La théorie des fonctions de domaines dans la physique mathématique

par

N. Gunther.

1. — On peut dire qu'il est incontestable que la théorie des fonctions de domaines doit jouer un rôle considérable dans la physique mathématique. En 1928, dans ses „Leçons sur l'intégration" Mr. Lebesgue a formulé bien nettement cette idée:

„Que les fonctions de domaines s'introduisent en physique et y apparaissent même comme plus directement adaptées aux besoins du physicien, que les fonctions de points — ne doit pas nous étonner. Un point n'est que la conception limite de corps de plus en plus petits, une fonction du point ne peut s'introduire en physique comme limite d'une fonction du corps, d'une fonction de domaines".

En donnant à la seconde phrase de l'illustre auteur une forme plus dure, on peut dire, que nous vivons dans le monde des fonctions de domaines, tandis que nous construisons les modèles de ses parties à l'aide des fonctions de points, en instituant la correspondance entre elles et les éléments, dont dépendent les phénomènes, qui nous entourent.

Ces modèles portent indubitablement la trace du génie de leurs créateurs et forment, en somme, le plus précieux produit de l'esprit humain et c'est précisement ces modèles qu'on discute quand il s'agit des événements de notre entourage.

Si l'analyse mathématique du modèle conduit à un résultat précis et si l'expérience confirme ce résultat, on est induit à se croire dans la bonne voie et de considérer que la base du modèle, formée par l'ensemble des données: les faits, fournis par des expériences antérieures et formulés à titre de lois, et les hypothèses, qui concernent l'influence

de l'entourage du phénomène et l'hérédité de son passé. mérite la confiance, ce qui engage à la continuation de l'étude.

Certainement la rectification expérimentale du résultat nécessite encore l'institution d'une correspondance entre un nombre et la valeur d'une fonction de domaines; le 'lien entre la théorie et le monde est formé uniquement par nos sens et par les instruments de mesure inventés par nous; or, les uns et les autres ne peuvent donner que des valeurs moyennes des quantités qu'on à mesurer; par exemple, on ne peut pas obtenir à l'aide d'un thermométre la température d'un point, car l'instrument n'indique que la température moyenne d'un segment contenant le point et pour un intervalle de temps.

Si, au contraire, l'expérience ne confirme pas le résultat ou si l'on se heurte à des difficultés purement analytiques, ce qui empêche de conduire les calculs au bout, le modèle doit être reconstruit; certes la première idée c'est que les données doivent être revues, car il n'y a point de certitude que la liste des lois acquises antérieurement est complète et que chaque loi décrive l'événement avec l'ampleur nécessaire, ni que les hypothèses soient chosies convenablement, le passé du phénomène étant inconnu et les objets de l'entourage trop nomhreux; mais il est permit aussi de croire que la faillité du modèle est due aux matériaux utilisés lors de sa construction et que la cause est due parfois à l'emploi des fonctions de points à la place des fonctions de domaines.

Pourquoi dans le problême de refroidissement d'une barre la méthode de Fourier ne conduit pas à une solution précise, si la température initiale $\varphi(x)$ n'est pas dévellopable en série de Fourier?

Sous les conditions supplémentaires imposées sur cette température $\varphi(x)$ on obtient le résultat qui satisfait le mathématicien et qui est confirmé par l'expérience; les physiciens affirment même, que dans le cas mentionné, quand les mathématiciens échouent, la température donnée par la série pour les moments qui suivent le moment initial, est en pleine concordance avec la température donnée par l'expérimentation.

Tout cela induit à croire, que la cause principale des difficultés n'est pas dans l'ensemble des suppositions qui constituent la base du problême, mais dans l'intention de chercher une fonction de points, tandis que les données initiales, qui ne peuvent être obtenues que par des mesurements, et que les mesurements nécessaires pour contrôler le résultat imposent la considération des fonctions de domaines.

Mais s'il en est ainsi et si l'introduction des fonctions de domaines est parfois dictée par les circonstances, il faut admettre, que certains problèmes posés en termes de fonctions de points sont compromis du moment qu'ils sont posés.

En effet, la phrase de Mr. Lebesgue, citée ci-devant, affirme que la fonction de points est introduite comme le résultat d'un passage à la limite, le vrai objet des raisonnements étant une fonction de domaines, ce qui présume, que la fonction de domaines est de la forme

$$1) \qquad \int_{(\omega)} f(x)\, d\omega \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} f(x)\, d\omega$$

où (ω) est un certain domaine et ω sa mesure, $f(x)$ étant une fonction sommable. Or, (1) n'est pas la forme la plus générale d'une fonction de domaines. Envisageons, par exemple, l'intégrale de Gauss

$$2) \qquad \frac{1}{4\pi}\int \frac{\cos(rN)}{r^2}\, d\sigma\,,$$

dans laquelle (σ) est la surface limitant un domaine (ω), N étant la normale extérieure et r la distance entre un point fixe (a) et le point d'intégration. C'est précisément une fonction de domaines (ω) additive et à variation bornée; sa valeur est égale à zéro ou à l'unité suivant que le point (a) est dans l'extérieur ou dans l'intérieur de (ω). Le passage à la limite ne peut conduire qu'à la fonction de points (x), qui est égale à zéro ou à l'unité suivant que (x) diffère de (a) ou non; l'intégrale de cette fonction est égale à zéro et on ne peut l'introduire dans les calculs qu'inventant des voies indirectes.

