k_2\,Q.$$

[8]) A. Khintchine, Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr 24 (1926), 706—714, vgl. insb. den Hilfssatz 3.

[9]) V. Jarník, Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. 33 (1931), 505—543, Hilfssatz 3.

[10]) (5) lässt sich elementar beweisen; vgl. z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I (Leipzig 1927), S. 68, Satz 113; den wesentlich tiefer liegenden Primzahlsatz brauchen wir nicht.

Für ganzes $h>0$ sei $\varphi(h)$ die Anzahl der zu h teilerfremden Restklassen modulo h. Ist $\varphi(h)>\frac{h}{8}$, so heisse die Zahl h „normal".

Hilfssatz 2. *Es gibt eine ganze Zahl $k_5>0$, so dass für jedes ganze $n\geqq k_5$ sich unter den Zahlen $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ mindestens $\frac{n}{5}$ normale Zahlen befinden.*

Beweis. Bekanntlich ist [11])

$$\sum_{h=1}^{n-1}\varphi(h)=\frac{3}{\pi^2}n^2+O(n\log n);$$

wegen $\frac{1}{4}<\frac{3}{\pi^2}<\frac{1}{3}$ gibt es ein ganzes $k_5>0$, so dass für jedes ganze $n\geqq k_5$ gilt

$$\sum_{h=n}^{2n-1}\varphi(h)>\frac{1}{4}(2n)^2-\frac{1}{3}n^2=\frac{2}{3}n^2. \tag{6}$$

Wäre nun die Behauptung für ein ganzes $n\geqq k_5$ falsch, so wäre (wegen $\varphi(h)\leqq h$)

$$\sum_{h=n}^{2n-1}\varphi(h)<\frac{n}{5}\cdot 2n+\frac{1}{8}\cdot 2n\cdot n=\frac{13}{20}n^2<\frac{2}{3}n^2,$$

im Widerspruch zu (6).

Hilfssatz 3. *Es gibt zwei Zahlen $c_1>0, c_2>0$ und eine nur von s und Q abhängige Zahl $d(Q)>0$ mit folgender Eigenschaft:*

Ist $Q>c_1$, $z>d(Q)$ und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ reelle Zahlen, so gibt es im s-dimensionalen cartesischen Raume der Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ eine endliche Punktmenge

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$$

mit folgenden Eigenschaften: ist N die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}$ und sind $P_1, P_2, \ldots, P_N$ die Punkte von $\mathfrak{M}$, so gilt:

1. *Jeder Punkt P_n $(1\leqq n\leqq N)$ hat die Gestalt $P_n=\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right)$, wo jede Zahl p_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ ganz und zu der ganzen Zahl q teilerfremd ist; dabei ist*

[11]) F. Mertens, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 77 (1874), 289—338, insbes. S. 289—291.

$$z\leqq q\leqq k_2 z Q^{\frac{1}{s+1}}. \tag{7}$$

2. *Konstruiert man um jeden Punkt P_n $(n=1, 2, \ldots, N)$ einen abgeschlossenen Würfel* [12]) *von der Kantenlänge $z^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind diesen Würfel paarweise fremd und liegen alle im Würfel*

$$\frac{\alpha_i}{Q}\leqq\theta_i\leqq\frac{\alpha_i+1}{Q}\ (i=1, 2, \ldots, s). \tag{8}$$

3.

$$N>c_2\frac{z^{s+1}}{Q^s}. \tag{9}$$

Beweis. Wir wählen erstens c_1 so, dass

$$c_1>(3\cdot 32\cdot 2\cdot 3)^{s+1}>16,\ c_1>k_1\ ^{13}). \tag{10}$$

Zu jedem $Q>c_1$ wählen wir ein $d(Q)$, so dass für $z>d(Q)$ folgendes gilt:

$$\begin{cases} z>k_2 k_5 Q;\ z^{\frac{1}{s}}>\dfrac{(k_2 Q)^{\frac{1}{s+1}}}{32\cdot 2\cdot 3}; \\ \dfrac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{z}{(k_2 Q)^{\frac{s}{s+1}}}>\mathrm{Max}(k_5, k_2 Q); \end{cases} \tag{11}$$

endlich setzen wir

$$c_2=\left(\frac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\right)^{s+1}\cdot\frac{1}{10\,k_2^s}\cdot\frac{1}{16^s}. \tag{12}$$

Es sei nun $Q>c_1$, $z>d(Q)$ und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ reelle Zahlen. Man wähle zunächst eine Primzahl $\mathfrak{q}$ mit

$$2Q<\mathfrak{q}<k_2 Q \tag{13}$$

(vgl. (10) und Hfs. 1) und man setze

$$b=\left[\frac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{z}{\mathfrak{q}^{\frac{s}{s+1}}}\right]; \tag{14}$$

nach (11), (13), (14) ist (k_5 ist ganz!)

[12]) Unter einem Würfel verstehe ich stets einen s-dimensionalen Würfel, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind.

