40) $$\sigma(V)\,\sigma = u(\omega)\,\omega$$

où la fonction moyenne $u(\omega)$ est définie par la rèpartition des sources de chaleur dans (Λ). On trouve suivant les téorèmes mentionnés, que

41) $$V(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Lambda)} u(\tau)\, m(\omega, r)\, d\tau + \varphi(\omega),$$

$\varphi(x)$ étant une foncfion harmonique. Si $v(\omega)$ est le premier terme dans (41), la recahernhe de $\varphi(x)$ revient à la solution de l'équation $\Delta\varphi = 0$ à la condition sur la frontière

42) $$\sigma(\varphi) = -\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} h\varphi\, d\sigma - \sigma(v) - \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} hv\, d\sigma = -\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} h\varphi\, d\sigma + w(\sigma)$$

Si l'on cherche $\varphi(x)$ nous la forme d'un potentiel de simple couche

43) $$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)} \frac{\mu(\sigma)\, d\sigma}{r},$$

où (S) est la frontière de (Ω), on l'obtient en résolvant une équation intégrale.

On trouve, que[25])

44) $$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} w(\sigma)\; G(y, x)\, d\sigma;$$

$G(y, x)$ est la fonction de Green, qui répond au problème de la température stationnaire, posé de la manière ordinaire:

45) $$\Delta V = 0, \text{ dans } (\Omega), \quad \frac{dV}{dn} = -hV + \psi, \text{ sur } (S)$$

9. La théorie des équations intégrales, étant la suppléante de la théorie des équations différentielles, les considération des alinéas précedents conduisent à croire, que l'étude des équations intégrales en intégrales de Stieltjes a quelque valeur. Je me borne à la remarque, que même en laissant de côté ces considérations, on est conduit à cette conclusion par l'étude des questions, qui se rattachent à la théorie de la fonction spéctrale.

6—III—35.

[25]) Voir (7) page 439.

Sur une représentation géométrique de la théorie des fonctions analytiques.

par

C. W. Oseen.

1. **Introduction.** Comme base de la théorie des fonctions analytiques on peut employer les équations:

(1) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2,$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0.$$

De ces équations on obtient en effet ou:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2, \text{ ou: } \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2,$$

donc ou:

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}$$

ou:

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

Les équations (3) sont les bases de la thésrie de Cauchy-Riemann des fonctions analytiques de la variable $x_1 + i x_2$ et les équations (4) sont de même les bases de la théorie des fonctions analytiques $u + iv$ de $x_2 + i x_1$.

Considérons maintenant les équations:

(5)
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3}=0.$$

Supposons que l'on ait trouvé une solution u, v de ces équations. Si $F(u+iv)=U(u,v)+i\,V(u,v)$ (U et V réelles) est une fonction analytique de $u+iv$, les fonctions U, V donnent une nouvelle solution de (5). On obtient de cette manière une représentation géométrique des fonctions analytiques. L'élément fondamental de cette représentation est un système de courbes de l'espace. Nous désignerons dans la suite ce système par C. Á une quantité complexe déterminée correspond une paire de surfaces orthogonales, engendrées par des courbes de C et se coupant dans une courbe de C. Á toute courbe de C est donc, si l'on se donne une solution u, v de (5), associée une paire de surfaces déterminée. On peut pourtant à l'aide des courbes de C d'une infinité de manières engendrer des paires de surfaces se coupant orthogonalement selon les courbes de C. Á ces différentes manières d'associer les courbes C en des surfaces orthogonales correspondent les différentes fonctions anlytiques $U(u, v)+i\,V(u, v)$ que l'on peut former de $u+iv$.

Nous nous proposons dans ce qui suit d'ébaucher une théorie des systèmes de courbes qui dans cette correspondance servent à représenter les quantités complexes et des surfaces, générées par ces courbes, qui servent à représenter les fonctions analytiques.

Dans un travail antérieur nous avons déjà traité un cas particulier du problème actuel. Nous avons supposé dans ce travail que les fonctions u, v satisfassent à l'équation de Laplace:

$$\Delta u=0, \qquad \Delta v=0.$$

Les courbes C sont dans ce cas des droites, les surfaces $u=$ const., $v=$ const. des surfaces reglées.

2. **Solution du système (5).** Les équations (5) peuvent être condensées dans une seule équation. En posant $u+iv=W$ on a en effet:

(6)
$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)^2=0.$$

On peut aisément intégrer cette équation. Une fonction W, définie par la relation:

(7)
$$F(W,t)+\frac{1}{2}(1-t^2)\,x_1+t\,x_2+\frac{i}{2}(1+t^2)\,x_3=0,$$

où $F(W,t)$ est une fonction dérivable de W et t, donne déja une solution et on obtient une solution plus générale en joignant à cette équation la suivante:

(8)
$$\frac{\partial F}{\partial t}-t\,x_1+x_2+i\,t\,x_3=0$$

et en éliminant t entre (7) et (8). La partie réelle, u, et la partie imaginaire, v, de $W=u+iv$ donne une solution de (5).

Posons par exemple:

$$F(W, t)=W.$$

Nous aurons:

$$W=\frac{1}{2}(t^2-1)\,x_1-t\,x_2-\frac{i}{2}(t^2+1),$$

$$t=\frac{x_2}{x_1-i\,x_3}.$$

Donc, si l'on pose $x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$, $x_1^2+x_3^2=r^2$:

$$W=-\frac{1}{2}\frac{R^2}{x_1-i\,x_3}=-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}(x_1+i\,x_3).$$

Donc:

$$u=-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}x_1, \quad v=-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}x_3.$$

Les courbes C sont donc dans ce cas des cercles, situés dans des plans, passant par l'axe de x_2 et tangents à cet axe dans l'origine.

On a:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2=\frac{R^4}{4\,r^4}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation (6) nous devons construire une solution W prenant des valeurs données sur une multiplicité à deux dimensions dans l'espace x_1, x_3, x_3. Soit cette multiplicité et les valeurs correspondantes de W données par les équations:

(9)
$$x_j=x_j(s_1, s_2) \qquad (j=1, 2, 3) \qquad W=W(s_1, s_2)$$

Notre intégrale doit être générée par les caractéristiques de l'équation (6) qui passent par les points de la multiplicité (9) et ont un contact du premier ordre avec elle. On obtient de là la règle suivante pour la construction de l'intégrale générale de (6). On détermine trois quantités p_1, p_2, p_3, qui satisfont aux relations:

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s_1} &= p_1 \frac{\partial x_1}{\partial s_1} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial s_1} + p_3 \frac{\partial x_3}{\partial s_1}, \\ \frac{\partial W}{\partial s_2} &= p_1 \frac{\partial x_1}{\partial s_2} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial s_2} + p_3 \frac{\partial x_3}{\partial s_2}. \\ p_1^2 + p_2^2 &+ p_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Puis on pose

$$11)\quad x_j = x_j(s_1, s_2) + p_j(s_1, s_2) \,.\, t, \; W = W(s_1, s_2), \quad (j = 1, 2, 3).$$

En éliminant s_1, s_2, t on obtient de ces quatre équations une relation entre W et x_1, x_2, x_3. C'est l'intégrale cherchée.

