ne pourra dépasser, (mais pourra atteindre) $M=\lambda_0 A$ *en valeur absolue pour aucune valeur réelle de* θ, *si on a*

$$\lambda_0+\lambda_n\cos n\varphi_k+2\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i\cos i\varphi_k-\mu_i\sin i\varphi_k)\geqq 0$$

pour

$$\varphi_k=\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\ (\text{où } k=0,\ 1,\ \ldots\ 2n-1).$$

Soit, par exemple, $\alpha=0$. Alors, sous la condition (2),la fonction

$$F_0(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}\{\lambda_{n-\nu}[a_\nu\cos\nu\theta+b_\nu\sin\nu\theta]+\mu_{n-\nu}[b_\nu\cos\nu\theta-a_\nu\sin\nu\theta]\}$$

pourra atteindre, sans pouvoir la dépasser, la valeur $M=\lambda_0 A$, pourvu que la fonction

$$R(\varphi_k)=\lambda_0+2\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i\cos i\varphi_k-\mu_i\sin i\varphi_k)+(-1)^k\lambda_n$$

soit *non négative pour* $\varphi_k=\frac{k\pi}{n}$ (où $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1$),

Dans le cas, où la fonction $R(\varphi)$ est *non negative, pour toutes les valeurs de* φ, on pourra affirmer que $|F_\alpha(\theta)|\leqslant\lambda_0 A$ *pour toute valeur de* α. Le théorème de M. Szegö se présente donc comme un cas particulier de notre dernière affirmation, qui correspond à la supposition que $\mu_i=0$ quel que soit i.

Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge

von

L. Fejér (Budapest) und G. Szegö (St. Louis, Mo.).

In der Arbeit 4 [1]) hat der Erste von uns den Begriff der „monotonen Konvergenz" einer Folge von komplexen Zahlen

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

gegen die komplexe Zahl z eingeführt [2]). Es wird darunter die Eigenschaft verstanden, dass die Folge der nichtnegativen Zahlen

$$|z-z_0|,\ |z-z_1|,\ |z-z_2|,\ \ldots,\ |z-z_n|,\ \ldots$$

monoton abnehmend (nicht wachsend) gegen Null konvergiert. Besonders interessant gestaltet sich diese Begriffsbildung in dem Spezialfalle von Potenzreihen:

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_n z^n+\ldots.$$

In dieser Note soll die monotone Konvergenz der Partialsummen von gewissen Klassen von Potenzreihen im Innern des Konvergenzkreises bewiesen werden, die dadurch charakterisiert sind, dass die Koeffizienten bestimmten Monotonitätsbedingungen genügen. Wenn die Partialsummen mit

$$s_0(z),\ s_1(z),\ s_2(z),\ \ldots,\ s_n(z),\ \ldots$$

[1]) Die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende des Textes.
[2]) Vgl. auch 3, § VIII.

bezeichnet werden, so bedeutet dies:

$$(L)\quad |f(z)| \geqq |f(z)-s_0(z)| \geqq |f(z)-s_1(z)| \geqq \ldots \geqq |f(z)-s_n(z)| \geqq \ldots,$$

wenn nur z im Innern des Konvergenzkreises gelegen ist.

Unter der Voraussetzung, dass die Koeffizientenfolge $\{\alpha_n\}$ einfach-monoton (d. h. eine monoton abnehmende Nullfolge) ist, wird der Konvergenzradius der obigen Potenzreihe $\geqq 1$. Die erwähnten Ungleichungen sind jedoch für einfach-monotone Koeffizienten im allgemeinen ungültig [1]). Wir zeigen dagegen — und das ist das Ziel der vorliegenden Note, — dass sie für $|z|<1$ zu Recht bestehen, wenn nur die Folge $\{\alpha_n\}$ *dreifach* (§ 1), sogar auch dann, wenn sie *zweifach* (§§ 2, 3) monoton ist. Es gelten in diesen Fällen auch die schärferen Ungleichungen

$$(M)\quad |f(z)| \geqq \left|\frac{f(z)-s_0(z)}{z}\right| \geqq \left|\frac{f(z)-s_1(z)}{z^2}\right| \geqq \ldots \geqq \left|\frac{f(z)-s_n(z)}{z^{n+1}}\right| \geqq \ldots$$

