(Dem Andenken Leon Lichtensteins gewidmet)

Eine einfache Herleitung der Fourierschen Reihe

von

B. L. van der Waerden

in Leipzig.

Fast alle üblichen Herleitungen des Fourierschen Reihenentwicklung (vgl. z. B. die vorbildliche Darstellung in Mangoldt-Knopp, Einfuhrung in die höhere Mathematik, II) fangen mit den folgenden Schritten an:

1. Wenn eine Funktion $f(x)$ für $-\pi < x < \pi$ durch eine gleichmässig konvergente Fouriersche Reihe

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1}$$

darstellbar ist, so haben die Koeffizienten notwendig die Werte

$$\left\{\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x \, d x \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \nu x \, d x . \end{aligned}\right. \tag{2}$$

2. Wenn man mit diesen Koeffizienten die Fouriersche Reihe ansetzt, so lässt sich die Teilsumme

$$S_n = \frac{1}{2} a_n + \sum_{1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

umformen zu einem Integral

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{ f(x+u) - f(x-u) \} K(n, u) \, du \tag{3}$$

mit

$$K(n, u) = 1 + 2 \sum_{1}^{n} \cos \nu u = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} u}. \tag{4}$$

3. Es ist nun nicht nötig, wie es meistens geschieht, den Nenner $\sin \frac{1}{2} u$ in (4) zunächst durch $\frac{1}{2} u$ zu ersetzen, sondern man kann unter gewissen Voraussetzungen, z. B. für Funktionen von beschränkter Schwankung, direkt zeigen, dass

$$\lim S_n = \frac{1}{2} \{ f(x+0) - f(x-0) \}.$$

Nach (3) genügt es, zu beweisen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x \pm u) K(n, u) \, du = \frac{1}{2} f(x \pm 0). \tag{5}$$

4. Wir benötigen die folgenden Eigenschaften der Funktion $K(n, u)$:

(a) $|K(n, u)| \leq 2n+1$

(b) $\int_0^\pi K(n, u) = \pi,$

(c) $\left| \int_a^b K(n, u) \, du \right| \leq 2\pi$ für $0 \leq a \leq b \leq \pi.$

(d) $\left| \int_a^b K(n, u) \, du \right| \leq \dfrac{2\pi}{(2n+1) \sin \frac{1}{2} \delta}$ für $\delta \leq a \leq b \leq \pi.$

(a) und (b) folgen sofort aus der ersten der beiden in (4) angegebenen Darstellungen von $K(n, u)$. Bei (c) und (d) benutzen wir die Quotientendarstellung (4). Wir teilen das Integrationsintervall (a, b) durch die Teilpunkte $\frac{2k\pi}{2n+1}$ in Teilintervalle $(a_\mu, a_{\mu+1})$. Der Integrand $K(n, u)$ hat nach (4) in diesen Teilintervallen abwechselnde Vorzeichen, während die Beträge des Integrale über die Teilintervalle $(a_\mu, a_{\mu+1})$ (abgesehen vom ersten mit $a_\mu = a$) bei wachsender Nummer μ dauern kleiner werden. Nach einer bekannten Schlussweise (die z. B. bei alternierenden Reihen mit absolut fallenden Gliedern immer angewandt wird) folgt daraus, dass das Integral über alle Teilintervalle zusammen dem Betrage nach köchstens gleich dem grössten Teilintegral $\int_{a_\mu}^{a_{u+1}} K(n, u) \, du$ ist.

Da die Länge des Teilintervalle höchstens $\frac{2\pi}{2n+1}$ ist und der Betrag von $K(n, u)$ nach (a) jedem Fall $\leq 2n+1$. für $u \geq \delta$ aber auch $\leq \dfrac{1}{\sin \frac{1}{2} \delta}$ ist, so folgen die Abschätzungen (c) und (d).