Les équations (10) donnent:

$$p_1 = a_1 a_3 \pm i a_2 a, \; p_2 = a_2 a_3 \mp i a_1 a, \; p_3 = - a_1^2 - a_2^2,$$

en posant:

$$a_j = \left(\frac{\partial W}{\partial s_1}\frac{\partial x_j}{\partial s_2} - \frac{\partial W}{\partial s_2}\frac{\partial x_j}{\partial s_1}\right) : \sqrt{D}, \; a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\begin{aligned} D = &\left(\frac{\partial W}{\partial s_1}\frac{\partial x_1}{\partial s_2} - \frac{\partial W}{\partial s_2}\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2} - \frac{\partial x_1}{\partial s_2}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial W}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} - \frac{\partial W}{\partial s_2}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2} - \frac{\partial x_2}{\partial s_2}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right) \\ &\pm i \left(\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} - \frac{\partial x_1}{\partial s_2}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\right) \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial s_1}\right)^2 \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial s_2}\right)^2 \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial s_1}\right)^2 - 2\frac{\partial W}{\partial s_1}\frac{\partial W}{\partial s_2}\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s_1}\frac{\partial x_j}{\partial s_2}\right\}} \end{aligned}$$

Sans restreindre la généralité on peut simplifier les formules en supposant $x_1 = 0$, $x_2 = s_1$, $x_3 = s_2$ pour $t = 0$. On a alors:

$$D = -\frac{\partial W}{\partial s_2} \quad a_1 = 0, \; a_2 = \sqrt{-\frac{\partial W}{\partial s_2}}, \; a_3 = \frac{\partial W}{\partial s_1} : \sqrt{-\frac{\partial W}{\partial s_2}}$$

et par conséquent:

$$p_1 = i a_2 a = i \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial s_2}\right)^2}, \quad p_2 = a_2 a_3 = \frac{\partial W}{\partial s_1},$$

$$p_3 = - a_2^2 = \frac{\partial W}{\partial s_2}.$$

Posons par exemple pour $t = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = s_1$, $x_3 = s_2$, $W = s_1 s_2$. Nous aurons:

$$x_1 = i\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \,.\, t, \; x_2 = s_1 + s_2 t, \; x_3 = s_2 + s_1 t, \; W = s_1 s_2.$$

En éliminant s_1, s_2, t entre ces équations on trouve:

$$27 W^2 x_1^4 - R^6 x_1^2 - 18 W x_1^2 (W - x_2 x_3) - R^4 (W - x_2 x_3)^2$$
$$- 16 W (W - x_2 x_3)^3 = 0.$$
$$(R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Les courbes C_1 c'est à dire les courbes $u =$ const., $v =$ const., sout donc des courbes algébriques de l'ordre 64.

3. Sur une méthode de Sophus Lie dans la théorie des équations différentiélles. La solution du système (5) que nous avons trouvée par l'artifice de condenser ce système dans l'équation (6), peut-on la retrouver par les méthodes générales de la théorie des équations différentielles?

Dans un de ses derniers mémoires Sophus Lie a donné le théorème suivant:

„Soit donné un système complètement intégrable de q équations differentielles du premier ordre à n variables indépendantes et à m variables dépendantes:

$$F_j(x_1 \ldots x_n;\; z_1 \ldots z_m;\; p_{11} \ldots p_{mn}) = 0$$

$$p_{jk} = \frac{z_i}{x_k}$$

On forme alors les équations.

$$V_{x_i} + V_{z_1} p_{1j} + \ldots + V_{z_m} p_{mi} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

S'il réussit d'éliminer les nm quantités p_{mn} entre ces $q+n$ équations, les relations ainsi obtenues:

$$\Omega_k(x_1, \ldots x_n;\ z_1, \ldots z_m;\ V_{x_1}, \ldots V_{x_n};\ V_{z_1}, \ldots V_{z_m}) = 0$$

forment un système d'équations différentielles du premier ordre à une seule variable indépendante V. A ce système satisfait toute multiplicité intégrale $z_1 = \varphi_1, \ldots z_m = \varphi_m$ du système $F_1 = 0, \ldots F_q = 0$".

Appliquons ce théorème à notre système (5). Nous avons à former les équations:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \\ (12)\qquad &\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}$$

S'il réussit d'éliminer les quantités $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_3}$ des systèmes (5) et (12) le théorème de **Lie** est applicable. Or cette élimination est impossible. Le théorème de **Lie** ne semble donc pas s'appliquer au système (5).

Remarquons pourtant cela. Il existe en général ∞^1 paires de vecteurs grad u et grad v qui remplissent les systèmes (5) et (12). Si l'on cherche les conditions pour qu'il existe ∞^2 paires de cette nature on trouve:

$$(13)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)^2 = 0.$$

Ces équations nous ramènent à la méthode d'intégration du paragraphe 2.

Il parait donc exister une méthode de traiter les systèmes d'équations différentielles plus générale que celle donnée par l'illustre géomètre norvégien.

4. Le systéme (5) considéré comme une transformation de Bäcklund généralisée. Les équations (5) combinées avec les équations $x_j' = x_j$, $(j = 1, 2, 3)$ définissent une transformation entre les systèmes $x_j, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}$

et $x_j = x_j$, v et $\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial x_j}$. Évidemment il n'est pas possible d'exprimer les variables d'un système par les variables de l'autre système. C'est donc une transformation de **Bäcklund** généralisée. Une transformation de **Bäcklund** ne s'applique pas à une multiplicité quelconque. Elle transforme en général les multiplicités intégrales d'un système d'équations différentielles déterminé en les multiplicités intégrales d'un autre système d'équations différentielles déterminé. Dans notre cas, où la transformation est symétrique par rapport aux deux systèmes $x_j, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}$ et x_j', v et $\frac{\partial v}{\partial x_j'}$, elle transforme un certain système différentiel en lui même. Il s'agit d'abord d'élucider le caractère de ce système.