[13]) Der Punkt bedeutet stets das Multiplikationszeichen.

$$(15)\qquad b \geqq k_5 \geqq 1,\ b+1 > k_2 Q > \mathfrak{q},\ 2b+1 \leqq 3b \leqq \frac{1}{32\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{z}{\mathfrak{q}^{\frac{s}{s+1}}}.$$

Wegen $\frac{\mathfrak{q}}{Q} > 2$ gibt es ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ mit

$$\alpha_i \frac{\mathfrak{q}}{Q} < a_i < a_i + 1 < (\alpha_i + 1)\frac{\mathfrak{q}}{Q},$$

also

$$(16)\qquad \frac{\alpha_i}{Q} < \frac{a_i}{\mathfrak{q}} < \frac{a_i+1}{\mathfrak{q}} < \frac{\alpha_i+1}{Q}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Es sei nun $\mathfrak{B}$ die Menge aller Punkte

$$(17)\qquad \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right),$$

welche folgende Eigenschaften besitzen:

1.) $q = \bar{q}\mathfrak{q}$, $\bar{q}$ ganz,

$$(18)\qquad b+1 \leqq \bar{q} \leqq 2b+1.$$

2.) Jede Zahl $p_i\ (i = 1, 2, \ldots, s)$ ist ganz und zu q teilerfremd.

3.)

$$(19)\qquad \frac{a_i}{\mathfrak{q}} \leqq \frac{p_i}{q} < \frac{a_i+1}{\mathfrak{q}}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Da $(p_i, q) = 1$, $q = \bar{q}\mathfrak{q} > \mathfrak{q}$, so kann man statt (19) auch

$$(20)\qquad \frac{a_i}{\mathfrak{q}} < \frac{p_i}{q} < \frac{a_i+1}{\mathfrak{q}}\ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

schreiben[14]).

Wir bemerken zuerst: aus (18), (15), (13), (11) folgt

$$(21)\qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{q}\mathfrak{q}} \geqq \frac{1}{(2b+1)\mathfrak{q}} \geqq \frac{32\cdot 2\cdot 3}{z\,\mathfrak{q}^{\frac{1}{s+1}}} > \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}.$$

Konstruiert man also um jeden Punkt von $\mathfrak{B}$ als Mittelpunkt einen

[14]) Bis zum Schluss des Beweises des Hilfssatzes 3. machen wir folgende Verabredung: Wird ein Punkt in der Gestalt $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right)$ oder $\left(\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}\right)$ geschrieben, so wird dabei stillschweigend folgendes vorausgesetzt: q, q', p_i, p_i' ganz, $(p_i, q) = (p_i', q') = 1\ (i = 1, 2, \ldots, s)$; $q = \bar{q}\mathfrak{q}$, $q' = \bar{q}'\mathfrak{q}$; $\bar{q}, \bar{q}'$ ganz, $b+1 \leqq \bar{q} \leqq 2b+1$, $b+1 \leqq \bar{q}' \leqq 2b+1$.

abgeschlossenen Würfel von der Kante $z^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind wegen (16), (20), (21) alle diese Würfel im Würfel (8) enthalten. Weiter folgt aus (18), (14), (15), (13), (10):

$$z < z\frac{c_1^{\frac{1}{s+1}}}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3} < z\frac{\mathfrak{q}^{\frac{1}{s+1}}}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3} < q =$$

$$= \bar{q}\mathfrak{q} \leqq \frac{z}{32\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{q}^{\frac{1}{s+1}} < \frac{z}{32\cdot 2\cdot 3}(k_2 Q)^{\frac{1}{s+1}} < k_2 z\, Q^{\frac{1}{s+1}}.$$

Um den Hilfssatz 3 zu beweisen, genügt es also, eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{B}$ zu konstruieren, welche folgende Eigenschaften besitzt:

A. Sind

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right),\ \left(\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}\right)$$

zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}$, so gilt mindestens eine von den s Ungleichungen

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| > \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

B. Ist N die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}$, so gilt (9).

Zu diesem Zweck definieren wir $\mathfrak{M}$ folgendermassen: $\mathfrak{M}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{B}$ und ein Punkt (17) gehört dann und nur dann *nicht* zu $\mathfrak{M}$, wenn es in $\mathfrak{B}$ einen von (17) verschiedenen Punkt

$$(22)\qquad \left(\frac{p_1'}{q'}, \frac{p_2'}{q'}, \ldots, \frac{p_s'}{q'}\right)$$

gibt, so dass folgende s Ungleichungen gelten:

$$(23)\qquad \left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i'}{q'}\right| \leqq \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}\ (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Dann besitzt $\mathfrak{M}$ die Eigenschaft A und es bleibt noch zu zeigen, dass die Anzahl N der Punkte von $\mathfrak{M}$ die Ungleichung (9) erfüllt.

Wir bemerken zunächst: sind (17), (22) zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{B}$ und gilt (23), so ist $q \neq q'$; denn sonst wäre für mindestens ein i (vgl. (21))

$$\left|\frac{p_i}{q} - \frac{p_i}{q}\right| \geqq \frac{1}{q} > \frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}};$$

also ist für jedes i $(i=1,2,\ldots,s)$

$$\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\neq 0,$$

denn links stehen zwei irreduzible Brüche mit verschiedenen Nennern. Wir können also in der Definition von $\mathfrak{M}$ die Ungleichungen (23) durch die Ungleichungen

$$(24)\qquad 0<\left|\frac{p_i}{q}-\frac{p_i'}{q'}\right|\leqq\frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}\qquad (i=1,2,\ldots,s)$$

ersetzen.