für $|z|<1$, d. h. die absoluten Beträge der „Reste“

$$\rho_n(z) = \frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{z^n} = \alpha_n + \alpha_{n+1}z + \alpha_{n+2}z^2 + \ldots$$

$$[n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ s_{-1}(z)=0]$$

konvergieren monoton abnehmend gegen Null. Nebenbei bemerkt, bestehen die Ungleichungen (M) auch für $|z|=1$, $z\neq 1$, da eine Potenzreihe mit monoton gegen Null konvergierenden Koeffizienten für solche z stetig ist.

Ferner zeigen wir in § 3, dass die Bedingung $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ zum Bestehen der Ungleichungen (M) nicht erforderlich ist. Sie gelten, wenn

$$\alpha_n \geqq 0,\ \Delta\alpha_n \geqq 0,\ \Delta^2\alpha_n \geqq 0, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

In § 4 wird bewiesen, dass die Folge $|\rho_n(z)|^2$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ monoton von der Ordnung k ist, wenn die Folge $\{\alpha_n\}$ monoton von der Ordnung $k+1$ ist, $|z|\leqq 1$, $z\neq 1$. Eine Nullfolge $\{\alpha_n\}$ heisst dabei monoton von der Ordnung k oder k-fach monoton, wenn sämtliche Differenzenfolgen

$$\Delta^l\alpha_n = \alpha_n - \binom{l}{1}\alpha_{n+1} + \binom{l}{2}\alpha_{n+2} - \ldots + (-1)^l\alpha_{n+l}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

[1]) Vgl. § 5, III.

für $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, aus lauter nichtnegativen Gliedern bestehen.

Schliesslich wird in § 5 auf gewisse Anwendungen, Beispiele sowie Zusammenhänge mit anderen Betrachtungen hingewiesen.

Die Ergebnisse von §§ 1, 4 rühren von L. Fejér, die von §§ 2, 3 von G. Szegö her.

§ 1.

Beweis der Ungleichungen (M), wenn $\{\alpha_n\}$ dreifach monoton ist.

I. Die Folge $\{\alpha_n\}$ sei zunächst zweifach monoton. Die folgende Umformung ist dann für $|z|<1$ und für $|z|=1$, $z\neq 1$, gültig:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu - 2\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2})\ (\nu+1+\nu z+(\nu-1)z^2+\ldots+z^\nu)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2\alpha_\nu\,.\,\varphi_\nu(z).$$

In der Tat hat man

$$\sum_{\nu=0}^{m}\Delta^2\alpha_\nu\,.\,\varphi_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu(\varphi_\nu(z) - 2\varphi_{\nu-1}(z) + \varphi_{\nu-2}(z))$$

$$-2\alpha_{m+1}\varphi_m(z) + \alpha_{m+1}\varphi_{m-1}(z) + \alpha_{m+2}\varphi_m(z),$$

wobei $\varphi_{-1}(z)=\varphi_{-2}(z)=0$ zu setzen ist. Wegen

$$\varphi_m(z) - \varphi_{m-1}(z) = 1+z+z^2+\ldots+z^m$$

kann dies in der Form

$$\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu z^\nu - \alpha_{m+1}(\varphi_m(z)-\varphi_{m-1}(z)) + (\alpha_{m+2}-\alpha_{m+1})\varphi_m(z)$$

geschrieben werden. Für die genannten Werte von z gilt aber, wenn $m\to\infty$,

$$\varphi_m(z) - \varphi_{m-1}(z) = 1+z+z^2+\ldots+z^m = O(1), \qquad \varphi_m(z) = O(m).$$

Ferner strebt α_{m+1} gegen Null, sowie auch $m\,(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+1})$, da die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})$$

konvergiert und nichtnegative, monoton abnehmende Glieder hat.