Le système (5) peut être considéré comme un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre auquel doit satisfaire la fonction u. Posons pour plus de simplicite:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = p_j, \quad \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 = E^2.$$

Nous aurons:

$$(14)\qquad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = E^2, \quad p_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0.$$

Pour que ces équations soient compatibles il faut d'abord que le crochet de Jacobi:

$$(15)\qquad \sum_{jik} p_j p_k \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} + E \sum_j \frac{\partial E}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

s'annulle à cause de (14). Il faut puis que les cròchets de Jacobi, formés de l'expression (15) et des expressions figurantes dans les deux équations (14), s'annullent à cause de (14) et (15). On obtient de cette manière deux nouvelles équations:

$$\sum_{j,k,m} p_j\, p_k \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_m} \frac{\partial^3 v}{\partial x_j \partial x_k \partial x_m} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_m} \right\}$$

$$+ \sum_{j,k} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[E \frac{\partial E}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right] = 0,$$

$$\sum_{j,k,m} p_j\, p_k\, p_m \frac{\partial^3 v}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_m} + \sum_j p_j \sum_k \Big\{ 3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_j\, \partial x_k} E \frac{\partial E}{\partial x_k} + \tag{16}$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E \frac{\partial E}{\partial x_k} \right) \Big\} = 0 .$$

En éliminant p_1, p_2, p_3 entre (14), (15), égalée à 0, et (16) on obtient deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre auquelles doit satisfaire la fonction v.

Nos équations (5), considérées comme une transformation de Bäcklund généralisée, transforment donc un système de deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre en lui-même.

5. **Nouvelles formes des relations (5).** Le système (5) fait correspondre à tout point de l'espace x_1, x_2, x_3 trois directions orthogonales entre elles, à savoir les directions des vecteurs:

$$\vec{L}^{(1)} = \frac{\operatorname{grad} u}{E}, \quad \vec{L}^{(2)} = \frac{\operatorname{grad} v}{E}, \tag{17}$$

$$\vec{L}^{(3)} = \frac{\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v}{E^2} .$$

On a:

$$\sum_j L_j^{(k)} L_j^{(m)} = \delta_{km} \begin{array}{l} = 1, \text{ si } k = m \\ = 0, \text{ si } k \neq m . \end{array}$$

Pour décrire en manière simple et commode la configuration géométrique des systèmes de directions orthogonales correspondant au voisinage d'un certain point de l'espance, x_1, x_2, x_3, on peut employer les quantités $\varkappa_k^j$, définies de la manière suivante:

$$\varkappa_k^j = \sum P_m^{(j)} L_m^{(k)},$$

$$P_m^{(1)} = \sum L_k^{(2)} \frac{\partial L_k^{(3)}}{\partial x_m}, \quad P_m^{(2)} = \sum L_k^{(3)} \frac{\partial L_k^{(1)}}{\partial x_m}, \quad P_m^{(3)} = \sum L_k^{(1)} \frac{\partial L_k^{(2)}}{\partial x_m} .$$

On trouve si $\vec{L}^{(1)}, \vec{L}^{(2)}, \vec{L}^{(3)}$ ont les valeurs (17);

$$\varkappa_1^1 = \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot (\vec{L}^{(2)} \nabla) \operatorname{grad} u =$$

$$- \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot (\vec{L}^{(1)} \nabla) \operatorname{grad} v,$$

$$\varkappa_2^1 = - \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} E,$$

$$\varkappa_3^1 = - \frac{1}{E} \Delta v,$$

$$\varkappa_1^2 = \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \cdot \operatorname{grad} E,$$

$$\varkappa_2^2 = - \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot (\vec{L}^{(1)} \nabla) \operatorname{grad} v$$

$$= \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot (\vec{L}^{(2)} \nabla) \operatorname{grad} u,$$

$$\varkappa_3^2 = \frac{1}{E} \Delta u,$$

$$\varkappa_1^3 = - \frac{1}{E^2} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} E, \quad \varkappa_2^3 = \frac{1}{E^2} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} E,$$

$$\varkappa_3^3 = \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot (\vec{L}^{(1)} \nabla) \operatorname{grad} v$$

$$= - \frac{1}{E^3} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot (\vec{L}^{(2)} \nabla) \operatorname{grad} u .$$

On a donc:

$$\varkappa_1^1 = \varkappa_2^2 = - \varkappa_3^3, \quad \varkappa_2^1 + \varkappa_1^2 = 0. \tag{18}$$

C'est là une nouvelle forme des relations (5).

Évidement on peut exprimer les composantes des vecteurs $\vec{L}^{(1)}, \vec{L}^{(2)}, \vec{L}^{(3)}$ par les trois angles d'Euler. Posons:

$$L_1^{(1)} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi,$$

$$L_2^{(1)} = - \sin \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi,$$

$$L_3^{(1)} = \sin \vartheta \sin \psi;$$

$$L_1^{(2)} = \cos \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi,$$

$$L_2^{(2)} = - \sin \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi,$$

$$L_3^{(2)} = - \sin \vartheta \cos \psi;$$

$$L_1^{(3)} = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad L_2^{(3)} = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad L_3^{(3)} = \cos \vartheta.$$

On a alors, si l'on pose:

$$\Omega_1 f = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x_1} - \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

(19)

$$\Omega_2 f = \cos \vartheta \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cos \vartheta \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x_2} - \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$\varkappa_1^1 - \varkappa_2^2 = \cos 2\psi (\Omega_1 \vartheta + \sin \vartheta \, \Omega_2 \varphi) - \sin 2\psi (\Omega_2 \vartheta - \sin \vartheta \, \Omega_1 \varphi),$$

$$\varkappa_2^1 + \varkappa_1^2 = \cos 2\psi (\Omega_2 \vartheta - \sin \vartheta \, \Omega_1 \varphi) + \sin 2\psi (\Omega_1 \vartheta = \sin \vartheta \, \Omega_2 \varphi).$$

Donc:

(20) $$\Omega_1 \vartheta + \sin \vartheta \, \Omega_2 \varphi = 0, \qquad \Omega_2 \vartheta - \sin \vartheta \, \Omega_1 \varphi = 0.$$

A ce système de deux équations différentielles linéaires doivent satisfaire les courbes C, c'est à dire les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Remarquons que l'on a:

$$\operatorname{div} \vec{L}^{(3)} = \Omega_2 \vartheta + \sin \vartheta \, \Omega_1 \varphi,$$

$$\vec{L}^{(3)} \operatorname{rot} \vec{L}^{(3)} = \Omega_1 \vartheta - \sin \vartheta \, \Omega_2 \varphi.$$

Le système (20) ne se distingue donc du système:

$$\operatorname{div} \vec{L}^{(3)} = 0, \quad \vec{L}^{(3)} \operatorname{rot} \vec{L}^{(3)} = 0$$

que par deux signes.

