Ainsi le cas traité dans mon travail antérieur est caractèrisée par le fait:

$$\frac{1}{\rho_3} = 0,$$

équivalent à cause de (41) à la relation:

$$(L^{(3)} \nabla) L^{(3)} = 0.$$

Les congruences de droites qui constituent les cycles sont en outre caractérisées par la relation:

$$\vec{L}^{(3)} \operatorname{rot} \vec{L}^{(3)} = 0, \tag{42}$$

Le cas traité dans le paragraphe 8, où les courbes C sont des cercles, est caractérisé par les relations:

$$\frac{1}{\tau_3} = 0, \ \vec{L}^{(3)} \operatorname{grad} \rho_3 = 0.$$

La congruence spéciale étudiée dans le paragraphe 8 appartient à une catégorie qui est caractérisée en outre par la relation (42).

Si l'on a choisi une fonction W déterminée dans le paragraphe 2 ou une fonction V déterminée dans le paragraphe 7, on peut par des différentiations et des éliminations calculer tous les invariants correspondant à la congruence de courbes C fixée par ce choix.

Une question plus difficile c'est de savoir dans quelles circonstances on peut en se donnant certains invariants comme des fonctions de x_1, x_2, x_3 trouver des congruences de courbes C correspondantes.

Sur les polydromies des potentiels newtoniens prolongés, dans l'espace réel à n dimensions

par

R. Wavre.

C'est avec émotion que nous rédigeons ces quelques pages pour le volume consacré à la mémoire de Léon Lichtenstein. Nous avons choisi un sujet auquel il s'intéressait vivement, comme en témoignent les lettres que nous avons échangées en 1933. Nous ne doutions pas que la science lui fût encore redevable dans le domaine que nous abordons ici de progrès aussi importants que ceux qu'il avait accomplis dans des domaines voisins.

Nous lui sommes en particulier extrêmement reconnaissants d'avoir attiré notre attention sur un mémoire de M. Erhardt Schmidt[1]), qui nous servira ici de point de départ.

Ce mémoire, sur le prolongement analytique d'un potentiel newtonien au travers d'une surface qui porte ou limite la matière attirante, peut être généralisé sans difficultés de l'espace à 3 à l'espace à n dimensions. Il repose sur le théorème de Cauchy-Kowalewska, sur lequel Bruns[2]) puis M. Hadamard[3]) avait également fondé le prolongement local du potentiel newtonien.

[1]) E. Schmidt. Bemerkung zur Potentialtheorie. Mathematische Annalen T. 68, p. 107, 1910.

[2]) Bruns. Über einen Satz aus der Potentialtheorie. Crelles Journal Bd 81.

[3]) J. Hadamard. Mémoire sur les problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Insttut de France. T. XXXIII, p. 24, 1908.

§ 1. Prolongement fondé sur le théorème de Cauchy-Kowalewska

Soient $x_1 \ldots, x_n$ les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace E_n à n dimensions et E_{n-1} une multiplicité donnée par une équation $f(x_1 \ldots x_n) = 0$, où f est supposée analytique et régulière. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ fournissent les paramètres directeurs de la normale ν à la multiplicité envisagée et cette normale est parfaitement déterminée tant que ces dérivées partielles ne s'annullent pas toutes à la fois.

L'hypothèse que la multiplicité est simple et fermée voudra dire dans la suite qu'elle divise l'espace en deux régions seulement, l'une intérieure et l'autre extérieure. Si l'on coupe la multiplicité $f=0$ par une autre $\varphi=0$, l'intersection est une multiplicité E_{n-2}; cette dernière pourra être envisagée comme frontière d'une des portions de la multiplicité $f=0$. Une telle portion sera dite ouverte. Il n'y aura pas de difficulté à concevoir un circuit fermé, multiplicité à une dimension qui fait le tour de la frontière, passant succesivement dans les quatre régions: $f>0$, $\varphi>0$; $f>0$, $\varphi<0$; $f<0$, $\varphi<0$; $f<0$, $\varphi>0$.