II. Trennung des Polynoms $\varphi_\nu(z)=u_\nu+iv_\nu$ in reellen und imaginären Teil ergibt die für $|z|\leqq 1$ bzw. für $|z|\leqq 1$, $\Im z\geqq 0$, positiven (nichtnegativen) harmonischen Polynome u_ν und v_ν. Dies folgt aus der bekannten Tatsache, dass die entsprechenden Randwerte

$$\nu+1+\nu\cos\vartheta+(\nu-1)\cos 2\vartheta+\ldots+\cos\nu\vartheta,$$
$$\nu\sin\vartheta+(\nu-1)\sin 2\vartheta+\ldots+\sin\nu\vartheta$$

für alle reellen Werte von ϑ bzw. für $0<\vartheta<\pi$ positiv sind [1]).

Es gilt nun

$$|f(z)|^2=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2\alpha_\nu\,.\,u_\nu\right\}^2+\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2\alpha_\nu\,.\,v_\nu\right\}^2$$

und durch Anwendung dieses Resultates auf die in der Einleitung eingeführten Restreihen $\rho_n(z)$:

$$|\rho_n(z)|^2=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2\alpha_{n+\nu}\,.\,u_\nu\right\}^2+\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2\alpha_{n+\nu}\,.\,v_\nu\right\}^2.$$

Ist die Folge $\{\alpha_n\}$ ***dreifach*** monoton, so sind die nichtnegativen Grössen $\Delta^2\alpha_{n+\nu}$ mit wachsendem n abnehmend (nicht wachsend); da ferner u_ν und v_ν von konstantem Zeichen sind, so ist die Folge $|\rho_n(z)|^2$ ebenfalls abnehmend, womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 2.

Beweis der Ungleichungen (*L*), wenn $\{\alpha_n\}$ zweifach monoton ist.

I. Es sei $z=re^{i\vartheta}$ $0<r<1$. Man hat [2]) (vgl. § 1, I)

$$|R_n(z)|=\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2(\alpha_{n+\nu}r^{n+\nu})\,.\,\varphi_\nu(e^{i\vartheta})\right|=\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta^2(\alpha_\nu r^\nu)\,.\,\varphi_{\nu-n}(e^{i\vartheta})\right|.$$

[1]) Vgl. 3, § II, 3, 4.

[2]) $R_n(z)$ bedeutet hier $\alpha_n z^n+\alpha_{n+1}z^{n+1}+\ldots$.

Unsere Behauptung kann also in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta^2(\alpha_\nu r^\nu)\,.\,\varphi_{\nu-n}(e^{i\vartheta})\right|^2\geqq\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta^2(\alpha_\nu r^\nu)\,.\,\varphi_{\nu-n-1}(e^{i\vartheta})\right|^2,$$

oder da $\varphi_0(z)=1$ ist (die Reihen konvergieren absolut),

$$\{\Delta^2(\alpha_n r^n)\}^2+2\Delta^2(\alpha_n r^n)\,.\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta^2(\alpha_\nu r^\nu)\,.\,\Re\,\varphi_{\nu-n}(e^{i\vartheta})$$
$$+\sum_{\mu,\nu=n+1,n+2,\ldots}\Delta^2(\alpha_\mu r^\mu)\,.\,\Delta^2(\alpha_\nu r^\nu)\,.\,\Re\,\varphi_{\mu-n}(e^{i\vartheta})\,\varphi_{\nu-n}(e^{-i\vartheta})$$
$$\geqq\sum_{\mu,\nu=n+1,n+2,\ldots}\Delta^2(\alpha_\mu r^\mu)\,.\,\Delta^2(\alpha_\nu r^\nu)\,\Re\,\varphi_{\mu-n-1}(e^{i\vartheta})\,\varphi_{\nu-n-1}(e^{-i\vartheta})\,.$$

Nun ist mit $\{\alpha_n\}$ auch $\{\alpha_n r^n\}$ zweifach monoton. Ferner gilt $\Re\,\varphi_{\nu-n}(e^{i\vartheta})\geqq 0$. Es genügt also die folgenden Ungleichungen zu beweisen:

$$\Re\,\varphi_{\mu-n}(e^{i\vartheta})\,\varphi_{\nu-n}(e^{-i\vartheta})\geqq\Re\,\varphi_{\mu-n-1}(e^{i\vartheta})\,\varphi_{\nu-n-1}(e^{-i\vartheta})\,.$$