Des équations (20) on peut déduire deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre auxquelles doit satisfaire ϑ. A deux autres équations du même ordre doit satisfaire φ.

6. **Propriétés géométriques des courbes C et des trajectoires orthogonales des surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$** Les quantités $\varkappa_3^1$ et $\varkappa_3^2$ nous-

donnent le plan tangent et la courbure d'une courbe $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Si α_3 et $\frac{1}{2}\pi - \alpha_3$ sont les angles que fait la normale principale de la courbe avec les vecteurs $\vec{L}^{(1)}$ et $\vec{L}^{(2)}$ et si ρ_3 est le rayon de courbure de la courbe on a:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\Delta u}{\Delta v}, \quad \frac{1}{\rho_3} = \sqrt{\frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}{E}}.$$

On voit que les courbes C sont des droites si $\Delta u = \Delta v = 0$. Ce résultat est en accord avec la théorie donnée dans mon travail antérieur.

La torsion de la courbe $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ a la valeur:

$$\frac{1}{\tau_3} = - \frac{1}{E^2} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot \left\{ \sqrt{\frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}{\Delta v}} \operatorname{grad} \frac{\Delta u}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{E^2} (\operatorname{grad} u \nabla) \operatorname{grad} v \right\}$$

$$= \frac{1}{E^2} \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot \left\{ \operatorname{grad} \alpha_3 - \frac{1}{F^2} (\operatorname{grad} u \nabla) \operatorname{grad} v \right\}$$

Si α_1 et $\frac{1}{2}\pi - \alpha_1$ sont les angles que fait la normale principale de la trajectoire orthogonale des surfaces $u = \text{const.}$ avec les vecteurs $\vec{L}^{(2)}$ et $\vec{L}^{(3)}$, on a:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} E}{E \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} E}.$$

Le rayon de nourbure de la courbe a la valeur:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{|\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} E|}{E^2}.$$

Enfin on trove pour la torsion $1/\tau_1$ la valeur:

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} E \cdot (\operatorname{grad} u \nabla) \operatorname{grad} E}{E^2 (\operatorname{grad} E)^2 - (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} E)^2}.$$

Évidemment on obtient par des formules semblables le rayon de courbure et la torsion d'une trajectoire orthogonale des surfaces $v = \text{const.}$

7. **Intégration du système (20).** Nous savons que le système (20) est complètement intégrable. Il doit donc être possible de trouver son intégrale générale. Remarquons à cet effet que l'on obtient de (20):

$$(\Omega_1 + i\,\Omega_2)\,\vartheta - i \sin\vartheta\,(\Omega_1 + i\,\Omega_2)\,\varphi = 0.$$

Or on a, si l'on pose:

$$\varphi + i \log \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = z,$$

donc:

$$\cos z = \frac{1}{\sin\vartheta}(\cos\varphi + i\cos\vartheta\sin\varphi),$$

$$\sin z = \frac{1}{\sin\vartheta}(\sin\varphi - i\cos\vartheta\cos\varphi):$$

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}(\Omega_1 + i\,\Omega_2)\,\vartheta = \left(\cos z\frac{\partial}{\partial x_1} - \sin z\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2},$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}(\Omega_1 + i\,\Omega_2)\,\varphi = \left(\cos z\frac{\partial}{\partial x_1} - \sin z\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi.$$

L'équation (20) peut donc s'écrire:

(20 bis) $$\cos z\frac{\partial z}{\partial x_1} - \sin z\frac{\partial z}{\partial x_2} - i\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0.$$

Or de cette équation il s'en suit qu'entre $\vartheta, \varphi, x_1, x_2, x_3$ il doit exister une relation de la forme:

(21) $$V(x_1 - i\cos z\, x_3,\ x_2 + i\sin z\, x_3,\ z) = 0.$$

On doit donc avoir:

$$V\left(x_1 + \frac{x_3}{\sin\vartheta}(\cos\vartheta\sin\varphi - i\cos\varphi),\ x_2 + \frac{x_3}{\sin\vartheta}(\cos\vartheta\cos\varphi + \right.$$

$$\left. + i\sin\varphi),\ \varphi + i\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) = 0.$$

Cette relation complexe équivaut à deux relation réelles. Elle suffit donc pour déterminer ϑ et φ en fonction de x_1, x_2, x_3.

La méthode de Sophus Lie, généralisée de la manière indiquée plus haut, conduit au même résultat.

La fonction V dépend en général non seulement des variables:

$$x_1 - i\cos z\cdot x_3 = \xi,\ x_2 + i\sin z\cdot x_3 = \eta,\ z$$

mais encore d'un certain nombre de paramètres. Ainsi on peut satisfaire à l'équation (20 bis) en posant:

$$z = \varphi + i\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \text{const.} = \varphi_0 + i\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2}.$$

Ici φ_0 et ϑ_0 sont des paramètres. Si l'on passe à un nouveau système d'axes, non seulement x_1, x_2, x_3, z subissent une certaine transformation, mais aussi les paramètres changent. Si par exemple, l'on fait tourner la croix des axes x_1 et x_2 autour l'axe x_3, non seulement x_1, x_2, z se transforment:

(22) $$x_1 \to x_1' = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha,\ x_2 \to x_2' = -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha,$$

23) $$z \to z' = z + \alpha,$$

mais aussi φ_0 reçoit un accroissement α.

Dans le cas spécial. où V ne contient pas des paramètres dépendant du choix des axes x_1 et x_2, l'équation $V = 0$ doit être valable même après une transformation (22) et (23). La condition en est que l'expression:

(24) $$\eta\frac{\partial V}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial V}{\partial\eta} + \frac{\partial V}{\partial z}$$

s'annulle à cause de $V = 0$. Cela peut se faire de deux manières différentes. Évidemment la condition est remplie, si l'expression (24) s'annulle identiquement. C'est le cas, si V ne contient que les invariants:

$$\xi\cos z - \eta\sin z,\ \xi\sin z + \eta\cos z.$$

Mais l'exemple $V \equiv \xi + i\,\eta$ montre que la condition peut être remplie aussi d'une manière différente.