Si l'on pose le problème de la température stationnaire aux sources de la chaleur répartie dans le corps, on a à considérer les fonctions, qui sont analogues à la fonction (2). En supposant même que la chaleur apportèe par les sources est caractérisée par la fonction f, définie pour tous les points du corps, le mathématicien, si cette fonction n'est pas régulièrement continue, c'est à dire ne répond à la condition de Lipschitz, se confondra dès le début ne pouvant pas construire la solution de l'équation

$$3) \qquad \Delta V = f\,.$$

Comme sous les conditions plus sévères imposées sur la fonction f on obtient la solution qui satisfait le mathématicien aussi bien que le physicien, on en conclut de nouveau que ce n'est pas l'ensemble des suppositions, faites au début, qui en est la cause. On peut même montrer que si l'on se retient du dernier passage à la limite, qu'introduit la laplacien, et si l'on se contente à la considération du flux de la chaleur, qui est une fonction de domaines, on parvient à introduire dans les calculs tout

naturellement la chaleur apportèe par des sources, ce qui conduit à la solution du problême qui est mathématiquement rigureuse.

Cependant suivant cette voie, on effectue non seulement l'introduction des fonctions de domaines; on sacrifie aussi l'équation différentielle, qui dans le modèle classique est le pivet de la discussion, car elle formule les lois que dirigent le phénomêne et donne les valeurs des éléments qui composent la solution.

2. La cause, pourquoi on néglige l'emploi des fonctions de domaines, consiste, suivant Mr. Lebesgue, dans le manque d'une théorie élaborée des fonctions de domaines; en continuant sa phrase, citée au début, nous lisons:

> „Si pourtant on parle peu de ces fonctions, c'est que les mathématiciens n'ont pas encore créé l'Algèbre et l'Analyse des fonctions de domaines. On possède par contre des notations remarquablement maniables pour les fonctions de points".

Les mathématiciens possèdent cependant des instruments adaptés aux opérations avec des fonctions de domaines: c'est la théorie des intégrales de Stieltjes et la théorie des équations intégrales, la plus puissante suppléante de la théorie des équations différentielles.

La premiére définition de l'intégrale de Stieltjes pour les intervalles à une dimension est déjà liée à la conception mécanique de la masse. Le théorème de Mr. F. Riesz sur la forme génèrale d'un opérateur linéaire et continu [1]), vu le rôle de ces opérateurs dans les théories physiques, en donnant l'exemple des problèmes, dans lesquels l'introduction des fonctions des intervalles est inévitable, induit en même temps sur l'instrument, adapté aux opérations avec de pareilles fonctions.

La généralisation de la notion de l'intégrale de Stieltjes est commencée par l'extension aux intervalles à la dimension dépassant l'unité par Mr. Fréchet en 1910 [2]), Les travaux de Mr. J. Radon [3]), qui définit la notion de l'intègrale de Stieltjes pour les fonctions des ensembles et qui généralise le théorème mentionné de Mr. F. Riesz aux opérations dans l'espace à plusieurs dimensiens et ceux de M. F. Riesz [4]) qui emploie cette notion en envisageant les fonctions des

[1]) F. Riesz. Sur certains systèmes d'équations intégrales. Annales de l'Ecole Normale. t. 28. 1910.

[2]) M. Fréchet. Extension au cas des intégrales multiples d'une définition de l'intégrale de Stieltjes. Nouv. An. t. 10. 1910.

[3]) J. Radon. Theorie und Anwendung der absolut additiven Mengenfunctionen. Sitzungsberichte der Akademie. Wien. 1913.

[4]) F. Riesz. Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. Acta mathematica. t. 54. 1930.

ensembles ouverts, mettent en pleine évidence la possibilité d'introduction directe des fonctions de domaines à l'aide des intégrales de Stieltjes dans les problèmes de la physique mathématique: l'étude du potentiel newtonien, à laquelle au fond est consacré le mémoire cité de Mr. F. Riesz, vu les applications du laplacien et du théorème de Poisson, est un de ces problèmes. Les premiers pas vers l'adaptation de la théorie des équations intégrales aux besoins des fonctions de domaines, — l'étude des équations en intégrales de Stieltjes, — appartiennent aussi à ces deux savants [5]).

En me heurtant à la solution rigoureuse mais générale de plus simples problèmes de la physique mathématique, j'ai essayé á plusieurs reprises de m'aider en introduisant les fonctions de domaines ou même en donnant au problème la nouvelle forme en termes des fonctions de domaines [6]). Il me semble, que les résultats que j'ai obtenu dans ces essais confirment les considérations générales exposées dans l'alinée **1** et leur illustration par quelques exemples simples me parait non privée d'intérêt.

Les recherches mentionnées m'ont conduit à l'étude approfondie des opérations avec des fonctions de domaines à l'aide des intégrales de Stieltjes [7]).