II. Dies folgt aus der folgenden bemerkenswerten Identität: *Es seien p und q nichtnegative ganze Zahlen. Dann ist*

$$2\,\Re\{\varphi_{p+1}(e^{i\vartheta})\,\varphi_{q+1}(e^{-i\vartheta})-\varphi_p(e^{i\vartheta})\,\varphi_q(e^{-i\vartheta})\}$$
$$=(q+2)\,\frac{1-\cos(p+2)\vartheta}{1-\cos\vartheta}+(p+2)\,\frac{1-\cos(q+2)\vartheta}{1-\cos\vartheta}\,.$$

Zum Beweise setzen wir

$$\Re\,\varphi_p(e^{i\vartheta})\,\varphi_q(e^{-i\vartheta})=\gamma_0+\gamma_1\cos\vartheta+\gamma_2\cos 2\vartheta+\ldots,$$

wobei die Koeffizienten $\gamma_\lambda=\gamma_{\lambda,p,q}$ die folgende Darstellung zulassen:

$$\gamma_0=(p+1)\,(q+1)+pq+(p-1)\,(q-1)+\ldots,$$
$$\gamma_\lambda=(p+1)\,(q+1-\lambda)+p\,(q-\lambda)+(p-1)\,(q-\lambda-1)+\ldots$$
$$+(q+1)\,(p+1-\lambda)+q\,(p-\lambda)+(q-1)\,(p-\lambda-1)+\ldots,\ \lambda\geqq 1.$$

Die nicht ausgeschriebenen Glieder sind hier solange fortzusetzen, bis mindestens einer der Faktoren Null wird. Wir erhalten somit

$$\gamma_{0,p+1,q+1} - \gamma_{0,p,q} = (p+2)\ (q+2),$$

$$\gamma_{\lambda,p+1,q+1} - \gamma_{\lambda,p,q} = (p+2)\ (q+2-\lambda) + (q+2)\ (p+2-\lambda),\quad \lambda \geqq 1$$

woraus wegen der bekannten Identität

$$m+1+2m\cos\theta+2(m-1)\cos 2\theta+\ldots+2\cos m\theta = \frac{1-\cos(m+1)\theta}{1-\cos\theta}$$

die Behauptung folgt.

§ 3.

Beweis der Ungleichungen *(M)*, wenn $\{\alpha_n\}$ zweifach monoton ist.

I. Es genügt die erste Ungleichung von *(M)*,

d. h.
$$|f(z)| \geqq \left|\frac{f(z)-s_0(z)}{z}\right|, \qquad |z|<1,$$

zu beweisen; die weiteren folgen daraus durch Anwendung dieses Ergebnisses auf die Restreihen $\rho_n(z)$.

Wir beweisen zunächst

$$|f(z)| \geqq |f(z)-s_0(z)| = |f(z)-\alpha_0|, \qquad |z|<1.$$

Diese Ungleichung ist mit

$$\Re f(z) \geqq \frac{\alpha_0}{2}, \qquad |z|<1,$$

gleichwertig. Nun gilt (vgl. § 1, I)

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 \alpha_\nu \cdot \varphi_\nu(z).$$

Mit Hilfe der Ungleichungen [1])

$$\Re\left(\varphi_\nu(z) - \frac{\nu+1}{2}\right) = \Re\left(\frac{\nu+1}{2} + \nu z + (\nu-1)z^2 + \ldots + z^\nu\right) > 0, \quad |z|<1,$$

erhalten wir hieraus, da die Koeffizienten $\Delta^2\alpha_\nu$ nichtnegativ sind,

$$\Re f(z) \geqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 \alpha_\nu \cdot \frac{\nu+1}{2} = \frac{\alpha_0}{2}, \text{ w. z. b. w.}$$

[1]) Vgl. Fejér 3, § II, 3.

(Die letzte Gleichung ergibt sich aus der Darstellung von $f(z)$ durch die zweiten Differenzen $\Delta^2\alpha_\nu$ für $z=0$.)