Soit alors P un point d'une surface Σ analytique et régulière à $n-1$ dimensions, puis ρ_1 et ρ_2 deux fonctions holomorphes sur Σ au voisinage de P. Par là nous entendons deux fonctions représentables par la série de Taylor procédant suivant les puissances des paramètres de représentation de $f=0$, par exemple de $n-1$ variables parmi $x_1 \ldots, x_n$. Soit enfin $\rho(x_1 \ldots, x_n)$ une densité holomorphe dans le voisinage de P.

Posons:

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 A}{\partial x_n^2}.$$

Le théorème de Cauchy-Kowalewska permet d'affirmer l'existence d'une solution des équations

$$\Delta A = \rho$$

dans le voisinage de P

$$\frac{dA}{d\nu} = \rho_1, \quad A = \rho_2 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Cette solution $A(x_1 \ldots, x_n)$ est holomorphe au voisinage de P.

Soient, d'autre part, S une multiplicité, fermée, régulière à $n-1$ dimensions et V le volume intérieur. Si A et B sont deux fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles premières et secondes sur l'ensemble $V+S$, l'identité de Green, valable dans ce cas, s'écrira:

$$\int (A\Delta B - B\Delta A)\, dV + \int \left(A\frac{dB}{d\nu} - B\frac{dA}{d\nu}\right) dS = 0$$

la normale ν étant dirigée vers l'intérieur. Posons, pour abréger,

$$r_n = \frac{1}{r^{n-2}}, \qquad \lambda_n = (n-2)\, S_n$$

où r est la distance de deux points de E_n et S_n l'aire de l'hypersphère de rayon un tracée dans l'espace à n dimensions. Posons encore pour abréger

$$r_n \frac{dB}{d\nu} - B\frac{dr_n}{d\nu} = (r_n, B).$$

La fonction r_n est harmonique, $\Delta r_n = 0$, en les cordonnées de l'un quelconque des deux points tant qu'ils ne coincident pas et l'on a, c'est bien connu,

$$(1) \qquad \int r_n \Delta B\, dV + \int (r_n, B)\, dS = \begin{cases} -\lambda_n B(P) \\ 0 \end{cases}$$

suivant que le point argument P est dans le volume V ou hors de l'ensemble $V+S$.

Cette identité subsiste si la surface fermée S est composée d'une portion σ d'une surface régulière et d'une partie σ' d'une petite hypersphère centrée sur σ.

Supposons σ régulière et analytique et soient ρ, ρ_1, ρ_2 trois densités holomorphes dans les conditions précisées au début. Soit enfin B la solution du problème de Cauchy-Kowalewska

$$\Delta B = \lambda_n \rho; \qquad \frac{dB}{d\nu} = \lambda_n \rho_1; \qquad B = \lambda_n \rho_2.$$

Posons enfin

$$U = \int r_n \rho\, dV + \int r_n \rho_1\, d\sigma - \int \rho_2 \frac{dr_n}{d\nu}\, d\sigma,$$

$$H = \frac{1}{\lambda_n} \int (r_n, B)\, d\sigma',$$

alors l'identité donnera, puisque $S = \sigma + \sigma'$

$$U = -H - \begin{cases} B \text{ dans } V \\ 0 \text{ hors de } V + S. \end{cases} \tag{2}$$

Le potentiel U est donc créé par une densité ρ de matière répartie d'un côté de σ et par deux densités ρ_1 et ρ_2 étalées sur la multiplicité σ.

Ces densités holomorphes doivent être envisagées comme données et nous pourrons toujours supposer l'hypersphère σ' assez petite pour que la solution B du problème de Cauchy-Kowalewska soit holomorphe sur l'ensemble $V + \sigma + \sigma'$. S'il y a des matières attirantes au delà de σ' elles créent des potentiels harmoniques, donc holomorphes, en chaque point de l'ensemble $V + \sigma$. Nous pouvons ici les négliger.