Comme les résultats en question sont intimement liés à la terminologie que j'emploie et qui diffère en partie de celle des auteurs ci-dessus mentionnés, je suis obligé de m'arrêter sur elle en premier lieu, cette terminologie selon mon avis étant dictée par les particularités des problèmes de la physique mathématique.

3. Je m'occupe exclusivement des fonctions de domaines [8]); dans l'intégrale de Stieltjes

$$\text{4)} \qquad \lim \sum f(x_i') \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right)$$

[5]) F. Riesz. Ueber lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. t. 41. 1918. J. Radon. Ueber lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen; Sitz. Ber. der Akademie. Wien. Bd. 128. 1919. On rencontre pour la première fois comme il me semble une fonction de domaines comme inconnue de l'équation intégrale dans ce mémoire de Mr. J. Radon.

[6]) Voir per ex., le problême de la chaleur à la page 481 de mon mémoire ([7]).

[7]) N. Gunther. Sur les intégrales de Stieltjes et leurs appliquations aux problémes fondamentaux de la physique mathématique. Travaux de l'Institut physico-mathématique Stekloff. t. 1. 1933.

[8]) Si (E) est un ensemble ouvert et (E_1) l'ensemble de ses points limites, qui ne sont pas des points intérieurs de (E), l'ensemble $(E)+(E_1)$ est dit domaine, si la mesure rimannienne de (E_1) est nulle.

la différence $F(x_{i+1}) - F(x_i)$ est une fonction du domaine $x_i < x < x_{i+1}$.

La mesure d'un domaine étant toujours positive, je traite chaque fonction du domaine comme rapport d'une fonction du domaine en sens strict à la mesure du domaine, en l'appelant la fonction moyenne. En introduisant les fonctions moyennes je pose la condition de l'additivité par l'égalité

5) $$u(\omega_1)\,\omega_1 + u(\omega_2)\,\omega_2 = u(\omega_1 + \omega_2)\,(\omega_1 + \omega_2)$$

en désignant par ω la mesure du domaine (ω), au lieu de la définir par l'égalité

5') $$u(\omega_1) + u(\omega_2) = u(\omega_1 + \omega_2),$$

et, en fixant la notion d'une fonction à variation bornée, je cherche la borne supérieure des sommes de la forme

6) $$|\,u(\omega_1)\,|\,\omega_1 + \ldots + |\,u(\omega_n)\,|\,\omega_n$$

les domaines $(\omega_1), \ldots, (\omega_n)$ formant une décomposition d'un domaine (Ω) en domaines partiels, et non de la somme

6') $$|\,u(\omega_1)\,| + \ldots + |\,u(\omega_N\,|$$

Ainsi, en définissant la notion de l'intégrale de Stieltjes, je cherche la limite des sommes

7) $$\sum f(x_i)\,u(\omega_i)\,\omega_i$$

dans lesquelles (x_i) est un point de (ω_i), au lieu de la limite des sommes.

7') $$\sum f(x_i)\,u(\omega_i)$$

Certainement, au point de vue de la discussion de la théorie des fonctions de domaines il est indifférant de se baser ou sur les fonctions de domaines en sens strict du mot ou sur les fonctions moyennes; on peut même supposer que la première base est préférable étant plus simple; il me semble qu'en employant les fonctions moyennes on est plus près du sujet des calculs, surtout quand on a en vue les application à la physique mathématique. C'est le stimulus moyen que nous concevons par nos sens — le cinématographe nous le montre le mieux — et les appareils, qui servent au physicien de lien entre sa théorie et le

monde qui l'entoure, comme j'ai eu l'occasion de le rapeller dans l'alinéa **1**, ne lui donnent le plus souvent que la valeur moyenne de la quantité qu'il mesure: l'effet sur l'appareil n'est pas momentané et ce n'est pas un seul point, mais tout l'entourage qui influe sur le résultat du mesurage. Les termes comme le courant, la vitesse, sont fixés par le passage à la limite dans les fonctions moyennes de domaines; on préfère le plus souvent le terme „la vitesse moyenne", qui désigne une fonction moyenne, au terme „le chemin parcouru", qui désigne une fonction de domaine et quand on a affaire aux milieux continus, on emploie par préférence le terme „la densité" à celui de la masse.

L'emploi exclusif des fonctions de domaines prête à des certains inconvénients, le dégagement des domaines de l'espace des ensembles n'étant pas lucide, ce qui se manifeste surtout quand on a à construire une fonction. Or, une généralisation facile de la notion de la fonction de domaines permet facilement de tourner les difficultés. Sans insister sur ces points, qui n'ont aucune importance dans la suite de cette note, je me borne à l'indication qu'en parlant d'une fonction de domaines, après avoir donné convenablement la définition d'un corps de domaines [9]), il suffit de supposer qu'elle n'est définie que pour les domaines d'un corps. En posant la notion de continuité [10]) de la fonction pour un domaine, on démontre que les domaines de continuité forment un corps (B)

Si les domaines qu'on considère sont les portions d'un domaine (Ω) qui n'appartient pas au corps (B), on peut élargir le corps (B) dans un corps (C), contenant le corps (B) et le domaine (Ω), tel que la condition de continuité [10]) soit satisfaite pour les domaines du corps (C), les domaines $(\underline{\omega})$ et $(\overline{\omega})$ étant convenablement définis, quand (ω) est contigu à la frontière de (Ω) [11]), et, en définissant la fonction, prendre le corps (C) pour support.