5. Da eine Funktion von beschränkter Schwankung Differenz von zwei monotonen Funktionen ist, so genügt es, (5) für monotone $f(x)$ zu beweisen. Setzt man $f(x \pm u) - f(x \pm 0) = g(u)$ und beachtet (b), so wird (5):

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi g(u) K(n, u) \, du = 0. \tag{6}$$

Nacb dem zweiten Mittelwertsatz ist für monotone $g(u)$

$$\int_0^\pi g(u) K(n, u) \, du = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$$

$$= g(+0) \int_0^\varepsilon K(n, u) \, du + g(\delta - 0) \int_\varepsilon^\delta K(n, u) \, du$$

$$+g(\delta+0)\int_{\delta}^{\eta} K(n,u)\,du + g(\pi)\int_{\eta}^{\pi} K(n,u)\,du.$$

Der erste Term rechts ist Null, des zweite nach (c) absolut $\leq |g(\delta)|\,.\,2\pi$, der dritte und vierte je absolut $\leq A_n$ mit

$$A_n = \frac{2\pi\,\mathrm{Max.}\,|g(u)|}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}\delta}.$$

Durch Wahl von δ kann man zunächst $|g(\delta)|\,.\,2\pi$, sodann durch Wahl von n auch A_n beliebig klein machen. Damit ist (6) bewiesen.

6. Will man den Gebrauch des zweite Mittelwertsatzes vermeiden, so kann man statt dessen auch eine partielle Integration vornehmen. Die Spaltung von $f(x)$ in monotone Funktionen ist dann nicht mehr nötig. Setzt man etwa $f(x)$ als stückweise stetig differenzierbar voraus, was für Vorlesungszwecke wohl meistens genügt, und setzt man

$$\int_{u}^{\pi} K(n,v)\,dv = L(n,u),$$

so wird

$$\int_0^{\pi} g(u)\,K(n,u)\,du = \int_0^{\pi} L(n,u)\,g'(u)\,du + \sum_{\nu} L(n,u_\nu)\,\Delta g(u_\nu),$$

wo die Summe sich über alle Stellen u_ν erstreckt wo $g(u)$ einem Sprung $\Delta g(u_\nu)$ macht. Das Integral spaltet man wieder in $\int_0^{\delta}$ und $\int_{\pi}^{\delta}$. Nach (c) ist

$$(7)\qquad \left|\int_0^{\delta} L(n,u)\,g'(u)\,du\right| \leq 2\pi\int_0^{\delta} |g'(u)|\,du \leq 2\pi\,\delta\,.\,\mathrm{Max.}\,|g'(u)|.$$

Man wähle δ kleiner als, das kleinste u_ν. Dann ist nach (d)

$$(8)\qquad \left|\int_{\delta}^{\pi} L(n,u)\,g'(u)\,dn + \sum L(n,u_\nu)\,\Delta g(n_\nu)\right|$$

$$\leq \frac{2\pi}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}\delta}\left\{\int_0^{\pi} |g'(u)|\,du + \sum |\Delta g(u_\nu)|\right\}$$

Beide Bestandteile (8) und (9) können durch Wahl von δ und dann von u beliebig klein gemacht werden. Domit ist wiederum (6) bewiesen.

7. Anschaulich kann mas sich den Beweis von (5) folgendermassen klar machen. (5) wäre evident, wenn $K(n,u)$ für grosse n annäherend die Eigenschaften einer „Diracschen δ — Funktion" hätte, d. h. wenn $K(n,u)$ für $\delta \leq u \leq \pi$ schon nahe au **Null** läge, aber. für $0 \leq x < \delta$ so gross wird, dass das Integral $\int K(n,u)\,du$ den konstante Wert π annimmt. Die letzte Eigenschaft ist nach (6) erfüllt, die erste nicht exakt, wohl aber „im Durchschnit". $K(n,u)$ schwankt nämlich so schnell, dass das Integral von $K(n,u)$ über ein teliebiges, die Null nicht berührendes Intervall (a, b) sehr klein wird. Das ist der Sinn von (d). Man kann nun auf Grund von (d) erwerten, dass im Integral $\int_0^{n} K(n,u)\,f(x+u)\,du$ bei nicht zu starck schwankendem $f(x+u)$ die Werte von $f(x+u)$ für $u>0$ sozusagen keine Rolle spielen werden, dass man also $f(x+u)$ durch $f(x+0)$ ersetzen kann. Tut man das, so erhält man (5).