Partons alors, avec M. M. Hadamard et Schmidt, d'un point P situé du côté de σ opposé à V. Nous avons

$$U_P = -H_P.$$

La fonction H_P est harmonique, donc holomorphe, en chaque point de l'espace sauf peut-être sur σ'. Le potentiel U_P se prolonge donc au travers de σ jusqu'à un point, d'ailleurs quelconque, M de V. Représentons par U_{PM} la valeur en M du prolongement de ce potentiel calculé primitivement en P. Nous avons donc

$$U_{PM} = -H_{PM} = -H_M,$$

la dernière égalité provient de ce que nous n'avons pas traversé la surface σ'. Mais en M, H_M vaut $U_M + B_M$, par (2) puisque nous sommes dans V, d'où

$$U_{PM} = U_M + B_M.$$

Le potentiel U pris à l'extérieur de la matière est donc prolongeable jusqu'en un point quelconque M du volume V défini ci-dessus.

La différence en M entre le potentiel extérieur prolongé et le potentiel calculé directement en M est égale à la fonction B, solution du problème de Cauchy-Kowalewska.

Nous appelerons cette fonction B „la fonction de passage" au travers de σ et dans les §§ suivants nous la représenterons par le lettre p.

En partant d'un point M de V et en sortant de V, au travers de σ, on tronverait sans difficulté

$$U_{MP} = U_P - B_P$$

Pour employer un langage concret, B sera la fonction d'entrée et $-B$ sera celle de sortie.

En plus, on établit facilement le théoréme de Bruns; le potentiel de volume est holomorphe en tont point où la densité $\rho(x_1 \ldots, x_n)$ est holomorphe.

En effet, soit π un hyperplan à $n-1$ dimensions passant par le point considéré Q. Le problème

$$\Delta B = \lambda_n \rho$$

au voisinage du point Q; $\frac{dB}{d\nu} = 0$, $B = 0$ sur π a une solution holomorphe $B(x_1 \ldots, x_n)$ au voisinage de Q. Si s est une hypersphère de rayon suffisamment petit et centrée au point Q, la formule (1) appliquée à s donne

$$U = -H - B.$$

La fonction B est holomorphe au voisinage du point Q, il en est de même de H qui provient de couches étalées sur s. La fonction U est donc également holomorphe au voisinage du point Q en question. L'opérateur Δ appliqué à la relation précédente donne l'équation de Poisson

$$\Delta U = -\Delta B = -\lambda_n \rho$$

2. Les multiplicités critiques.

Ces résultats de MM. Hadamard et Schmidt étant rappelés il ne sera pas difficile de mettre en évidence certaines multiplicités critiques.

a) Cas d'une couche analytique.

Envisageons une multiplicité ouverte Σ à $n-1$ dimensions, régulière et analytique. Soit F sa frontière, il est supposé que les points de F sont des points où Σ est encore analytique et régulière. Pour fixer les idées, nous supposerons en plus que l'ensemble complémentaire de $\Sigma + F$ est d'un seul tenant. Alors un point quelconque de cet ensemble complémentaire peut être relié à n'importe quel autre par un chemin qui ne traverse pas $\Sigma + F$. Cette hypothèse n'est pas essen-

tielle, mais elle simplifiera le langage. Soit enfin ρ_1 et ρ_2 deux fonctions holomorphes sur $\Sigma+F$. Nous appelerons cette distribution une „couche analytique ouverte".