A chaque fonction $u(\omega)$ définie dans le corps (C) de sa continuité, on peut faire correspondre une fonction des ensembles en sens de Mr. J. Radon, telle que sa valeur pour chaque domaine soit égale à $u(\omega)\,\omega$, ainsi qu'une fonction des ensembles ouverts de Mr. F. Riesz,

[9]) Voir mon mémoire (7) p. 381.

[10]) $u(\omega)$ est continue pour (ω), si

$$\lim U(\underline{\omega}) = \lim U(\overline{\omega}) = U(\omega),\ (\overline{\omega}) \to (\omega),\ (\underline{\omega}) \to (\omega)$$

$U(\omega)$ étant la variation de $u(\omega)$, $(\underline{\omega})$ inscrit et $(\overline{\omega})$ circonscrit á (ω).

[11]) N. Gunther. Sur les opérations linéaires. § 2. Physikalische Zeitschrift des Sowjetunion Bd. 3. 1933.

telle que sa valeur pour chaque ensemble ouvert (e), formant une „division permise" de Mr. F. Riesz, soit égale à $u(\omega)\omega$, où (ω) est le domaine, dont les points intérieurs constituent l'ensemble (e).

4. En supposant qu'une fonction moyenne $u(\omega)$ est donnée pour les domaines (ω) appartenant à un corps (C) et faisant partie d'un domaine (Ω), prenons dans (Ω) un point arbitraire (x) et envisageons les domaines du corps (C), contenant le point (x) dans leur intérieur. Si l'on fait tendre convenablement (ω) vers zéro [12]) et si $u(\omega)$ possède une limite, je donne à cette limite le nom de la valeur de $u(\omega)$ au point (x), et je la désigne par $u(x)$.

Une distinction assez essentielle se manifeste ici entre la nomination choisie par moi et la nomination usuelle. On rencontre presque partout le nom de la derivée d'une fonction de domaines pour la fonction de points désignée ci-devant par $u(x)$ [13]). Peu importe le nom; ce n'ést que l'objet qui importe et quelque soit le nom on obtient les mêmes résultats si les calculs sont exacts. Cependant le choix d'un nom sert quelquefois d'indication méthodique de la voie, qu'on doit suivre dans les recherches quand on emploie cet objet, en détérminant l'analogie à d'autres objets qui portent le même nom.

Quand il s'agit des fonctions de domaines d'une dimension, on trouve quelque analogie entre la dérivée d'une fonction et la dérivée suivant la notation usuelle d'une fonction de domaines. L'analogie entre la fonction de l'intervalle

8) $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

et l'intégrale indéfinie semble être incontestable et la définition de la limite

9) $$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \qquad x_2 \longrightarrow x_1$$

par le mot „dérivée" assez justifée, quoique (9) ne soit que le rapport de l'accroissement de la fonction

[12]) Voir. Schlesinger und Plessner. Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. S. 113.

[13]) Voir. De la Vallée Poussin. Cours d'Analyse. t. II § 84. Schlesinger und Plessner ([12]) § 43. S. 157.

10) $$\int_a^x f(x)\,dx$$

à l'accroissement de la variable indépendante.

Il n'ên est rien, si la dimension des domaines dépasse l'unité: l'analogie entre l'intégrale

11) $$\int_{(\omega)} f(x)\,d\omega$$

étendue sur un domaine (ω), et une fonction des points, semble être tout à fait artificielle; ce n'est qu'en se bornant à la considération des intervalles qu'on peut constater quelque ressemblance entre (11) et une fonction — l'expression (11), ainsi que (8) lui aussi, sont des objets nouveaux. Si l'on considère cependant à la place de (11) la moyenne

12) $$u(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} f(x)\,d\omega,$$

la nomination de la valeur moyenne de la fonction $f(x)$ dans (ω) semble lui convenir assez bien; dans ce cas le nom „la valeur de (12) au point (x)", à son tour, semble être le plus approprié, si l'on remarque, au surplus, qu'aux points, où $f(x)$ est continue, cette valeur est égale à $f(x)$.

Quand on dit que la vitesse au point est égale à la dérivée suivant le temps du chemin parcouru, c'est la fonction du temps qu'on différentie; en parlant de la masse personne ne fait de rapprochements entre la notion de la densité au point et la notion de la dérivée.

Remarquons, enfin, que la dérivée d'une fonction de points est une fonction de points; il semble, qu'en parlant de la dérivée d'une fonction de domaines il faudrait donner ce nom à un objet de la même nature, c'est à dire à une fonction de domaines. C'est ce que j'avais fait dans les pages 359 — 360 de mon mémoire cité ([7]), en donnant le nom de la derivée d'une fonction moyenne $u(\omega)$ dans la direction (L) à la limite de

13) $$\frac{u(\omega_2) - u(\omega_1)}{\delta}, \quad \delta \longrightarrow 0$$

où (ω_2) est le domaine, qu'on obtient en déplaçant tous les points de (ω) parallèlement dans la direction (L) à distance δ.