Es sei nun $\bar q$ ganz, $b+1\leqq\bar q\leqq 2b+1$; $t(\bar q)$ sei die Anzahl derjenigen Punkte aus $\mathfrak{B}$, für welche die Darstellung (17) mit $\bar q=q\mathfrak{q}$ gilt; die Anzahl derjenigen unter diesen Punkten, die *nicht* zu $\mathfrak{M}$ gehören, werde mit $v(\bar q)$ bezeichnet. Nun ist nach (19) $t(\bar q)$ gleich der Anzahl derjenigen Systeme ganzer Zahlen $p_1,p_2,\ldots,p_s$, welche den Beziehungen

$$(25)\qquad a_i\bar q\leqq p_i<a_i\bar q+\bar q,\ (p_i,\bar q)=1,\ (p_i,\mathfrak{q})=1$$

für $i=1,2,\ldots,s$ genügen. Bei jedem i ist die Anzahl derjenigen p_i, für welche (25) gilt, mindestens gleich $\varphi(\bar q)-\frac{\bar q}{16}$; denn die Anzahl der durch die Primzahl $\mathfrak{q}$ teilbaren Zahlen unter $\bar q$ konsekutiven ist höchstens

$$\frac{\bar q}{\mathfrak{q}}+1\leqq\frac{2\bar q}{\mathfrak{q}}<\frac{\bar q}{16}$$

(denn aus (18), (14), (13), (11), (10) folgt

$$\bar q>\frac{1}{3\cdot 32\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{z^{\frac{s}{s+1}}}{(k_2Q)^{\frac{s}{s+1}}}>k_2Q>\mathfrak{q},\ \mathfrak{q}>2c_1>32).$$

Ist also insbesondere $\bar q$ eine *normale Zahl*, $b+1\leqq\bar q\leqq 2b+1$, so ist

$$(26)\qquad t(\bar q)\geqq\left(\varphi(\bar q)-\frac{\bar q}{16}\right)^s>\frac{\bar q^s}{16^s}\geqq\frac{(b+1)^s}{16^s}.$$

Sind $\bar q,\bar q'$ ganze Zahlen mit

$$b+1\leqq\bar q\leqq 2b+1,\quad b+1\leqq\bar q'\leqq 2b+1,$$

so sei $w(\bar q,\bar q')$ die Anzahl derjenigen modulo $\bar q$ verschiedenen ganzen Zahlen p, zu welchen es ein ganzes p' mit

$$(27)\qquad 0<\left|\frac{p}{q\mathfrak{q}}-\frac{p'}{q'\mathfrak{q}}\right|\leqq\frac{1}{z^{\frac{s+1}{s}}}$$

gibt; dann ist (vgl. (24)) offenbar

$$(28)\qquad v(\bar q)\leqq\sum_{\bar q'=b+1}^{2b+1}w^s(\bar q,\bar q').$$

Aus (27) folgt

$$0<|p\bar q'-p'\bar q|\leqq\frac{9b^2\mathfrak{q}}{z^{\frac{s+1}{s}}},$$

also

$$p\bar q'\equiv a\,(\mathrm{mod}\,\bar q),\ \text{wo}\ 0<|a|\leqq\frac{9b^2\mathfrak{q}}{z^{\frac{s+1}{s}}}.$$

Dabei haben wir also, falls $(\bar q,\bar q')=g$ gesetzt wird, für a höchstens $\frac{18b^2\mathfrak{q}}{gz^{\frac{s+1}{s}}}$ Möglichkeiten (denn a muss durch g teilbar sein) und bei gegebenem a hat die Kongruenz $p\bar q'\equiv a$ (mod $\bar q$) genau eine Lösung modulo $\frac{\bar q}{g}$, also genau g Lösungen modulo $\bar q$; daher ist

$$w(\bar q,\bar q')\leqq\frac{18b^2\mathfrak{q}}{z^{\frac{s+1}{s}}}$$

und daher (vgl. (28), (14))

$$v(\bar q)\leqq\frac{2^s\cdot 3^{2s}(b+1)b^{2s}\mathfrak{q}^s}{z^{s+1}}\leqq\frac{2^s\cdot 3^{2s}(b+1)b^{s-1}z^{s+1}\mathfrak{q}^s}{z^{s+1}(3\cdot 32\cdot 2\cdot 3)^{s+1}\mathfrak{q}^s}<\frac{(b+1)^s}{3\cdot 16^s}.$$

Daraus und aus (26) folgt: ist $\bar q$ normal, $b+1\leqq\bar q\leqq 2b+1$, so ist

$$(29)\qquad t(\bar q)-v(\bar q)>\frac{(b+1)^s}{2\cdot 16^s}.$$

Nach der Definition ist aber $t(\bar q)-v(\bar q)$ genau die Anzahl derjenigen Punkte aus $\mathfrak{M}$, welche bei der Darstellung (17) im Nenner genau

die Zahl $q = \bar{q}\,\mathfrak{q}$ besitzen. Nach (15) ist $b+1 > k_5$; nach Hilfssatz 2 gibt es also unter den Zahlen $b+1, b+2, \ldots, 2b+1$ mindestens $\frac{1}{5}(b+1)$ normale Zahlen; also ist nach (29), (14), (13), (12)

$$N > \frac{1}{10 \cdot 16^s}(b+1)^{s+1} > \frac{1}{10 \cdot 16^s} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 32 \cdot 2 \cdot 3}\right)^{s+1} \cdot \frac{z^{s+1}}{(k_2 Q)^s} = c_2 \frac{z^{s+1}}{Q^s},$$

womit der Hilfssatz 3 bewiesen ist[15]).