Si l'on connaît le champ des directions φ, ϑ le problème se pose de trouver les courbes qui sont tangentes à ces directions, en d'autres termes de trouver les courbes C correspondant à ce champ. Les équations différentielles de ces courbes sont:

$$\frac{d\,x_1}{\sin\vartheta\sin\varphi} = \frac{d\,x_2}{\sin\vartheta\cos\varphi} = \frac{d\,x_3}{\cos\vartheta}$$

De ces équations il résulte dans tous les cas:

$$\frac{d\xi}{\sin z} = \frac{d\eta}{\cos z}. \tag{25}$$

Si V ne dépend pas z, l'équation $V = 0$ donne une relation entre ξ et η. Dans ce cas l'équation (25) exige que $d\xi = d\eta = 0$, c'est à dire que:

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \text{const.}$$

Dans ce cas les courbes C sont toujours des cercles ou des droites.

Il y a un autre cas, où l'équation (25) est certainement intégrable par une quadrature. Si la fonction V remplit la condition de symétrie rotatoire autour de l'axe x_3, la transformation (22) amène la transformation (23). On peut exprimer ce fait aussi en disant que la transformation:

$$\xi \to \xi' = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \; \eta \to \eta' = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$$

amène la transformation (23). Or dans ce cas l'équation différentielle (25) est transformée dans elle même par une rotation autour de l'axe x_3. Elle doit donc être intégrable par une quadrature.

Considérons quelques exemples!

1. Posons:

$$V \equiv \xi \cos z - \eta \sin z + f(z) = 0.$$

Nous aurons:

$$d\xi \cos z - d\eta \sin z - (\xi \sin z + \eta \cos z - f'(z))\, dz = 0.$$

Donc sur les courbes C $dz = 0$, donc $z =$ const. Les courbes C ont donc l'équation:

$$\xi \cos z - \eta \sin z + f(z) = 0, \; z = \text{const.}$$

ou:

$$x_1 \cos z - x_2 \sin z - i x_3 + f(z) = 0.$$

C'est l'équation d'un système de plans isotropes. Nous retrouvons le cas traité dans mon travail antérieur.

2.

$$V \equiv \xi \sin z + \eta \cos z + \frac{d f(z)}{dz} = 0.$$

Nous aurons:

$$\sin z \, d\xi + \cos z \, d\eta + (\cos z - \sin z + f''(z))\, dz = 0.$$

Donc sur les courbes C à cause de (25):

$$d\xi + \sin z\,(\xi \cos z - \eta \sin z + f''(z))\, dz = 0.$$

$$d\eta + \cos z\,(\xi \cos z - \eta \sin z + f''(z)\, dz = 0.$$

Considérons ξ et η sur les courbes C comme des fonctions de z. Nous obtenons par une nouvelle différentiation:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} - \cot z \frac{d\xi}{dz} - \sin z\,(\xi \sin z + \eta \cos z - f'''(z))\, dz = 0$$

donc:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} - \cot z \frac{d\xi}{dz} = -\sin z\,(f'''(z) + f'(z))$$

et;

$$\xi = \cos z\,(f(z) + a) - \sin z\, f'(z)$$

et de même:

$$\eta = -\sin z\,(f(z) + a) - \cos z\, f'(z).$$

Donc enfin:

$$x_1 - \cos z\,(f(z) + a + i x_3) + \sin z\, f'(z) = 0,$$

$$x_2 + \sin z\,(f(z) + a + i x_3) + \cos z\, f'(z) = 0.$$

Des ces équations on obtient les équations des courbes C par des éliminations.

3.

$$V \equiv \xi \cos z - \eta \sin z + f(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Posons:

$$\xi \sin z + \eta \cos z = Z.$$

Nous aurons sur les courbes C:

$$\frac{d\xi}{\sin z} = \frac{d\eta}{\cos z} = \frac{dz}{2f'} = \frac{dZ}{1 - 2ff'}.$$

D'autre part:

$$Z^2 + f^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

donc:

$$2Z\,dZ = (1 - 2ff')\, d(\xi^2 + \eta^2).$$

Donc sur les courbes C:

$$\frac{dz}{2f'} = \frac{d(\xi^2 + \eta^2)}{2Z}$$

et:

$$z=\int^{\xi^2+\eta^2}\frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{t-f^2(t)}}$$

On obtient donc les courbes C par une quadrature et par des éliminations.

8. **Relations entre la théorie du potentiel de Newton et la géometrie des cercles.** La transformation:

$$x_j-x_j'=\frac{x_j-a_j}{R^2}\,d^2,\quad R^2=\sum(x_j-a_j)^2$$

transforme le système (5) en lui même. D'une solution de ce système on peut donc obtenir une nouvelle solution en transformant par des rayons réciproques. Des solutions de (5), étudiées dans mon travail antérieur, on déduit de cette manière une nouvelle catégorie de solutions, caractèrisée par ce fait que les courbes $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ sont des cercles. Si u, v est une solution appartenant à cette catégorie, la fonction complexe:

$$\frac{u+iv}{R}$$

satisfait à l'équation de Laplace.

Analytiquement on obtient ces solutions en partant de l'équation:

$$s_0\sum_j(x_j-a_j)^2+\sum_j s_j(x_j-a_j)=0,$$

où les coefficients $s_j\,(j=1,2,3)$ remplissent la condition:

$$s_1^2+s_2^2+s_3^2=0.$$

Si s_0, s_1, s_2, s_3 sont des fonctions (dérivables) d'une quantité complexe W, cette quantité par l'équation (21) est définie comme une fonction de x_1, x_2, x_3. En posant $W=u+iv$ (u et v réelles) on a une solution du système (5) appartenant à la catégorie considérée ici.

Si a_1, a_2, a_3 sont des quantités réelles, les cercles qui dons ce cas forment le système C passent tous par le point $x_j=a_j\,(j=1,2,3)$. Or il n'est point nécessaire de supposer que les quantités a_j et d soient réelles. En permettant à ces quantités de prendre des valeurs complexes on obtient une catégorie plus vaste de solutions de (5).