Le potentiel, où ρ_1 est une densité de simple couche et $-\rho_2$ une densité de double couche. s'écrit:

$$U=\int\left(r_n\rho_1-\rho_2\frac{d r_n}{d\nu}\right)d\Sigma.$$

La fonction de passage p au travers de Σ dans le sens de la normale positive est solution des équations

$$\Delta p=0, \qquad \frac{dp}{d\nu}=\lambda_n\rho_1 \qquad \text{et } p=\lambda_n\rho_2.$$

Cette solution est holomorphe dans un domaine D de l'espace E_n dont tout point de $\Sigma+F$ est point intérieur, c'est à dire que $\Sigma+F$ baigne entièrement dans le domaine D à n dimensions.

Le potentiel peut alors s'écrire ainsi:

$$U=\frac{1}{\lambda_n}\int(r_n, p)\,d\Sigma.$$

Le prolongement le long d'un chemin C à travers Σ dans le sens positif donne

$$U_{PCM}=U_M+p_M.$$

Le potentiel U_M est holomorphe dans l'ensemble complémentaire de Σ, la fonction p l'est aussi dans le domaine D. On peut donc effectuer le prolongement le long d'un chemin C' de retour en P et évitant $\Sigma+F$. On ne fait alors que suivre la détermination de U qui est donnée par l'intégrale précédente et l'on trouve

$$U_{PCMC'P}=U_{MC'P}+p_{MC'P}=U_P+p_P.$$

Après le circuit complet $C+C'$ on trouve

$$U_{\text{arrivée}}-U_{\text{départ}}=p.$$

La fonction de passage au travers d'une couche analytique ouverte est une fonction période pour un circuit décrit autour de la frontière de la

couche. Le potentiel prolongé admet la frontière comme multiplicité critique, comme un hyperespace à $n-2$ dimensions de ramification.

b) Cas d'un volume rempli d'une densité holomorphe.

Soit V un volume à n dimensions limité par deux variétés à $n-1$ dimensions: $f(x_1\ldots x_n)=0$ et $f'(x_1\ldots x_n)=0$. Nous supposons que V soit rempli d'une densité $\rho(x_1\ldots, x_n)$ holomorphe au voisinage de l'arête F, intersection des deux variétés. On peut toujours supposer que V est du côté $f>0$ et $f'>0$. Par ailleurs V pourra être limité par d'autres variétés encore, mais il est supposé que la matière située au voisinage de F se reduit à celle envisagée au début. Considérons le potentiel

$$U=\int\rho\, r_n\, d\,V$$

et les deux fonctions de passage p et p' au travers de $f=0$ et de $f'=0$, solutions des équations

$$\Delta p=\lambda_n\rho; \qquad \frac{dp}{d\nu}=0, \qquad p=0 \quad \text{sur } f=0$$

$$\Delta p'=\lambda_n\rho; \qquad \frac{dp'}{d\nu}=0, \qquad p'=0 \quad \text{sur } f'=0.$$

Partant d'un point P hors de V et traversant $f=0$, nous aurons en tout point M de V voisin de l'arête

(1) $$U_{PM}=U_M+p_M.$$

Pour la sortie de V au travers de $f'=0$ nous aurons

(2) $$U_{MP'}=U_{P'}-p'_{P'}.$$

La densité ρ étant holomorphe au voisinage de F dans V, U_M est aussi holomorphe en vertu du théorème de Bruns et la fonction p est holomorphe dans un domaine à n dimensions dans lequel F est immergée. Il en est de même de p'. On peut donc prolonger le potentiel primitif au travers du volume V et l'on trouve, au retour en P,

$$U_{PMP}=U_{MP}+p_P=U_P+p_P-p'_P.$$

L'on a donc, le long du circuit fermé qui entoure l'arête

$$U_{\text{arrivée}}-U_{\text{départ}}=p-p'.$$

L'arête F du volume attirant est donc un hyperspace de ramification pour le potentiel prolongé et la fonction période est la somme de la fonction d'entrée et de la fonction de sortie.