II. Die so erhaltene Ungleichung liefert $f(z) \neq 0$ für $|z|<1$, es sei denn $f(z)=0$, $f(z)-\alpha_0=0$, folglich $\alpha_0=0$ und $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=0$, $f(z)\equiv 0$. Anwendung des Schwarzschen Lemma auf

$$\frac{f(z)-\alpha_0}{f(z)}$$

liefert dann die Behauptung unmittelbar.

III. Die obige Schlussweise liefert die Ungleichungen *(M)* auch unter der etwas allgemeineren Voraussetzung, dass

$$\alpha_n \geqq 0, \quad \Delta\alpha_n \geqq 0, \quad \Delta^2\alpha_n \geqq 0, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

gilt. Es existiert dann $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ und $\alpha \geqq 0$. Nun erfüllt $f(z) - \frac{\alpha}{1-z}$ die obigen Voranssetzungen, so dass für $|z|<1$

$$\Re\left(f(z) - \frac{\alpha}{1-z}\right) \geqq \frac{\alpha_0-\alpha}{2}, \text{ d.h. } \Re f(z) \geqq \frac{\alpha_0}{2} + \alpha\,\Re\frac{1}{1-z} - \frac{\alpha}{2} \geqq \frac{\alpha_0}{2},$$

w. z. b. w.

§ 4.

Verallgemeinerung.

Zum Beweise der in der Einleitung angekündigten Verallgemeinerung brauchen wir einige formale Vorbereitungen.

I. Die Folge $\{\alpha_n\}$ sei zunächst einfach monoton. Dann ist für $0<\theta<2\pi$

$$\rho_n(e^{i\theta}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n+\nu}\, e^{i\nu\theta}.$$

Ferner hat man

$$\Delta|\rho_n(e^{i\theta})|^2 = |\rho_n(e^{i\theta})|^2 - |\rho_{n+1}(e^{i\theta})|^2 = |\rho_n(e^{i\theta})|^2 - |\rho_n(e^{i\theta}) - \alpha_n|^2$$

$$= 2\alpha_n\,\Re\,\rho_n(e^{i\theta}) - \alpha_n^2$$

$$= 2\alpha_n \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n+\nu}\cos\nu\theta - \alpha_n^2$$

$$= \alpha_n^2 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_n\alpha_{n+\nu}\cos\nu\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_n\alpha_{n+\nu}\cos\nu\theta,$$

wo das Summenzeichen $\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'$ darauf hindeutet, dass die Glieder $\nu \geqq 1$ zu verdoppeln sind. Hieraus folgt für positive ganze k

$$\Delta^k \left| \rho_n \left(e^{i\vartheta}\right) \right|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \Delta_n^{k-1} \left(\alpha_n \alpha_{n+\nu}\right) . \cos \nu \vartheta = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' c_\nu \cos \nu \vartheta .$$

Der Index n des Symbols Δ soll hier und im folgenden darauf aufmerksam machen, dass die Differenzbildung nach n vorzunehmen ist.

Nach einer fundamentalen Formel der Differenzenrechnung gilt aber

$$\Delta^q \left(a_n b_n\right) = \sum_{\mu=0}^{q} \binom{q}{\mu} \Delta^{q-\mu} a_{n+\mu} \; . \; \Delta^\mu b_n .$$

Hieraus folgt für $q = k-1$, $a_n = \alpha_n$, $b_n = \alpha_{n+\nu}$,

$$c_\nu = \Delta_n^{k-1} \left(\alpha_n \alpha_{n+\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\mu} \Delta_n^{k-1-\mu} \alpha_{n+\mu} \; . \; \Delta_n^\mu \alpha_{n+\nu} .$$

II. Auf Grund der letzten Formel ist es nicht schwer die ersten und zweiten Differenzen der Folge $\{c_\nu\}$ *in Bezug auf* ν zu bilden. Der Index ν kommt nur in dem Faktor $\Delta_n^\mu \alpha_{n+\nu}$ vor. Nun ist aber

$$\Delta_\nu \Delta_n^\mu \alpha_{n+\nu} = \Delta_n^\mu \alpha_{n+\nu} - \Delta_n^\mu \alpha_{n+\nu+1}$$