Partons par exemple de la fonction W, étudiée dans mon travail antérieur et correspondant au cycle $s_0=ics_3$:

$$\frac{x_3+ci\pm\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2+2icx_3}}{x_1-ix_2}.$$

On suppose ici que c soit une quantité réelle. Fainsons maintenant une transformation par des rayons réciproques:

$$x_j\to x_j'=\frac{d^2}{\sum(x_k-a_k)^2}(x_j-a_j),\quad(a=a_j+i\beta_j,\ d^2=D_1+iD_2)$$

Nous aurons:

$$W'=\frac{d^2(x_3-a_3)+ic\sum(x_k-a_k)^2\pm\sqrt{\sum(x_k-a_k)^2\left\{d^4-c^2\sum(x_k-a_k)^2+2icd^2(x_3-a_3)\right\}}}{d^2\,(x_1-a_1-i(x_2-a_2))}$$

On voit de cette expression que les deux valeurs que W peut prendre dans un point x_1, x_2, x_3 se permutent, si le point suit un contour fermé se tournant une fois autour d'un des deux cercles.

$$\sum(x_j-a_j)^2=\sum\beta_j^2,\qquad\sum\beta_j(x_j-a_j)=0;$$

$$(x_1-a_1)^2+(x^2-a_2)^2+\left(x_3-a_3+\frac{D_2}{c}\right)^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\left(\beta_3+\frac{D_1}{c}\right)^2;$$

$$\beta_1(x_1-a_1)+\beta_2(x_2-a_2)+\left(\beta_3+\frac{D_1}{c}\right)\left(x_3-a_3+\frac{D_2}{c}\right)=0.$$

Les courbes $C\,(W=u+iv=\text{const.})$ ont dans ce cas les équations:

$$(x_1-A_1)^2+(x_2-A_2)^2+(x_3-A_3)^2=C^2,$$

$$(\beta_1-B_1)(x_1-A_1)+(\beta_2-B_2)(x_2-A_2)+(\beta_2-B_3)(x_3-A_3)=0.$$

Les coefficients de ces équations ont les valeurs:

$$A_1=a_1+\frac{D_1}{4c}v\,\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2}+\frac{D_2}{4c}u\,\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2},$$

$$A_2 = a_2 - \frac{D_1}{4\,c}\,u\,\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2} + \frac{D_2}{4\,c}\,v\,\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2}\,,$$

$$A_3 = a_3 - \frac{D_2}{2\,c}\,,$$

$$B_1 = \frac{D_1}{4\,c}\,u\,\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2} - \frac{D_2}{4\,c}\,v\,\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2}\,,$$

$$B_2 = \frac{D_1}{4\,c}\,v\,\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2} + \frac{D_2}{4\,c}\,u\,\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2}\,,$$

$$B_3 = \frac{D_1}{2\,c}\,,$$

$$C^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \left(\beta_3 + \frac{D_1}{2\,c}\right)^2 - \frac{D_1}{2\,c}\,\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2}\,(u\,\beta_1 + v\,\beta_2)$$
$$- \frac{D_2}{2\,c}\,\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2}\,(u\,\beta_2 - v\,\beta_1) + \frac{D_1^2}{16\,c^2}\,\frac{(u^2+v^2-1)^2}{u^2+v^2}$$
$$+ \frac{D_2^2}{16\,c^2}\,\frac{(u^2+v^2+1)^2}{u^2+v^2}\,.$$

Les cas $u^2+v^2 = \text{const.} = K^2$ et $v/u = \text{const.} = k$ ont un interêt particulier. Si l'on écrit les équations des courbes C dans la forme:

$$(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-A_3)^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \left(\beta_3 + \frac{D_1}{2\,c}\right)^2 + \frac{D_1^2}{4\,c^2} - \frac{D_2^2}{4\,c^2}$$
$$= E_1\,(x_1-a_1) + E_2\,(x_2-a_2) + E_3\,,$$
$$\beta_1\,(x_1-a_1) + \beta_2\,(x_2-a_2) + (\beta_3 - B_3)\,(x_3 - A_3) - \frac{D_1\,D_2}{4\,c^2}$$
$$= F_1\,(x_1-a_1) + F_2\,(x_2-a_2) + F_3\,,$$

les coefficients E et F dans le cas:

$$u^2+v^2 = K^2$$

sont des fonctions linéaires et homogènes de u et v et dans le cas:

$$\frac{v}{u} = k$$

des fonctions linéaires et homogènes de u et u^{-1}. On en conclut que les surfaces engendrées par les cercles C dans ces deux cas sont des surfaces algébriques de l'ordre 6.[1])

Dans le cas spécial $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = D_2 = 0$, $u^2+v^2 = \text{const.}$ l'ordre se réduit évidemment à 4.

9. **Sur les courbes C algébriques.** Nous avons montré dans notre exemple 2 que la fonction $W \equiv \xi \sin z + \eta \cos z + f'(z)$ donne lieu à des courbes C dont les équations sont:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &x_1 - \cos z\,(f(z) + a + i\,x_3) + \sin z\,.\,f'(z) = 0\,,\\ &x_2 + \sin z\,(f(z) + a + i\,x_3) + \cos z\,.\,f'(z) = 0\,. \end{aligned}$$

Si $f(z)$ est une fonction algébrique de $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$, ces courbes C sont des courbes algébriques.

Posons:

$$\cos z = c_1 + i\,c_2\,,\ \sin z = s_1 + i\,s_2\,,\ f(z) = f_1 + i f_2\,,$$
$$f'(z) = f_1' + i f_2',\ a = a_1 + i\,a_2$$

et supposons que $c_1,\ c_2\ \ldots a_1,\ a_2$ soient des quantités réelles. En égalant séparément à zero les parties réelles et les parties purement imaginaires des membres gauches des équations (26) on trouve:

$$(27)\qquad \begin{aligned} &x_1 + c_2\,x_3 - c_1\,(f_1 + a_1) + c_2\,(f_2 + a_2) + s_1\,f_1' - s_2\,f_2' = 0\,,\\ &x_2 - s_2\,x_3 + c_1\,f_1' - c_2\,f_2' + s_1\,(f_1 + a_1) - s_2\,(f_2 + a_2) = 0\,, \end{aligned}$$

[1]) Dans mon travail antérieur (Math. Zeitschrift, 38, p. 709) j'ai dans la formule (15) donné l'équation des surfaces $\varphi/\psi = \text{const.}$ Dans cette équation il y a une erreur des signes. L'équation exacte est:

$$(k\,x_2 + x_1)^4 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)\ (k\,x_2 + x_1)^2\ (k\,x_1 - x_2)^2 - x_3^2\,(k\,x_1 - x_2)^4 = 0.$$

Le membre gauche de cette équation peut s'écrire.

$$(x_1^2 + x_2^2)\left\{(1+k^2)\,(x_1 + k\,x_2)^2 - (1+k^2)\,x_3^2\,(x_2 - k\,x_1)^2 - (x_2 - k\,x_1)^2\,(x_1 + k\,x_2)^2\right\}.$$

Les surfaces $\varphi/\psi = \text{const.}$ sont donc des surfaces algébriques de l'ordre 4 et leurs transformées par la méthode des rayons réciproques, qui entrent comme des cas particuliers dans les surfaces considérées dans le texte, sont bien de l'ordre 6.