Man setze nun

$$G = 8 s^3 (s+1)^{s-1} 3^{s-1} (2s+3) 2^\beta \cdot \beta^{-1} \tag{30}$$

und wähle eine Folge

$$f < z_1 < z_2 < z_3 < \ldots$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$f > e^c,\ f > c_1,\ z_1 > d(f),\ z_{n+1} > d\left(z_n^{\frac{s+1+\beta}{s}}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{31}$$

$$z_{n+1} > e^{z_n},\ z_n^{\frac{\beta}{s}} > 2(s+1)(\log\log z_n)^{s+1+\beta} > s+1 \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{32}$$

$$z_n^{\frac{1}{2s}} > e \log\log z_n \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{33}$$

$$(\log\log z_{n+1})^{s+1} > \beta z_n^{\frac{\beta}{s}} \log z_n \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{34}$$

$$G \frac{(\log\log z_n)^\beta}{\log z_n} < \frac{c_2^{n+1}}{2^{n+1} f^s (z_1 z_2 \ldots z_{n-1})^\beta}\ ^{16)} \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{35}$$

das ist offenbar möglich.

Wir definieren nun für jedes ganze $n \geqq 1$ Punkte, Würfel und vergrösserte Würfel n-ter Ordnung[17]). Ein Würfel n-ter Ordnung (bzw. ein vergrösserter Würfel n-ter Ordnung) ist dabei ein abgeschlossener

[15]) Zu einem zulässigen System von Zahlen $s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ kann es mehrere (aber offenbar nur endlichviele) Mengen $\mathfrak{M}(s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ mit den im Hilfssatz 3 geforderten Eigenschaften geben; man kann aber offenbar eine Vorschrift angeben, durch welche jedem solchen System $s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *eindeutig* eine solche Menge $\mathfrak{M}(s, Q, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ zugeordnet wird; ebenso lässt sich freilich auch c_1 (als Funktion von s) und $d(Q)$ (als Funktion von s und Q) von vornherein eindeutig feststellen.

[16]) Für $n = 1$ soll $z_1 \cdot z_2 \ldots z_{n-1} = 1$ gesetzt werden.

[17]) Wir arbeiten stets im s-dimensionalen cartesischen Raume der Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$.

Würfel von der Kantenlänge $z_n^{-\frac{s+1+\beta}{s}}$ $\left(\text{bzw. } z_n^{-\frac{s+1}{s}}\right)$, dessen Mittelpunkt ein Punkt n-ter Ordnung ist. Die Punkte (und daher auch die Würfel und die vergrösserten Würfel) n-ter Ordnung werden schliesslich folgendermassen definiert:

Man wähle eine Zahl a mit $0 < \frac{a}{f} < \frac{a+1}{f} < 1$; dann gibt es wegen (31) nach dem Hilfssatz 3. (mit $Q = f$, $z = z_1$, $\alpha_i = a$) eine Menge $\mathfrak{M}$ von mehr als

$$c_2 \frac{z_1^{s+1}}{f^s}$$

Punkten, welche folgende Eigenschaft besitzen: Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ hat die Gestalt

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right);\ p_1, p_2, \ldots, p_s, q \text{ ganz};\ z_1 \leqq q \leqq k_2 z_1 f^{\frac{1}{s+1}};$$

konstruiert man um jeden Punkt von $\mathfrak{M}$ als Mittelpunkt einen abgeschlossenen Würfel von der Kante $z_1^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind diese Würfel paarweise fremd und liegen sämtlich im Würfel

$$\frac{a}{f} \leqq \theta_i \leqq \frac{a+1}{f} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Die Punkte von $\mathfrak{M}$ mögen die Punkte erster Ordnung sein.

Ist n ganz, $n > 1$ und sind die Punkte (und also auch Würfel und vergrösserte Würfel) $(n-1)$-ter Ordnung definiert, so definiere man Punkte n-ter Ordnung folgendermassen. Es seien $W_1, W_2, \ldots, W_r$ die Würfel $(n-1)$-ter Ordnung. Zu jedem Würfel W_h $(1 \leqq h \leqq r)$ gibt es nach Hilfssatz 3 (mit $Q = z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s}}$, $z = z_n$ und mit geeigneten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$; vgl. (31)) eine Menge $\mathfrak{M}_h$ von mehr als

$$c_2 \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{s+1+\beta}}$$

Punkten, die folgende Eigenschaften haben: Jeder Punkt von $\mathfrak{M}_h$ hat die Gestalt

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right);\ p_1, p_2, \ldots, p_s, q \text{ ganz};\ z_n \leqq q \leqq k_2 z_n z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s(s+1)}};$$

konstruiert man um jeden Punkt von $\mathfrak{M}_h$ als Mittelpunkt einen abge-

schlossenen Würfel von der Kante $z_n^{-\frac{s+1}{s}}$, so sind diese Würfel paarweise fremd und liegen sämtlich im Würfel W_h. Die Punkte von $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_r$ mögen die Punkte n-ter Ordnung sein[18]).