$$= \Delta_n^\mu \left(\alpha_{n+\nu} - \alpha_{n+\nu+1}\right) = \Delta_n^\mu \Delta_n \alpha_{n+\nu} = \Delta_n^{\mu+1} \alpha_{n+\nu} ,$$

so dass

$$\Delta_\nu c_\nu = \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\mu} \Delta_n^{k-1-\mu} \alpha_{n+\mu} \; . \; \Delta_n^{\mu+1} \alpha_{n+\nu} ,$$

und ähnlicherweise

$$\Delta_\nu^2 c_\nu = \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\mu} \Delta_n^{k-1-\mu} \alpha_{n+\mu} \; . \; \Delta_n^{\mu+2} \alpha_{n+\nu} .$$

(Diese Überlegung führt unschwer zu einer entsprechenden Darstellung von $\Delta_\nu^l c_\nu$, die aber hier nicht benutzt wird.)

III. Die Folge $\{\alpha_n\}$ sei nun monoton von der Ordnung $k+1$. Dann gilt nach den letzten Formeln für die Koeffizienten der Kosinusreihe von $\Delta^k \left| \rho_n e^{i\vartheta} \right|^2$:

$$c_\nu \geqq 0, \quad \Delta c_\nu \geqq 0, \quad \Delta^2 c_\nu \geqq 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Folglich [1]) ist die Summe dieser Kosinusreihe nichtnegativ, d. h.

$$\Delta^k \left| \rho_n \left(e^{i\vartheta}\right) \right|^2 \geqq 0 , \qquad 0 < \vartheta < 2\pi ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Durch Anwendung dieses Ergebnisses auf $f(rz)$, $0 \leqq r < 1$, folgt auch die Ungleichung

$$\Delta^k \left| \rho_n (z) \right|^2 \geqq 0 , \qquad |z| < 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Damit ist die angekündigte Verallgemeinerung bewiesen.

Ist die Folge $\{\alpha_n\}$ total-monoton, so gilt somit das gleiche für die Folge

$$|\rho_0(z)|^2, \; |\rho_1(z)|^2, \; |\rho_2(z)|^2, \ldots, \; |\rho_n(z)|^2, \ldots, \; |z| \leqq 1, \; z \neq 1; n = 0, 1, 2, \ldots \; [2])$$

§ 5.

Bemerkungen. Folgerungen. Beispiele.

I. Aus der oben bewiesenen Ungleichungskette (M) folgt, dass für eine Potenzreihe

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

mit zweifach monotoner Koeffizientenfolge $\{\alpha_n\}$ sämtliche Partialsummen $s_n(z)$ die Ungleichung

$$|s_n(z)| \leqq 2 |f(z)| , \qquad |z| < 1,$$

erfüllen. Der Faktor 2 kann hier übrigens durch $1 + |z|^{n+1}$ ersetzt werden. Bezüglich des Spezialfalles der Binomialreihe $(1-z)^{-\varrho}$, $0 < \varrho < 1$, vgl. Chapman **1**, Fejér **2**, M. Riesz **5**, Szegö **6**.

II. Eine andere Klasse von Potenzreihen, für welche die letzten Ungleichungen ebenfalls gelten, findet sich bei Szegö **6**, Satz II. Sie ist charakterisiert durch die folgenden Bedingungen:

a) $f(z)$ ist regulär für $|z| < 1$;

b) $\alpha_n > 0$, $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ ist nicht abnehmend,

c) $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ ist divergent.

[1]) Siehe Fejér **3**, § III, 1.

[2]) Siehe Fejér **4**, 2, Satz II.

Aus b) folgt $\alpha_n^2 \leqq \alpha_{n-1}\alpha_{n+1}$, so dass

$$\alpha_n \leqq \sqrt{\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}} \leqq \frac{\alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}}{2},$$

d. h. $\Delta^2 \alpha_n \geqq 0$. Andererseits ist $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$, folglich $\alpha_{n+1} \leqq \alpha_n$, so dass $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \geqq 0$ existiert. Im Falle $\alpha = 0$ ist die Folge $\{\alpha_n\}$ zweifach monoton, nicht aber für $\alpha > 0$. Die Klasse a), b), c), ist somit in der in § 3, III definierten Klasse enthalten.