Dans cet ordre des idées, $f(x)$ étant une fonction à variation bornée des points sur l'axe OX, si l'on introduit la valeur moyenne dans l'intervalle (x_1, x_2) de $f(x)$:

$$u(\omega) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \tag{14}$$

la dérivée de $u(\omega)$ existe, si $f(x)$ est continue pour $x = x_1$, et pour $x = x_2$ et on a

$$u'(\omega) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{15}$$

Si la valeur de $u'(\omega)$ existe au point (x), elle est égale à $f'(x)$.

Ayant posé la notion de la dérivée d'une fonction moyenne $u(\omega)$, on est conduit à la notion du laplacien de $u(\omega)$, si les dérivées de $u(\omega)$ dans trois directions mutuellement orthogonales existent et sont des fonctions moyennes à variation bornée.

5. Ayant défini l'intégrale de Stieltjes comme la limite des sommes (7), je suis obligé de la désigner par

$$\int_{(\Omega)} f(x)\, u(\omega)\, d\omega\,. \tag{16}$$

L'intégrale (16) a un sens si la fonction $f(x)$ est continue et si les discontinuités de la fonction $f(x)$, la fonction $f(x)$ étant bornée, sont placées sur les frontières du corps (C) de continuité de $u(\omega)$. De plus, on démontre sans peine que si l'ensemble (E) des points de discontinuité est intégrable, l'intégrale (16) a un sens, si l'ensemble (E) n'est pas singulier pour $u(\omega)$, c'est à dire, si (δ) étant des domaines contenant (E) on a $u(\delta)\,\delta \longrightarrow 0$, si $(\delta) \longrightarrow 0$.

Si $f(x)$ n'est pas bornée et si l'on a $f(x) > 0$, on entend sous (16) la limite de

$$\int_{(\Omega_x)} f_n(x)\, u(\omega)\, d\omega \tag{16'}$$

où $\quad f_n(x) = f(x)$, si $f(x) \leqq n$, $f_n(x) = n$, si $f(x) > n$ [14])

[14]) Voir F. Riesz ([4]).

La fonction moyenne $u(\omega)$ étant analogue à fonction de points, le signe (16) ressemble parfaitement à celui de l'intégrale de Riemann.

Convenons de désigner par le signe $F(\omega)$ la moyenne d'une fonction sommable $F(x)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} F(x)\, d\omega; \tag{17}$$

on démontre facilement la fonction $f(x)$ étant bornée et intégrable en sens de Riemann, que

$$\int_{(\Omega_x)} f(x)\, F(\omega)\, d\omega = \int_{(\Omega_x)} f(x)\, F(x)\, d\omega) \tag{18}$$

l'intégrale à la droite étant l'intégrale de Mr. Lebesgue [15]); légalité (18) justifie en certains points le choix du signe (16).

La ressemblance entre les intégrales de Stieltjes écrites en forme (16) et les intégrales de Riemann se manifeste le plus, quand on dresse la liste des propriétés fondamentales de l'intégrale, qui concernent la substitution à la place des élements de l'intégrale des fonctions linéaires des autres du même genre; la décomposition en portions du domaine (Ω); l'évaluation des bornes de l'intégrale; le théorème de la moyenne, la transposition des signes d'intégration dans les intégrales doubles, impliquant les fonctions de la forme $u(\tau, x)$, qui dépendent des domaines (τ), faisant partie d'un domaine (Ω_y) des points (y), et des points (x) ([16]).

Dès le début de mes études d'application des fonctions de domaines aux problèmes de la physique mathématique en 1926 [17]), je m'efforçais à choisir les notations de manière [18]), que la dite ressemblance sub-

[15]) Voir ([7]) page 63.

[16]) Voir ([7]) pages 54 — 58, 67 — 72.

[17]) Sur une application de la theorie de fermeture (en langue russe) Bulletins de l'Académie dhs Sciences de URSS, en 1927. Sur une application des fonctions universelles de M-r Korn C. R., 183, en 1926. Dans ces notes et quelques notes posterieures je n'emploie pas encore les fonctions moyennes sous leur nom actuel en les désignant par „quasifonctions" avec l'intention de appuyer leur analogie avec des fonctions de points.

[18]) On ne peut pas envisager les produits des fonctions moyennes; on sort quelquefois de la difficulté en envisageant les intégrales de M-r Hellinger de la forme

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} \frac{v(\omega)\, w(\omega)}{u(\omega)}\, d\omega\,.$$

siste aussi loin que possible; la possibilité d'un pareil choix de notations surtout au commencement de la discussion des problèmes, semble être en nature des choses vu l'apparition des fonctions de points comme des limites des fonctions moyennes. Dans l'état actuel cette ressemblance est telle, que, parfois, dans les calculs assez longs on peut mettre en correspondance à chaque égalité liant les intégrales aux fonctions moyennes une tout à fait semblable, qui lie les intégrales aux valeurs des dites fonctions: la seule différence entre ces égalités est que les premières étant tout à fait rigoureuses, les secondes restent formelles et ne deviennent justes, que sous les suppositions complémentaires imposées à leurs élements.