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
&c_1 x_3 + c_1 (f_2 + a_2) + c_2 (f_1 + a_1) - s_1 f_2' - s_2 f_1' = 0\,.\\
&s_1 x_3 + s_1 (f_2 + a_2) + c_1 f_2' c_2 f_1' + s_2 (f_1 + a_1) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Entre les quantités c_1, c_2, s_1, s_2 subsistent deux relations:

$$(28)\qquad c_1^2 + s_1^2 - c_2^2 - s_2^2 = 1,$$

$$(29)\qquad c_1 c_2 + s_1 s_2 = 0.$$

Des deux dernières équations (27) on obtient à l'aide de (29):

$$(30)\qquad (s_1^2 + c_1^2) f_2' - (s_1 c_2 - s_2 c_1)(f_1 + a_1) = 0.$$

On a donc trois relations entre les quatre quantités c_1, c_2, s_1, s_2. On simplifie les formules en exprimant ces quantités par deux quantités réelles, liées par une seule relation. A cet effet nous pouvons poser:

$$\cos z = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin z = \frac{2t}{1 + t^2}\,,$$

où évidemment:

$$t = \operatorname{tg} \frac{z}{2}\,.$$

On a alors, en posant $t = t_1 + i t_2$ (t_1 et t_2 rèelles):

$$
(31)\qquad
\begin{aligned}
&c_1 = \frac{1}{N}\left(1 - (t_1^2 + t_2^2)^2\right), \quad c_2 = -\frac{4 t_1 t_2}{N}\,,\\
&s_1 = \frac{2 t_1}{N}(1 + t_1^2 + t_2^2), \quad s_2 = \frac{2 t_2}{N}(1 - t_1^2 - t_2^2)\,,\\
&N = (1 + t_1^2 - t_2^2)^2 + 4 t_1^2 t_2^2.
\end{aligned}
$$

Les valeurs (31) de c_1, c_2, s_1, s_2 satisfont identiquement aux relations (28) et (29). Au contraire l'équation (30) donne lieu à une relation entre t_1 et t_2:

$$(32)\qquad (1 + t_1^2 + t_2^2) f_2' + 2 t_2 (f_1 + a_1) = 0,$$

On peut maintenant exprimer x_1, x_2, x_3 comme des fonctions de $t_1, t_2, f_1, f_2, f_1', f_2'$:

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
&(1 + t_1^2 + t_2^2) x_1 = (1 - t_1^2 - t_2^2)(f_1 + a_1) - 2 t_1 f_1'\,.\\
&(1 + t_1^2 + t_2^2) x_2 = -2 t_1 (f_1 + a_1) - (1 - t_1^2 - t_2^2) f_1'\,.\\
&(1 + t_1^2 + t_2^2) x_3 + f_2 + a_2 = 2 t_2 f_1'\,.
\end{aligned}
$$

Si l'on se donne $f(z)$, les équations (32) et (33) définissent un système de ∞^2 courbes C.

Posons par exemple: $f(z) = tg\,\frac{1}{2} z = t$, $f'(z) = \dfrac{1}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}$

$= \frac{1}{2}(1 + t^2)$, donc: $f_1 = t_1$, $f_2 = t_2$, $f_1' = \frac{1}{2}(1 + t_1^2 - t_2^2)$, $f_2' = t_1 t_2$.

Nous aurons:

ou:

$$(32')\qquad t_1 (t_1^2 + t_2^2) + 3 t_1 + 2 a_1 = 0\,,$$

ou:

$$(32'')\qquad t_2 = 0\,,$$

$$
(33')\qquad
\begin{aligned}
&(1 + t_1^2 + t_2^2) x_1 = (1 - t_1^2 - t_2^2) a_1 - 2 t_1^3\,,\\
&2 (1 + t_1^2 + t_2^2) x_2 = -4 t_1 (t_1 + a_1) - (1 + t_1^2 - t_2^2)(1 - t_1^2 - t_2^2)\,,\\
&(1 + t_1^2 + t_2^2)(x_3 + t_2 + a_2) = t_2 (1 + t_1^2 - t_2^2)\,.
\end{aligned}
$$

A l'aide de (32') on peut éliminer t_2 et exprimer x_1 et x_2 comme des fonctions rationnelles de t_1:

$$x_1 = -a_1 - \frac{t_1 (a_1 - t_1^3)}{a_1 + t_1}\,, \quad x_2 = -3 + 2 t_1^2 + \frac{a_1}{t_1} + \frac{t_1 (1 + t_1^2)}{a_1 + t_1}\,.$$

On voit de ces formules que dans notre exemple toute courbe C ou du moins la partie d'une courbe C, qui est représentée pàr (32'), est située sur un cylindre droit dont l'axe est parallèle à l'axe x_3 et qui coupe le plan $x_1 x_2$ dans une courbe rationnelle de l'ordre 5. On voit de plus que les courbes situées sur la même cylindre sont congruentes et que l'on obtient toutes ces courbes d'une d'elles par une translation le long de l'axe x_3. Ces courbes sont de l'ordre 12. Une courbe C complète contient cependant aussi une partie correspondant à l'équation (32''). C'est une courbe plane de l'ordre 4. Le genre de la première partie de la courbe est 1, le genre de la seconde partie est 0.

10. Les invariants. Une transformation:

$$(34)\qquad u + iv \longrightarrow U(u, v) + i\,V(u, v)\,,$$

où:

$$\frac{\partial U}{\partial u}=\frac{\partial V}{\partial v},\ \frac{\partial U}{\partial v}=-\frac{\partial V}{\partial u},$$

change les vecteurs $\vec{L}^{(1)}$ et $\vec{L}^{(2)}$, mais laisse le vecteur $\vec{L}^{(3)}$ inaltéré. Avec $\vec{L}^{(3)}$ toute expression qui ne contient que les composantes de $\vec{L}^{(3)}$ et leurs dérivées par rapport à x_1, x_2, x_3 sont des invariants quant à la transformation (34). Dans la suite nous nous bornerons à des quantités qui sont aussi des invariants par rapport au groupe des rotations de l'espace autour de l'origine.

Evidemment les expressions:

$$\vec{L}^{(3)}\ \mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)}\ \text{et}\ \mathrm{div}\ \vec{L}^{(3)}$$

sont des invariants. On trouve:

$$(35)\qquad \vec{L}^{(3)}\ \mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)}=\varkappa_1^1+\varkappa_2^2=\frac{2}{E^4}\,\mathrm{grad}\ u\times\mathrm{grad}\ v.(\mathrm{grad}\ v\ V)\ \mathrm{grad}\ u$$

$$(36)\qquad \mathrm{div}\ \vec{L}^{(3)}=\varkappa_2^1-\varkappa_1^2=-\frac{2}{E^3}\,\mathrm{grad}\ u\times\mathrm{grad}\ v.\,\mathrm{grad}\ E.$$

Par un calcul facile on vérifie ces expressions des deux invariants.