Damit sind also Punkte, Würfel und vergrösserte Würfel aller Ordnungen definiert. Sie haben offenbar folgende Eigenschaften:

A 1. Jeder Punkt n-ter Ordnung hat die Gestalt

$$\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_s}{q}\right)$$

mit ganzen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$, wo

$$z_1 \leqq q \leqq k_2 z_1 f^{\frac{1}{s+1}}, \text{ wenn } n = 1,$$

$$z_n \leqq q \leqq k_2 z_n z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s(s+1)}}, \text{ wenn } n > 1.$$

A 2. Die Würfel n-ter Ordnung bzw. die vergrösserten Würfel n-ter Ordnung sind genau diejenigen abgeschlossenen Würfel von der Kantenlänge $z_n^{-\frac{s+1+\beta}{s}}$ bzw. $z_n^{-\frac{s+1}{s}}$, deren Mittelpunkte Punkte n-ter Ordnung sind.

A 3. Je zwei vergrösserte Würfel derselben Ordnung sind fremd.

A 4. Jeder vergrösserte Würfel $(n+1)$-ter Ordnung $(n = 1, 2, \ldots)$ liegt in genau einem Würfel n-ter Ordnung.

A 5. Alle vergrösserten Würfel aller Ordnungen liegen im *offenen* Würfel

$$0 < \theta_i < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

A 6. Die Anzahl aller Punkte erster Ordnung ist grösser als

$$c_2 \frac{z_1^{s+1}}{f^s} > 0.$$

A 7. In jedem Würfel $(n-1)$-ter Ordnung $(n > 1)$ liegen mehr als

$$c_2 \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{s+1+\beta}} > 0$$

Punkte (also auch Würfel und vergrösserte Würfel) n-ter Ordnung.

[18]) Die Anwendung des Auswahlaxioms bei der Wahl von $\mathfrak{M}_h$ ist nur scheinbar; vgl. die Fussnote [15]).

Es sei V_n die Vereinigungsmenge aller Würfel n-ter Ordnung; nach A 4 ist $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$

Man setze

$$E = V_1 V_2 V_3 \ldots;$$

E ist abgeschlossen und liegt nach A 5 *im offenen Würfel* $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Weiter: in jedem Würfel h-ter Ordnung liegt nach A 7 mindestens ein Würfel $(h+1)$-ter Ordnung. Ist also W ein Würfel n-ter Ordnung $(n \geqq 1)$, so ist $W V_h \neq 0$ für $h \geqq n$; da die Mengen

$$W V_n \supset W V_{n+1} \supset W V_{n+2} \supset \ldots$$

abgeschlossen, beschränkt und nicht leer sind, so ist auch ihr Durchschnitt

$$E W = W V_n \cdot W V_{n+1} \cdot W V_{n+2} \ldots$$

nicht leer; mit anderen Worten: *Jeder Würfel n-ter Ordnung $(n \geqq 1)$ enthält mindestens einen Punkt von E.*

§ 3. Beweis des Hauptsatzes für $0 < \beta < \infty$.

Im folgenden soll stets

$$x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|)$$

gesetzt werden. Sind M und N zwei Mengen, so soll die Aussage „M schneidet N" oder „M wird von N geschnitten" bedeuten, dass $MN \neq 0$.

Hilfssatz 4. *Es sei n ganz, $n \geqq 2$; $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ ganz;*

$$\frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_{n-1}} \leqq x < \frac{z_n^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_n}, \tag{36}$$

M sei die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit

$$0 < \theta_i < 1 \ (i = 1, 2, \ldots, s), \ |x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_s\theta_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta}\log x}.$$

Behauptung: die Menge M schneidet höchstens

$$2s(s+1)^{s-1} \frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{\beta(s-1)}{s}}} \left(\frac{1}{x^{s+1+\beta}\log x} + \frac{1}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}\right)$$

Würfel n-ter Ordnung.

Beweis. Man wähle zunächst ein ganzes j $(1 \leqq j \leqq s)$ mit $x_j = x$[19]).

[19]) Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_j > 0$ voraussetzen; sonst ändere man das Vorzeichen von $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$.

Wir zeigen zuerst, dass *die Menge M höchstens*

$$(37)\qquad (s+1)^{s-1} z_{n-1}^{\frac{(s+1)(s-1)}{s}}$$

Würfel $(n-1)$-ter Ordnung schneidet.

Es sei $P=(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ ein Punkt $(n-1)$-ter Ordnung, W bzw. W' der ihn enthaltende Würfel bzw. vergrösserte Würfel $(n-1)$-ter Ordnung. Ist $MW \neq 0$, so gibt es einen Punkt $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ von M mit

$$|\xi_i - y_i| \leqq \frac{1}{2 z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

$$(38)\qquad |x_1 \xi_1 + \ldots + x_s \xi_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta} \log x}.$$