Il m'est impossible d'entrer ici dans les détails à ce sujet; j'espère que les exemples qui suivent peuvent donner une illustration satisfaisante de ces assertions.

6. Soit donnée une suite des fonctions fondamentales

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ldots\ \varphi_n(x),\ \ldots\ldots \tag{19}$$

qui, étant orthogonale et normée pour le domaine (Ω), est fermée dans la classe (A) des fonctions à carré sommable. L'égalité

$$f(x) = \sum_1^\infty a_\varkappa \varphi_\varkappa(x), \qquad a_\varkappa = \int_{(\Omega)} f(x)\varphi_\varkappa(x)\,d\omega \tag{20}$$

est illusoire si la fonction $f(x)$ n'est pas assujettie à certaines restrictions. Or, suivant un théorème de Stekloff[19]), dont la démonstration est très facile, la série

$$f(\omega) = \sum_1^\infty a_\varkappa \varphi_\varkappa(\omega), \tag{20^1}$$

dans laquelle suivant [17) $f(\omega)$, $\varphi_\varkappa(\omega)$ sont les moyennes des fonctions $f(x)$, $\varphi_\varkappa(x)$, converge pour chaque choix du domaine (ω) et pour chaque fonction $f(x)$ à carré sommable.

Mais on a de plus; la série (20^4) possède des propriétés des sé-

[19]) Stekloff, Sur les certaines ègalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvent employées dans l'analyse. § 8. Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, VII ser. t. 15, 1904.

ries uniformément convergentes[20]) et on peut l'intégrer terme a terme après la multiplication par une fonction $F(x)$ bornée et intégrable, en écrivant

$$\int_{(\Delta)} F(x) f(\omega)\,d\omega = \sum_1^\infty a_\varkappa \int_{(\Delta)} F(x)\varphi_\varkappa(\omega)\,d\omega \tag{21}$$

En utilisant (18) on peut donner à la dernière égalité la forme

$$\int_{(\Delta)} F(x) f(x)\,d\omega = \sum_1^\infty a_\varkappa \int_{(\Delta)} F(x)\varphi_\varkappa(x)\,d\omega\,, \tag{22}$$

ce qui induit dans une opération avec la série (20), qui est tout à fait illégitime et qui donne néanmoins un résultat exact.

La ressemblance des séries (20) et (20^1) est frappante et on ne doit pas s'étonner, quand les physiciens et les ingénieurs, en employant les séries (20) sans la moindre précaution, et ayant calculé la somme d'un nombre fini des premiers termes affirment que l'expérience confirme lour résultat: l'expérience ne leur donne que la valeur de $f(\omega)$ pour un domaine assez petit et, si les fonctions (19) sont continues,

[20]) Si $r_n(\omega)$ est le terme complémentaires de la série (20^1), le terme complémentaire da la série (21) ne dépasse pas

$$\left|\int_{(\Delta)} F(x)\, r_n(\omega)\,d\omega\right| < A\, R_n(\Delta)\,\Delta \leqq A\, R_n(\Omega)\,\Omega$$

$R_n(\Delta)\,\Delta$ étant la variation totale de $r_n(\omega)$. Or, si $r_n(x)$ est la différence entre $f(x)$ et la somme des n premiers termes de la sèrie (20), on a suivant la supposition

$$\int_{(\Delta)} r_n^2(x)\,d\omega < \varepsilon\,,\ \text{si}\ n \geqq N$$

En évaluant la variation totale $R_n(\Delta)\,\Delta$ nous avons

$$\left(\sum_{i=1}^{i=k} |r_n(\omega_i)|\,\omega_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=k} \left|\int_{(\omega_i)} r_n(x)\,d\omega\right|\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{i=k} \int_{(\omega_i)} |r_n(x)|\,d\omega\right)^2 = \left(\int_{(\Delta)} |r_n(x)|\,d\omega\right)^2$$

$$< \Delta \int_{(\Delta)} r_n^2(x)\,d\omega < \Delta\,\varepsilon\,;$$

on en conclut, que $R_n(\Delta)\,\Delta$ ne dépasse pas $\sqrt{\Delta\,\varepsilon}$, si $n \geqq N$.

les moyennes $\varphi_\kappa(\omega)$ diffèrent peu de leurs valeurs $\varphi_\kappa(x)$. Vu que les données de leurs proplèmes sont acquises par l'expérience, on est induit même à croire, qu'en formant la série (20), le physicien et l'ingénieur utilisent parfois sans se rendre compte les intégrales de Stieltjes et opèrent avec des fonctions de domaines.

Remarquons, enfin, que quelque soit la suite (19), fermée ou non, orthogonale ou non, l'inégalité

23) $$\int_\Delta \left[f(x) - \sum_1^n c_K \varphi_K(x) \right]^2 dx < \varepsilon$$

entraine l'inégalité

24) $$\left| f(\omega) - \sum_1^n c_K \varphi_K(\omega) \right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega}}$$

7. Reprenons maintenant le premier exemple d'alinèa 1. Comme les appareils de mesurement ne peuvent pas donner la valeur de la température au point, il paraît conforme au but de supposer, que ce sont les valeurs moyennes de la température qui sont données. Si $f(\omega)$, (ω) étant un intervalle $(\alpha\beta)$, est cette température moyenne et si dans chaque point $(x)f(\omega)$ possède une valeur $f(x)$, on pourrait substituer $f(x)$ à $f(\omega)$ et $f(\omega)$ serait la valeur moynne de $f(x)$. Nous supposerons que $f(\omega)$ est la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ à carré sommable.