D'autres invariants du second ordre sont:

$$(\mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2\ \text{et}\ \sum_{j,k}\left(\frac{\partial L_j^{(3)}}{\partial x_k}\right)^2.$$

On trouve:

$$(37)\qquad (\mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2=(\varkappa_1^1+\varkappa_2^2)^2+(\varkappa_3^1)^2+(\varkappa_3^2)^2.$$

$$(38)\qquad \sum_{j,k}\left(\frac{\partial L_j^{(3)}}{\partial x_k}\right)^2=(\varkappa_1^1)^2+(\varkappa_2^1)^2+(\varkappa_3^1)^2+(\varkappa_1^2)^2+(\varkappa_2^2)^2+(\varkappa_3^2)^2$$

De (35) et (36) on obtient:

$$(\varkappa_1^1)^2+(\varkappa_2^1)^2+(\varkappa_1^2)^2+(\varkappa_2^2)^2+2(\varkappa_1^1\varkappa_2^2-\varkappa_2^1\varkappa_1^2)=(\vec{L}^{(3)}\ \mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2+(\mathrm{div}\ \vec{L}^{(3)})^2.$$

Donc à l'aide de (37) et (38):

$$2(\varkappa_1^1\varkappa_2^2-\varkappa_2^1\varkappa_1^2)=(\mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2-\sum_{j,k}\left(\frac{\partial L_j^{(3)}}{\partial x_k}\right)^2+(\mathrm{div}\ \vec{L}^{(3)})^2.$$

Donc:

$$(39)\qquad (\varkappa_1^1-\varkappa_2^2)^2+(\varkappa_2^1+\varkappa_1^2)^2=2\sum_{j,k}\left(\frac{\partial L_j^{(3)}}{\partial x_k}\right)^2-2(\mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2-(\mathrm{div}\ \vec{L}^{(3)})^2+(\vec{L}^{(3)}\ \mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2.$$

On vérifie à l'aide de (39) que le membre gauche de l'équation:

$$(40)\qquad (\varkappa_1^1-\varkappa_2^2)^2+(\varkappa_2^1+\varkappa_1^2)^2=0,$$

à laquelle doivent satisfaire les courbes C est un invariant. Pour des courbes réelles cette équation unique évidemment équivaut à deux équations.

Remarquons que l'on a:

$$(41)\qquad \left(\frac{1}{\rho_3}\right)^2=(\varkappa_3^1)^2+(\varkappa_3^2)^2=(\mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2-(\vec{L}^{(3)}\ \mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)})^2.$$

Si l'on veut étudier les invariants d'un ordre plus haut que deux, il est d'abord à remarquer que la différentiation dans la direction $\vec{L}^{(3)}$ est une opération invariante. On a donc un groupe d'invariants de la forme:

$$\sum_j L_j^{(3)}\frac{\partial I}{\partial x_j},$$

où I est un invariant. Parmi les invariants du troisième ordre on trouve donc:

$$\sum_j L_j^{(3)}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{L}^{(3)}\ \mathrm{rot}\ \vec{L}^{(3)}),\qquad \sum_j L_j^{(3)}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{div}\ \vec{L}^{(3)}$$

etc. Un autre invariant du troisième ordre est τ_3. Au lieu de τ_3 on peut d'ailleurs employer un invariant un peu plus simple:

$$\sum_j L_j^{(3)}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{arctg}\frac{\Delta v}{\Delta u}.$$

Une congruence de courbes C est caractérisée par les fonctions de x_1, x_2, x_3 qui sont définies par les invariants. Un système plus vaste de courbes C peut être caractérisée par les fonctions de x_1, x_2, x_3 que sont certains invariants ou par des relations entre les invariants.

Ainsi le cas traité dans mon travail antérieur est caractèrisée par le fait:

$$\frac{1}{\rho_3} = 0,$$

équivalent à cause de (41) à la relation:

$$(L^{(3)} \nabla) L^{(3)} = 0.$$

Les congruences de droites qui constituent les cycles sont en outre caractérisées par la relation:

$$\vec{L}^{(3)} \operatorname{rot} \vec{L}^{(3)} = 0, \tag{42}$$

Le cas traité dans le paragraphe 8, où les courbes C sont des cercles, est caractérisé par les relations:

$$\frac{1}{\tau_3} = 0, \ \vec{L}^{(3)} \operatorname{grad} \rho_3 = 0.$$

La congruence spéciale étudiée dans le paragraphe 8 appartient à une catégorie qui est caractérisée en outre par la relation (42).

Si l'on a choisi une fonction W déterminée dans le paragraphe 2 ou une fonction V déterminée dans le paragraphe 7, on peut par des différentiations et des éliminations calculer tous les invariants correspondant à la congruence de courbes C fixée par ce choix.

Une question plus difficile c'est de savoir dans quelles circonstances on peut en se donnant certains invariants comme des fonctions de x_1, x_2, x_3 trouver des congruences de courbes C correspondantes.

Sur les polydromies des potentiels newtoniens prolongés, dans l'espace réel à n dimensions

par

R. Wavre.

C'est avec émotion que nous rédigeons ces quelques pages pour le volume consacré à la mémoire de Léon Lichtenstein. Nous avons choisi un sujet auquel il s'intéressait vivement, comme en témoignent les lettres que nous avons échangées en 1933. Nous ne doutions pas que la science lui fût encore redevable dans le domaine que nous abordons ici de progrès aussi importants que ceux qu'il avait accomplis dans des domaines voisins.

Nous lui sommes en particulier extrêmement reconnaissants d'avoir attiré notre attention sur un mémoire de M. Erhardt Schmidt[1]), qui nous servira ici de point de départ.

Ce mémoire, sur le prolongement analytique d'un potentiel newtonien au travers d'une surface qui porte ou limite la matière attirante, peut être généralisé sans difficultés de l'espace à 3 à l'espace à n dimensions. Il repose sur le théorème de Cauchy-Kowalewska, sur lequel Bruns[2]) puis M. Hadamard[3]) avait également fondé le prolongement local du potentiel newtonien.

---

[1]) E. Schmidt. Bemerkung zur Potentialtheorie. Mathematische Annalen T. 68, p. 107, 1910.

[2]) Bruns. Über einen Satz aus der Potentialtheorie. Crelles Journal Bd 81.

[3]) J. Hadamard. Mémoire sur les problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Insttut de France. T. XXXIII, p. 24, 1908.