Le potentiel U pris initialement à l'intérieur de V jouit de la même propriété. En effet en vertu des relations (1) et (2) l'on a

$$U_{MPM} = U_{PM} - p'_M = U_M + p_M - p'_M .$$

Cette fonction analytique U n'est plus harmonique mais satisfait à l'équation de Poisson. Elle admet également F comme arête de ramification et la fonction $p - p'$ comme fonction période. Si l'on fait k fois le tour de F l'on aura

$$U_{\text{arrivée}} - U_{\text{départ}} = \begin{cases} kp \\ k(p - p') \end{cases}$$

pour les cas a) et b) respectivement. Les valeurs négatives de k correspondent dans les deux cas à des circuits décrits en sens inverse. Les potentiels prolongés admettent donc dans les conditions précisées une *infinité de branches* qui se ramifient autour des variétés E_{n-2}, frontière ou arête. Bien que chaque branche soit bornée au voisinage de ces variétés, la fonction analytique dont le potentiel ne fournit qu'un élement n'est pas bornée au voisinage de ces variétés de ramification.

§ 3. Les autres singularités.

Tant que l'on reste dans le voisinage des variétés E_{n-2}, envisagées ci-desssus il n'y a pas d'autre singularité que ces variétés elles mêmes pour les potentiels prolongés. Mais il peut y avoir en dehors de ce voisinage d'autres singularités des genres les plus divers. Il n'est pas exclu, après avoir décrit certains circuits, que l'on revienne dans le domaine D où il n'y avait primitivement que l'arête F comme singularité avec une autre branche de la fonction de passage, branche qui présentera des singularités dans D.

Ceci ressortira clairement de la proposition générale suivante:

Il est possible de construire une couche analytique qui admette une fonction harmonique arbitrairement donnée comme fonction de passage, et par conséquent aussi comme fonction période.

Soit en effet p une fonction donnée, harmonique dans un volume D à n dimensions. Construisons le potentiel

$$U = \frac{1}{\lambda_n} \int (r_n, p)\, d\Sigma$$

où Σ est une variété E_{n-1} ouverte et entièrement immergée dans D. La fonction de passage est ici la fonction p elle même et c'est encore la fonction période attachée à la frontière de Σ.

Ce procédé permet de former des fonctions harmoniques à n variables qui admettent des lignes de ramification données à l'avance et dont les fonctions périodes jouissent également, dans une certaine mesure, de propriétés données.

Reprenons, par exemple, le potentiel U ci-dessus et formons un nouveau potentiel U' pour une couche étalée sur une autre variété Σ' ouverte avec U comme fonction de passage:

$$U' = \frac{1}{\lambda_n} \int (r_n, U)\, d\Sigma' ,$$

Σ' n'ayant aucun point commun avec Σ. Prenons enfin un potentiel U'' de fonction de passage U' sur une nouvelle variété Σ'' qui peut avoir des points communs avec la variété Σ initiale:

$$U'' = \frac{1}{\lambda_n} \int (r_n, U')\, d\Sigma'' .$$

Etudions ce dernier potentiel. Il admet la fonction U' comme fonction de passage et aussi comme fonction période relative à la frontière F' de Σ''. On a, après le prolongement au travers de Σ'',

$$U''_{PM} = U''_M + U'_M$$

U''_M est holomorphe partout en dehors de Σ'', en particulier sur Σ'. Traversons Σ'. On aura de l'autre côté

$$U''_{PMP'} = U''_{P'} + U'_{P'} + U_{P'} .$$

Revenons dans le voisinage de la variété Σ'' initiale. Le potentiel U' y est holomorphe, le potentiel U'' y admet la ligne critique F'' avec la fonction période U'. Le potentiel U y admet la ligne critique F avec la fonction période p et les lignes F et F' peuvent être prises aussi voisines que l'on voudra l'une de l'autre.