Wegen (32) ist dann auch

$$(39)\qquad |\xi_i - y_i| < \frac{1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Man setze $\lambda_i = \xi_i$ für $1 \leqq i \leqq s$, $i \neq j$ und wähle λ_j so, dass

$$(40)\qquad x_1 \lambda_1 + \ldots + x_s \lambda_s + x_{s+1} = 0.$$

Dann ist nach (38) und wegen $x_j = x$

$$|\lambda_j - \xi_j| < \frac{1}{x^{s+1+\beta} \log x};$$

nach (36), (33) ist $x > e$, also ist nach (36), (32)

$$\frac{1}{x^{s+1+\beta} \log x} < \frac{1}{x^{s+1+\beta}} \leqq \frac{(\log \log z_{n-1})^{s+1+\beta}}{z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s}}} < \frac{1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}};$$

also ist

$$(41)\qquad |\lambda_i - y_i| < \frac{1}{(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Es sei A die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit

$$(42)\qquad x_1 \theta_1 + \ldots + x_s \theta_s + x_{s+1} = 0,$$

$$(43)\qquad |\theta_i - \lambda_i| < \frac{1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s,\ i \neq j).$$

Ist $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt von A, so ist nach (40), (42), (43) und wegen $x_j = x$

$$|\theta_j - \lambda_j| < \frac{s-1}{2(s+1) z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}},$$

also wegen (41), (43)

$$|\theta_i - y_i| < \frac{1}{2 z_{n-1}^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

also ist $A \subset W'$. Es sei B die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit

$$0 < \theta_i < 1 \ (i=1, 2, \ldots, s),\ x_1 \theta_1 + \ldots + x_s \theta_s + x_{s+1} = 0;$$

dann ist (man beachte, dass W' im Würfel $0 < \theta_i < 1$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ liegt)

$$A \subset B W'.$$

Nun hat aber die Projektion von A auf die Hyperebene $\theta_j = 0$ das $(s-1)$-dimensionale Volumen

$$(44)\qquad \frac{1}{(s+1)^{s-1} z_{n-1}^{\frac{(s+1)(s-1)}{s}}};$$

wird also W von M geschnitten, so hat die Projektion von BW' ein $(s-1)$-dimensionales Volumen, welches mindestens dem Ausdruck (44) gleich ist. Nun sind aber je zwei vergrösserte Würfel $(n-1)$-ter Ordnung fremd und verschiedene Punkte von B haben auch verschiedene Projektionen; endlich ist das $(s-1)$-dimensionale Volumen der Projektion von B höchstens gleich Eins. Daher ist die Anzahl der von M geschnittenen Würfel $(n-1)$-ter Ordnung höchstens gleich dem reziproken Wert von (44), d. h. höchstens gleich (37).

Es sei nun $Q=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ ein Punkt n-ter Ordnung, U bzw. U' der ihn enthaltende Würfel bzw. vergrösserte Würfel n-ter Ordnung; es sei $MU \neq 0$. Dann gibt es also einen Punkt $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s)$ von M mit

$$|\nu_i - \mu_i| \leqq \frac{1}{2 z_n^{\frac{s+1+\beta}{s}}},\quad |x_1 \nu_1 + \ldots + x_s \nu_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta} \log x}.$$

Ist nun $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ ein Punkt aus U', so ist

$$|\theta_i - \mu_i| \leqq \frac{1}{2 z_n^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

also

$$|\theta_i - \nu_i| < \frac{1}{z_n^{\frac{s+1}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

also

$$(45) \qquad |x_1\theta_1 + \ldots + x_s\theta_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta}\log x} + \frac{s\,x}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}.$$

Also: *Es sei N die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ mit (45); ist U ein Würfel n-ter Ordnung, ist U' derjenige vergrösserte Würfel n-ter Ordnung, welcher U enthält und ist $MU \neq 0$, so ist $U' \subset N$.*

Es sei nun W ein Würfel $(n-1)$-ter Ordnung; die Anzahl ρ der in W liegenden und von M (also von MW) geschnittenen Würfel n ter Ordnung ist nach dem eben bewiesenen höchstens gleich der Anzahl der in W liegenden und in N (also in NW) enthaltenen vergrösserten Würfel n-ter Ordnung. Nun ist aber das Volumen eines vergrösserten Würfels n-ter Ordnung gleich z_n^{-s-1}; dagegen ist das Volumen von WN höchstens gleich

$$\frac{1}{z_{n-1}^{\frac{(s+1+\beta)(s-1)}{s}}}\left(\frac{2}{x^{s+1+\beta}\log x} + \frac{2\,s}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}\right)^{20)};$$

daher ist

$$\rho \leqq \frac{2\,s\,z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{(s+1+\beta)(s-1)}{s}}}\left(\frac{1}{x^{s+1+\beta}\log x} + \frac{1}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}\right).$$

Da aber die Anzahl der von M geschnittenen Würfel $(n-1)$-ter Ordnung höchstens gleich dem Ausdruck (37), ist, so ist Hilfssatz 4. bewiesen.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ ganze Zahlen mit $x > 0$, so werde die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, welche den Bedingungen

$$(46) \quad 0 < \theta_i < 1 \; (i = 1, 2, \ldots, s), \; |x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_s\theta_s + x_{s+1}| < \frac{1}{x^{s+\beta}\log x}$$

[20]) Denn jedes θ_i $(i = 1, 2, \ldots, s, i \neq j)$ durchläuft höchstens ein Intervall von der Länge $z_{n-1}^{-\frac{s+1+\beta}{s}}$; bei gegebenen θ_i $(i = 1, 2, \ldots, s, i \neq j)$ durchläuft aber θ_j (wegen (45) und wegen $x_j = x$) höchstens ein Intervall von der Länge

$$\frac{2}{x^{s+1+\beta}\log x} + \frac{2\,s}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}.$$

genügen, mit $M(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1})$ bezeichnet. Ist n ganz, $n \geqq 2$, so bedeute P_n die Vereinigungsmenge aller Mengen $M(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1})$, welche der Bedingung

$$(47) \qquad \frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_{n-1}} \leqq x < \frac{z_n^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_n}$$

genügen.