Pour résoudre le problème il faut en supposant que la température de l'espace extérieur est égale à zéro, intégrer l'équation

25) $$\frac{\partial\left(\tau \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} - g v = p \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \tau,\ g,\ p \text{ fonctions de } (x),$$

en imposant à v des conditions convenables aux extrémités de la barre $x=0$ et $x=b$ et en supposant qu'au moment initial $t=0$

26) $$v(\omega, t) = f(\omega), \qquad \text{où } v(\omega, t) = \frac{1}{\omega} \int_\alpha^\beta v(x, t)\, dx$$

La solution du problème conduit à la série

27) $$v(x, t) = \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

dans laquelle $\varphi_n(x)$ sont les fonctions de, Sturm-Liouville, choisies conformément aux conditions aux extrémités de labarre, λ_n les nombres caractéristiques, qui leur correspondent. Suivant le théorème de Stekloff on a

28) $$f(\omega) = a_1 \varphi_1(\omega) + a_2 \varphi_2(\omega) + \ldots + a_n \varphi_n(\omega) + \ldots$$

où, suivant (18)

29) $$a_n = \int_0^b f(x) \varphi_n(x)\, dx = \int_0^b f(\omega) \varphi_n(x)\, dx$$

On s'assure facilement à l'aide de l'inégalité de Schwarz, que les coefficients a_n sont bornées en valeur absolue dans leur ensemble. On conclut sans peine que la série (27) est uniformément convergente pour les valeurs de t répondant à la condition

30) $$0 < \eta \leq t$$

et donne une solution de l'équation (25), qui correspond aux conditions posées aux extrémités de la barre.

Formons maintenant la valeur moyenne de $v(x, t)$:

31) $$v(\omega, t) = \sum_1^\infty a_n \varphi_n(\omega) e^{-\lambda_n t}$$

La simple application du lemme connu d'Abel aux séries (28) et (31) montre immédiatement, que la série (31) converge uniformément comme fonction de t pour les valeurs

30¹) $$0 \leq t,$$

d'où suit, que

32) $$\lim v(\omega, t) (= v(\omega, 0) = f(\omega), \qquad t \to 0$$

c'est à dire que la condition initiale est satisfaite,

Ainsi la série (27) donne la solution du problème en supposition que la température initiale n'est qu'a carré sommable.

8. Pour donner encore un exemple il faut entrer dans quelques détails sur les potentiels newtoniens, dont la théorie, elle aussi, comme j'ai eu l'occasion de le remarquer, appartient à la physique mathématique.

M-r F. Riesz a démontré, que le potentiel newtonien en intégrales de Stieltjes

33) $$v(x) = \int\limits_{(\Omega)} \frac{u(\tau)\, d\tau}{r},$$

où r est la distance entre le point (x) et le point d'intégration (y), (τ), (Ω) étant les domaines des points (4) et $u(\tau)$ une fonction de (τ) définie dans son corps de continuité (C), est une fonction sommable dans tout l'espace [21]; on peut même démontrer, que $v(x)$ est une fonction à carré sommable et qu'elle est sommable sur chaque portion de surface ayant dans chaque point un plan tangent déterminé.

Il peut donc être question de la valeur moyenne de $v(x)$. On démontre sans peine,

1) que, (ω) étant un domaine quelconque des points (x):

34) $$v(\omega) = \int\limits_{(\Delta)} u(\tau)\, m(\omega, r)\, d\tau, \qquad m(\omega, r) = \frac{1}{\omega} \int\limits_{(\omega)} \frac{d\omega}{r},$$

la fonction $v(\omega)$ étant ainsi définie pour chaque domaine.

2) que le fonction $v(\omega)$, comme fonction de domaines, possède pour chaque domaine une dérivée dans chaque direction

et 3) que pour chaque domaine (ω), limité par une surface, qui répond aux conditions connues de Liapounoff et qui est choisie parmi les domaines appartenant à un certain corps (C), $v(\omega)$ possède un laplacien et on a

35) $$\Delta v(\omega) = -4\pi u(\omega)$$

En particulier, si $u(\tau)$ est la moyenne d'une fonction sommable $u(y)$, l'égalité (35) subsiste pour chaque domaine limité par une surface de Liapounoff [22].

En (35) nous avons une extension du théorème de Poisson; n'ayant pas ici la possibilité d'entrer dans les détails de la démonstration je me borne à l.indication qu'on peut trouver la démonstration dans le chapitre 8 de mon mémoire (7).

[21]) Voir (4). M-r F. Riesz suppose que la masse du potential est une fonction des ensembles ouverts, mais en formant l'intégrale il n'utitise que la „division permise" de (Ω).