On peut supposer que F est sur Σ'', d'où une singularité dans le domaine D où il n'y en avait pas d'autres que F'' avant le circuit autour de F'. Si F et F'' coincident, la branche obtenue après un seul passage au travers de Σ' se ramifiera de nouveau autour de F'' mais sa fonction période au lieu d'être U', comme c'était le cas au début, sera maintenant $U' + p$. De toute façon les sigularités de la fonction

analytique, dont un potentiel d'une couche analytique fournit un élément, ne peuvent être que des singularités de la fonction de passage, à part la frontière de la couche qui crée le potentiel.

D'une manière générale, un potentiel U engendré par un nombre fini de couches analytiques réparties sur des variétés à n-1 dimensions: Σ, Σ', Σ'', ... pourra se représenter de la manière suivante

$$U = \frac{1}{\lambda_n} \int (r_n, p)\, d\Sigma + \frac{1}{\lambda_n} \int (r_n, p')\, d\Sigma' + \ldots .$$

Les fonctions: p, p', ... sont solutions des problèmes de Cauchy-Kowalewska qui se posent pour chaque couche. Si, partant d'un point P pour aboutir en un point M, on traverse Σ, puis Σ' puis Σ'', etc. on aura

$$U_{PM} = U_M + p_M + p'_M + p''_M + \ldots ..'$$

Cette formule suppose que les variétés ont toutes été franchies dans le sens positif sans quoi il faudrait des signes moins devant certaines fonctions de passage. Mais elle suppose aussi que, le long du chemin du prolongement, p n'a pas de singularités sur le trajet entre Σ et Σ', que $p + p'$ n'en a pas sur le trajet entre Σ' et Σ'' etc. Et le potentiel est bien prolongeable dans ces conditions là.

Si le chemin traverse deux fois une même couche, les fonctions de passage relatives à cette couche se doublent ou s'entredétruisent si l'on revient sur la couche avec la même branche de la fonction de passage; mais si c'est une autre branche elles s'additionnent encore algébriquement mais ne s'entredétruisent pas, ni ne se doublent.

A part les singularités (dans le sens précisé ci-dessus) des fonctions de passage, il n'y a que les frontières, si elles existent, des couches potentiantes comme autres singularités.

Si parmi les corps générateurs du potentiel il y a des variétés à n dimensions, il faudra pour chacune d'elles tenir compte de la fonction d'entrée et de la fonction de sortie. Le potentiel sera prolongeable au travers du premier domaine où la densité est holomorphe si la fonction d'entrée est holomorphe dans ce domaine, le long du chemin du prolongement, il sera prolongeable en dehors si la différence entre la fonction d'entrée et la fonction de sortie est elle-même prolongeable dans l'espace vide etc. On peut donc résumer ces résultats de la manière suivante:

Le potentiel pris en un premier point et prolongé jusqu'en un second

point est égal au potentiel calculé directement en ce second point augmenté de la somme algébrique des fonctions de passage au travers des variétés qui portent ou limitent la matière attirante.

Il est clair que si une même surface portait des densités différentes, suivant les portions de la couche considérée, ces densités devraient donner lieu à des fonctions de passage distinctes.

Le recours aux espaces topologiques de Riemann serait ici bien nécessaire.

§ 3. Quelques exemples simples.

Il est très facile de former les solutions du problème de Cauchy-Kowalewska pour des hyperplans ou des hypersphères qui portent ou limitent des répartitions homogènes de matière.

a) Hyperplan chargé d'une simple couche homogène:
Les équations à résoudre sont

$$\Delta p = 0, \quad \frac{dp}{d\nu} = \lambda_n \rho_1, \quad p = 0 .$$

La solution s'écrit, d étant la distance à l'hyperplan, comptée positivement dans le sens de la normale positive:

$$p = \lambda_n \rho_1 d .$$

b) Hyperplan chargé d'une double couche homogène:
Les équations sont

$$\Delta p = 0, \quad \frac{dp}{d\nu} = 0, \quad p = \lambda_n \rho_2 .$$

La solution est évidemment dans tout l'espace

$$p = \lambda_n \rho_2 .$$

c) Hyperplan limitant une matière homogène:
Les équations sont

$$\Delta p = \lambda_n \rho, \quad \frac{dp}{d\nu} = 0, \quad p = 0 .$$

La solution est, d étant la distance à l'hyperplan,

$$v = \frac{1}{2} \lambda_n \rho d^2$$

a') Hypersphère chargée d'une simple couche homogène:
Les équations sont

$$\Delta p = 0\,,\ \frac{dp}{d\nu} = \lambda_n \rho_1\,,\ p = 0\,.$$

Si R est le rayon de l'hypersphère et r la distance du point argument au centre, la solution s'écrit, en posant $\lambda_n = (n-2)\,S_n$ (v. § 1, p. 3)

$$p = S_n \rho_1 R^{n-1} (R^{2-n} - r^{2-n})\,.$$

b') Hypersphère chargée d'unc double couche homogène:
Les équations s'écrivent

$$\Delta p = 0\,,\ \frac{dp}{d\nu} = 0\,,\ p = \lambda_n \rho_2\,.$$

La solution est constante dans tout l'espace et c'est

$$p = \lambda_n \rho_2\,.$$

c') Hypersphère limitant une matière homogène:
Les équations s'écrivent

$$\Delta p = \lambda_n \rho\,,\ \frac{dp}{d\nu} = 0\,,\ p = 0\,.$$

La solution est

$$p = S_n \rho \left(\frac{n-2}{2n} r^2 + \frac{1}{n} R^n r^{2-n} - R^2\right).$$

Pour les hyperplans les fonctions de passage n'ont aucune singularité à distance finie. On en conclut que des corps attirants homogènes constitués ou limités uniquement par des surfaces E_{n-1} planes créent en tout point libre de matière des potentiels qui sont prolongeables dans l'espace entier et qui n'admettent que les frontières ou arêtes E_{n-2} comme singularités, et ce sont des lignes de ramification.

Pour les hypersphères les fonctions de passage admettent des pôles au centre, qui seront les seules singularités à distance finie à part les variétés E_{n-2} de ramification.

Les corps attirants sont supposés être tous à distance finie. Il est facile de démontrer qu'une distribution de matière homogène portée ou limitée par des hyperplans E_{n-1} crée, au voisinage de tout point, des

potentiels qui sont éléments de fonctions analytiques toujours multiformes. Il est donc impossible que l'attraction soit nulle, au voisinage d'un point pour une telle distribution.

Pour les sphères on sait qu'il n'en est pas toujours ainsi.

Une question intéressante se pose: Est il possible que de la matière répartie dans des domaines E_n crée dans les différentes régions de l'espace vide des potentiels qui appartiennent tous à une même fonction harmonique. Comme nous allons le voir sur un exemple simple la chose est posible, mais c'est une question de topologie assez délicate de dire quelles sont les conditions les plus générales pour qu'il en soit ainsi. Il faut que les domaines distincts libres de matière puissent être reliés par des chemins au termes desquels la somme algébrique des fonctions de passage soit nulle. Ceci se produira notamment si les corps sont homogènes et si les chemins envisagés traversent toujours deux fois en sens inverses les variétés E_{n-1}.

Voici l'exemple: Soient $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ deux hypersphères centrées en un même point A; $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ deux hypersphères centrées en un point B. Soient R_1, R_2, R_3, R_4 leurs rayons, on peut les choisir, ainsi que la distance d des deux centres de manière qu'il y ait quatre régions distinctes et libres de matière, si cette dernière est répartie entre les hypersphères de rayon R_1 et R_2 d'une part, R_3 et R_4 d'autre part. On vérifiera alors la posibilité de se rendre d'une région vide à une autre par des chemins qui traversent deux fois en sens inverses la même hypersphère. Il suffit d'avoir

$$d + R_3 > R_1 > R_2 > d - R_3\,;\quad d + R_2 > R_3 > R_4 > d - R_2\,.$$

Comme polydromie très particulière prenons une calotte hypersphèrique chargée d'une simple couche homogène. Le potentiel qu'elle crée admet une infinité de branches qui admettent toutes sauf la branche physique un pôle au centre de l'hypersphère. Elles se ramifient autour de la frontière de la couche et la branche physique est la seule qui s'annulle à l'infini.