Hilfssatz 5. *Es sei n ganz, $n \geqq 2$; τ_n sei die Anzahl der von der Menge P_n geschnittenen Würfel n-ter Ordnung. Dann ist*

$$\tau_n \leqq G\,\frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{s}}\,\frac{(\log\log z_{n-1})^{\beta}}{\log z_{n-1}},$$

wo G durch (30) definiert ist.

Beweis. Für ganzes $m > 0$ sei

$$v_m = \frac{z_m^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_m};$$

nach (33) ist

$$(48) \qquad v_{n-1} > e > 2, \quad v_{n-1} > z_{n-1}^{\frac{1}{2s}}.$$

Ist eine ganze Zahl j mit $1 \leqq j \leqq s$ und eine ganze Zahl x mit (47), d. h. mit $v_{n-1} \leqq x < v_n$ gegeben, so ist die Anzahl aller nichtleeren Mengen $M(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1})$ mit

$$x_j = x = \operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_s|)$$

höchstens gleich

$$(2\,x + 1)^{s-1}(2\,s\,x + 3) \leqq 3^{s-1}(2\,s + 3)\,x^s$$

(denn für $i \neq j$, $1 \leqq i \leqq s$ soll $|x_i| \leqq x$ sein und wegen (46), (48) soll

$$|x_{s+1}| < |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_s| + \frac{1}{x^{s+\beta}\log x} < s\,x + 1$$

sein). Daher ist nach Hilfssatz 4 [21])

$$\tau_n \leqq s \cdot 3^{s-1}(2\,s + 3) \cdot 2\,s \cdot (s+1)^{s-1}\,\frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{\beta(s-1)}{s}}} \sum_{v_{n-1} \leqq x < v_n}\left(\frac{1}{x^{1+\beta}\log x} + \frac{x^s}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}\right)$$

$$\leqq s^2 \cdot 3^{s-1} \cdot 2 \cdot (2\,s + 3) \cdot (s+1)^{s-1}\,\frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\frac{\beta(s-1)}{s}}}\left(\frac{1}{\beta(v_{n-1} - 1)^{\beta}\log v_{n-1}} + \frac{v_n^{s+1}}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}\right).$$

[21]) Vgl. die Fussnote [19])

Nach (48) ist $v_{n-1}-1>\frac{1}{2}v_{n-1}$, also nach (48)

$$\frac{1}{\beta(v_{n-1}-1)^{\beta}\log v_{n-1}}<\frac{2^{\beta}\cdot 2s(\log\log z_{n-1})^{\beta}}{\beta z_{n-1}^{\frac{\beta}{s}}\cdot\log z_{n-1}};$$

nach (34) ist

$$\frac{v_n^{s+1}}{z_n^{\frac{s+1}{s}}}=\frac{1}{(\log\log z_n)^{s+1}}<\frac{2^{\beta}\cdot 2s(\log\log z_{n-1})^{\beta}}{\beta z_{n-1}^{\frac{\beta}{s}}\cdot\log z_{n-1}}$$

(denn der Zähler rechts ist >1 wegen (31)).
Daher ist

$$\tau_n\leqq\frac{8s^{s}\cdot 3^{s-1}\cdot(2s+3)\cdot(s+1)^{s-1}\cdot 2^{\beta}}{\beta}\cdot\frac{z_n^{s+1}}{z_{n-1}^{\beta}}\cdot\frac{(\log\log z_{n-1})^{\beta}}{\log z_{n-1}},$$

womit wegen (30) der Hilfssatz 5. bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Es sei n ganz, $n\geqq 1$; Γ_n sei die Anzahl der von der Menge $P_2+P_3+\ldots+P_n$* **nicht** *geschnittenen Würfel n-ter Ordnung* (für $n=1$ soll $P_2+P_3+\ldots+P_n$ die leere Menge bedeuten).

Dann ist

$$\Gamma_n\geqq\frac{c_2^{n}z_n^{s+1}}{2^{n}(z_1\cdot z_2\ldots z_{n-1})^{\beta}f} \tag{49}$$

(für $n=1$ soll $z_1\cdot z_2\ldots z_{n-1}=1$ gesetzt werden), *also insbesondere* $\Gamma_n>0$.