III. Die Ungleichungskette (M) (selbst das monotone Abnehmen der Folge $|f(z) - s_n(z)|$) wird im allgemeinen ungültig, wenn $\{\alpha_n\}$ nur einfach monoton ist. In der Tat ist die Koeffizientenfolge von

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^m + 0 \cdot z^{m+1} + 0 \cdot z^{m+2} + \ldots$$

einfach monoton. Die Ungleichung

$$|f(z) - s_0(z)| \geqq |f(z) - s_{m-1}(z)|$$

besagt in diesem Falle

$$|z + z^2 + \ldots + z^m| \geqq |z^m|, \qquad |z| < 1.$$

Dies ist unmöglich, da die linke Seite verschwindet, wenn z gegen eine von 1 verschiedene m-te Einheitswurzel konvergiert.

IV. Zum Schluss betrachten wir das Beispiel

$$f(z) = C_m^{(\lambda)} + C_{m-1}^{(\lambda)} z + C_{m-2}^{(\lambda)} z^2 + \ldots + C_0^{(\lambda)} z^m + 0 \cdot z^{m+1} + 0 \cdot z^{m+2} + \ldots,$$

wo in der üblichen Bezeichnung $C_m^{(\lambda)} = \binom{m+\lambda}{m}$ ist. Für die Koeffizientenfolge

$$C_m^{(\lambda)}, C_{m-1}^{(\lambda)}, \ldots, C_1^{(\lambda)}, C_0^{(\lambda)}, 0, 0, \ldots$$

lautet die erste Differenzenfolge, mit Rücksicht auf $C_m^{(\lambda)} - C_{m-1}^{(\lambda)} = C_m^{(\lambda-1)}$,

$$C_m^{(\lambda-1)}, C_{m-1}^{(\lambda-1)}, \ldots, C_1^{(\lambda-1)}, C_0^{(\lambda-1)}, 0, 0, \ldots.$$

Nun ist $C_m^{(\lambda)} \geqq 0$ für $\lambda \geqq -1$, so dass die gegebene Folge $(l+1)$-fach monoton ist, wenn nur $l \leqq \lambda < l+1$ gilt. Nach § 4 ist dann die Folge

$$|C_{m-n}^{(\lambda)} + C_{m-n-1}^{(\lambda)} z + \ldots + C_0^{(\lambda)} z^{m-n}|^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots m;\ 0, 0, 0, \ldots$$

l-fach monoton, wenn z eine feste Stelle, $|z| \leqq 1$, bezeichnet.

Insbesondere ergibt sich für $\lambda \geqq 1$, dass die Abschnitte $s_n(z)$ der Reihe

$$C_0^{(\lambda)} + C_1^{(\lambda)} z + C_2^{(\lambda)} z^2 + \ldots + C_n^{(\lambda)} z^n + \ldots = (1-z)^{-1-\lambda}$$

für alle z, $|z| \geqq 1$, die Monotonieeigenschaft

$$|s_0(z)| \leqq \left|\frac{s_1(z)}{z}\right| \leqq \left|\frac{s_2(z)}{z^2}\right| \leqq \ldots \leqq \left|\frac{s_n(z)}{z^n}\right| \leqq \ldots$$

besitzen. Im Spezialfalle $\lambda = 1$, $|z| = 1$, ist es nicht schwer, diese Ungleichungen direkt zu bestätigen.

Budapest — St. Louis, Mo., Mai 1935.

LITERATUR.

1. Chapman, S. On non-integral orders of summability of series and integrals. Proceedings of the London Math. Society, Ser. 2, Bd. 9, S. 369—409 (1910).

2. Fejér, L. Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome. Math. Zeitschr., Bd. 24, S. 285—298 (1925).

3. Fejér, L. Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Erscheint demnächst in den Transactions of the American Math. Society.

4. Fejér, L. Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendrepolynome. Erscheint demnächst in den Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.

5. Riesz, M. Sur la sommation des séries de Fourier. Acta Litterarum ac Scientiarum R. Univ. Hung. Francisco-Josephinae, Bd. 1, S. 104—113 (1923).

6. Szegö, G. Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. Math. Zeitschr., Bd. 25; S. 172—187 (1926).