§ 4. Sur les corps potentiellement équivalents.

Nous appelons ainsi les corps qui créent le même potentiel newtonien au voisinage d'un point, c'est à dire dans un certain domaine. Envisageons une variété Σ à $n-1$ dimensions, ouverte et telle que l'ensemble complémentaire soit d'un seul tenant. Supposons cette

variété chargées des deux couches. La variété et les densités satisfaisant aux conditions de régularité et d'holomorphie précisées au début du § 2, le potentiel pourra s'exprimer au moyen de la fonction de passage p par la relation

$$U = \frac{1}{\lambda_n} \int (r_n, p)\, d\Sigma.$$

La fonction p est holomorphe dans un domaine D dans lequel la variété Σ et la frontière F sont complètement immergées. Demandons nous si cette couche peut être déformée sans que son potentiel varie au voisinage d'un certain point de l'espace. Par déformation nous entendons le passage à une nouvelle variété Σ' analytique et règuliere voisine de la précédente et sur laquelle soient réparties des densités holomorphes. Les deux potentiels de Σ et de Σ' devant coincider au voisinage du point considéré engendrent la même fonction analytique. Si l'on va du point P à la frontière de Σ' située dans D, cette frontière serait une singularité pour le second potentiel et pas pour le premier. Il faut donc que les deux variétés aient même frontière. Elles auront aussi, évidemment, même fonction de passage. Ces variétés réunies forment une variété fermée E_{n-1} et l'identité de Green donne à l'extérieur

$$\int (r_n, p)\, d\Sigma - \int (r_n, p)\, d\Sigma' = 0.$$

Par contre il est imposible que deux variétés voisines et de simple couche soient équivalentes, car alors la fonction de passage serait nulle sur la variété fermée et harmonique dans le domaine D où cette variété est complètement immergée. Mais alors la fonction p serait identiquement nulle et les deux simples couches inexistantes.

Si les couches sont doubles la fonction de passage devrait avoir une dérivée normale nulle sur la variété fermée; par consequent elle se reduirait à une constante et les deux potentiels de double couche ne seraient que les angles solides sous lesquels les deux variétés apparaissent vues de l'extérieur de D.

Dans les conditions d'holomorphie précisés ci-dessus (§ 2) les couches ouvertes et infiniment voisines doivent avoir même frontière pour créer le même potentiel.

Si les couches peuvent être mixtes il y a une infinite de solutions possibles.

Si les couches sont simples il n'y pas de solution.

Si elles sont doubles la densité est la même, elle est constante et il a réduction aux angles solides.

Est-ce-qu'une variété E_{n-1} de forme quelconque pouvant se recouper elle même peut engendrer au voisinage d'un point un potentiel qui soit constant ou harmonique dans tout l-espace?

Remarquons que la chose est possible si la variété est fermée. Si elle est ouverte il doit être impossible de se rendre du point considéré à la frontière E_{n-2} sans traverser le variété E_{n-1}, car la frontière est toujours une ligne singlière. Il fandrait donc traverser la variéte E_{n-1} une ou plusieurs fois et la fonction de passage devra se ramilier elle même autour de la frontière envisagée, puisque le potentiel primitif ne s'y ramifie pas. Plus exactement, une de branche de la fonction de passage devra être fonction période pour une somme algébrique de différentes branches de cette même fonction de passage. C'est une question qui n'est pas résolue et la réponse, qui devrait s'inspirer autant de la topologie que de la théorie des fonctions serait intéressante pour la théorie du potentiel.