Beweis. (49) ist wahr für $n=1$; denn Γ_1 ist gleich der Anzahl aller Würfel erster Ordnung; nach $A\,6$ (vgl. den Schluss des § 2) ist also

$$\Gamma_1>\frac{c_2 z_1^{s+1}}{f^{s}}.$$

Es sei nun n ganz, $n\geqq 1$ und (49) wahr. Nach $A\,7$, $A\,4$ und dem Hilfssatz 5 ist dann

$$\Gamma_{n+1}\geqq\Gamma_n\cdot c_2\frac{z_{n+1}^{s+1}}{z_n^{s+1+\beta}}-\tau_{n+1}$$

$$\geqq\frac{c_2^{n+1}z_{n+1}^{s+1}}{2^{n}(z_1\cdot z_2\ldots z_n)^{\beta}f^{s}}-G\frac{z_{n+1}^{s+1}}{z_n^{\beta}}\frac{(\log\log z_n)^{\beta}}{\log z_n};$$

nach (35) folgt daraus

$$\Gamma_{n+1}\geqq\frac{c_2^{n+1}z_{n+1}^{s+1}}{2^{n+1}(z_1\cdot z_2\ldots z_n)^{\beta}f^{s}},$$

womit der Hilfssatz 6. bewiesen ist.

Beweis des Hauptsatzes für $0<\beta<\infty$.

Ich behaupte erstens:

$$E-\sum_{n=2}^{\infty}P_n\neq 0 \tag{50}$$

(E ist am Schluss des § 2, P_n vor dem Wortlaut des Hilfssatzes 5. definiert). E ist nämlich beschränkt und abgeschlossen, P_n ist offen. Wäre

$$E\subset\sum_{n=2}^{\infty}P_n, \tag{51}$$

so gäbe es nach dem Borelschen Überdeckungssatz eine ganze Zahl $m\geqq 2$ mit

$$E\subset\sum_{n=2}^{m}P_n.$$

Da aber jeder Würfel m-ter Ordnung mindestens einen Punkt von E enthält, so müsste die Menge $\sum_{n=2}^{m}P_n$ jeden Würfel m-ter Ordnung schneiden, also wäre $\Gamma_m=0$ im Widerspruch gegen den Hilfssatz 6. Also gilt nicht (51), also gilt (50).

Es sei nun $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ ein Punkt, der in $E-\sum_{n=2}^{\infty}P_n$ liegt; es gibt einen solchen Punkt. Sind $x_1,x_2,\ldots,x_s,x_{s+1}$ ganze Zahlen mit

$$x=\operatorname{Max}(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_s|)\geqq\frac{z_1^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_1},$$

so gibt es — wegen $z_n^{\frac{1}{s}}(\log\log z_n)^{-1}\to\infty$ — eine ganze Zahl $n\geqq 2$ mit

$$\frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_{n-1}}\leqq x<\frac{z_{n-1}^{\frac{1}{s}}}{\log\log z_n}.$$

Da $0<\theta_i<1$ $(i=1,2,\ldots,s)$ und da der Punkt $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$ nicht in P_n liegt, ist

$$|x_1\theta_1+x_2\theta_2+\ldots+x_s\theta_s+x_{s+1}|\geqq\frac{1}{x^{s+\beta}\log x},$$

also

(52) $$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \beta.$$

Andererseits: ist n ganz, $n \geqq 2$, so liegt $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ in einem Würfel n-ter Ordnung. Nach A 1, A 2 gibt es also ganze Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s, q$ mit

(53) $$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqq \frac{1}{2 z_n^{\frac{s+1+\beta}{s}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \quad z_n \leqq q \leqq k_2 z_n z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s(s+1)}}.$$

Wird also $\frac{s+1+\beta}{s(s+1)} = \sigma$ gesetzt, so ist nach (32), (53)

$$z_n \leqq q \leqq k_2 z_n (\log z_n)^\sigma \leqq k_2 z_n (\log q)^\sigma,$$

also

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{k_2 (\log q)^\sigma}{q}\right)^{\frac{s+1+\beta}{s}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

also

(54) $$\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \geqq \beta.$$

Nach (1), (52), (54) ist aber

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta,$$

w. z. b. w.

---

[22]) Zusatz bei der Korrektur: Herr Mahler wird demnächst einen sehr einfachen Beweis von (2) veröffentlichen.

B. Kalicun-Chodowicki.

Przyczynek do zastosowania Geometrji kinematycznej do konstrukcji środków krzywizn przekrojów płaskich i stycznych głównych powierzchni prostokreślnych wichrowatych, występujących najczęściej w praktyce technicznej.

Beitrag zur Anwendung der kinematischen Geometrie zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte der ebenen Schnittkurven und der Haupttangenten der windschiefen Regelflächen, die am meisten in der technischen Praxis vorkommen.

(CZĘŚĆ I).

A. Wstęp.

1. Powierzchnię prostokreślną nazywamy, jak wiadomo, wichrowatą, jeżeli każde dwie jej sąsiednie tworzące są względem siebie wichrowate, a więc ograniczają element powierzchniowy, który nie da się rozwinąć na płaszczyźnie.

W części I tej rozprawy zajmiemy się przedewszystkiem takiemi powierzchniami wichrowatemi, które opisuje prosta g przez ruch swój po trzech krzywych c_1, c_2, c_3, które stale wszystkie przecina. Krzywe te nazywamy *kierownicami*, a mogą one być płaskiemi, przestrzennemi lub zastąpione linjami prostemi. Zamiast jednej z tych kierownic może być podany jakiś inny warunek ruchu, np. prosta g ma podczas swego ruchu przecinać stale kierownice c_1 i c_2 i tworzyć z kierownicą c_2 stały kąt.

Że w powyższy sposób wytworzona przez prostą g powierzchnia