[22]) Comme une application de formule (35) indiquons, que si $U(f)$ est un opérateur linéaire et continu, on a

$$U(f) = \int\limits_{(\Omega)} u(\tau) f(y)\, d\tau \qquad \text{où } u(\omega) = -\frac{1}{4\pi} \Delta U(m(\omega, r))^{11)}$$

On peut étendre la formule (35) à chaque domaine appartenant à (C), dont la frontière (σ) est formée par un nombre fini des portions de surface, ayant des élements de courbure régulièrement continus.

Soit. (σ_1) est une des dites portions de surface et K sa courbure moyenne; soit, (σ'_1) est la portion de surface qu'on obtient en déplaçant chaque point de (σ_1) en direction de sa normale à la distance δ et soit $\sigma_1(v)\sigma_1$ est la limite de

36) $$\frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{(\sigma_1)} v\, d\sigma - \int\limits_{(\sigma_1')} v\, d\sigma\right) - \int\limits_{(\sigma)} v K\, d\sigma, \qquad \delta \longrightarrow 0$$

si cette limite existe, les intégrales dans (36) ayant toujours un sens; nous donnons à $\sigma_1(v)\sigma_1$ lo nom de flux à travers de (σ_1), en disant que le flux à travers de (σ) est égal à la somme des flux à travers de toutes les portions (σ_1) qui composent (σ).

Si $v(x)$ possède les dérivées premières [23]), on a

37) $$\sigma(v) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} \frac{dv}{du}\, d\sigma$$

On démontre sans peine que [24]) pour les domaines (ω) mentionnées on a

38) $$\sigma(v)\sigma = \Delta v(\omega)\omega = -4\pi u(\omega)\omega$$

La solution de second problème d'alinéa 1 est maintenant immédiate. Supposons que le domaine — le corps (Ω) — qu'on étudie, est limité par un nombre fini des portions de surface à courbure régulièrement continue et qu'il est homogène. Si l'on suppose que dans chaque élement (σ) de la frontière de (Ω) on a, V étant la température,

39) $$\sigma(V) = -\frac{1}{\sigma} \int\limits_{(\sigma)} h V\, d\sigma$$

où $h(x)$ est une fonction à valeurs positives, le problème revient à la recherche de la fonction $V(x)$, qui répond à la condition (39) et pour chaque domaine (ω) de la forme mentionnée ci-devant, à l'intérieur de (Ω) à la condition:

[23]) Il suffit pour celà, que pour chaque sphère (ω_0) de rayon ρ on ait $|u(\omega_0)|\rho^{1-\lambda} < B$. Bétant un nombre déterminé; $v(x)$ est continue dans tout l'espace, si $|u(\omega_0)|\rho^{2-\lambda} < B$.

[24]) Voir (7) page 376.

40) $$\sigma(V)\sigma = u(\omega)\,\omega$$

où la fonction moyenne $u(\omega)$ est définie par la rèpartition des sources de chaleur dans (Λ). On trouve suivant les téorèmes mentionnés, que

41) $$V(\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Lambda)} u(\tau)\, m(\omega, r)\, d\tau + \varphi(\omega),$$

$\varphi(x)$ étant une foncfion harmonique. Si $v(\omega)$ est le premier terme dans (41), la rechernhe de $\varphi(x)$ revient à la solution de l'équation $\Delta\varphi = 0$ à la condition sur la frontière

42) $$\sigma(\varphi) = -\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} h\varphi\, d\sigma - \sigma(v) - \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} h v\, d\sigma = -\frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} h\varphi\, d\sigma + w(\sigma)$$

Si l'on cherche $\varphi(x)$ nous la forme d'un potentiel de simple couche

43) $$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)} \frac{\mu(\sigma)\, d\sigma}{r},$$

où (S) est la frontière de (Ω), on l'obtient en résolvant une équation intégrale.

On trouve, que[25])

44) $$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(S)} w(\sigma)\; G(y, x)\, d\sigma;$$

$G(y, x)$ est la fonction de Green, qui répond au problème de la température stationnaire, posé de la manière ordinaire:

45) $$\Delta V = 0, \text{ dans } (\Omega), \quad \frac{dV}{dn} = -hV + \psi, \text{ sur } (S)$$

9. La théorie des équations intégrales, étant la suppléante de la théorie des équations différentielles, les considération des alinéas précedents conduisent à croire, que l'étude des équations intégrales en intégrales de Stieltjes a quelque valeur. Je me borne à la remarque, que même en laissant de côté ces considérations, on est conduit à cette conclusion par l'étude des questions, qui se rattachent à la théorie de la fonction spéctrale.

6—III—35.

[25]) Voir (7) page 439.

Sur une représentation géométrique de la théorie des fonctions analytiques.

par

C. W. Oseen.

1. **Introduction.** Comme base de la théorie des fonctions analytiques on peut employer les équations:

(1) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2,$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0.$$

De ces équations on obtient en effet ou:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2, \text{ ou: } \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2,$$

donc ou:

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}$$

ou:

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

Les équations (3) sont les bases de la thésrie de Cauchy-Riemann des fonctions analytiques de la variable $x_1 + i x_2$ et les équations (4) sont de même les bases de la théorie des fonctions analytiques $u + iv$ de $x_2 + i x_1$.