Über einige Ungleichungen im Matrizenkalkül.

Von I. Schur

in Berlin.

Im ersten Band der von Leon Lichtenstein gegründeten Mathematischen Zeitschrift habe ich eine Arbeit [1]) veröffentlicht, in der gezeigt wird, dass der bekannte Satz von Herrn J. Hadamard über die Determinante einer positiven Hermiteschen Form sich als Spezialfall eines allgemeineren Satzes auffassen lässt. Das von mir gewonnene Hauptresultat lässt sich so formulieren:

I. *Es sei*

$$H = \sum_{\varkappa, \lambda}^{n}{}_{1} h_{\varkappa\lambda} x_{\varkappa} \bar{x}_{\lambda} \qquad (h_{\varkappa\lambda} = \bar{h}_{\lambda\varkappa}) \tag{1}$$

eine positive Hermitesche Form mit der Determinante $D = |h_{\varkappa\lambda}|$. *Durchläuft*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

die Permutationen einer gegebenen Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ *und bilden die unitären Matrizen* M_G *des Grades* m *eine Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$, *so erhält man stets, wenn*

$$S = \sum_{G} M_G \, h_{1\gamma_1} \, h_{2\gamma_2} \dots h_{n\gamma_n} \tag{2}$$

gesetzt wird, in der Matrix $S - D \cdot E_m$ *die Koeffizientenmatrix einer nichtnegativen Hermiteschen Form in* m *Veränderlichen.*

Hierbei ist unter E_m die Einheissmatrix des Grades m zu verstehen. Hieraus ergibt sich insbesondere:

---

[1]) *Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen*, a. a. O, S. 184—207. Diese Arbeit wird im folgender kurz mit E. zitiert.

I'. *Ist* $\gamma(G)$ *ein beliebiger (eigentlicher) Charakter der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *vom Grade* $\gamma(E)=m$, *so gilt für jede positive Hermitesche Form* (1) *mit der Determinante* D *die Ungleichung*

$$\sum_G \gamma(G)\, h_{1\bar{\gamma}_1} h_{2\bar{\gamma}_2} \dots h_{n\bar{\gamma}_n} \geqq m D. \tag{3}$$

Die Hadamardsche Ungleichung

$$D \leqq h_{11}\, h_{22} \dots h_{nn}$$

folgt aus (3), indem man $\mathfrak{G}$ als Einheitsgruppe wählt und $\gamma(E)=1$ setzt.

Die in *E.* angegebene Beweis des Satzes I macht von tiefer liegenden Resultaten der Darstellungstheorie Gebrauch und erfordert ausserdem eine nicht einfache Spezialuntersuchung. Hierbei ergaben sich zugleich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Auftreten des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (3). Verzichtet man hierauf, so kann man, wie im folgenden (§§ 1—2) gezeigt wird, den Satz I auf durchaus elementarem Wege beweisen.

In § 3 leite ich einige Anwendungen des Satzes I ab.

In den letzten Paragraphen behandle ich eine allgemeinere Frage, auf die ich durch eine interessante Note von Herrn A. Khintchine[2]) geführt worden bin. Herr Khintchine beweist hier folgendes: Ist $(a_{\alpha\beta})$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, in der jeder Koeffizient $a_{\alpha\beta}$ entwerder 0 oder 1 ist, und setzt man

$$\sigma_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}, \qquad s_\beta = \sum_{\alpha=1}^{m} a_{\alpha\beta}, \qquad A = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta},$$

so gilt, wenn q die grössere der beiden Zahlen m und n bedeutet, die Ungleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sigma_\alpha^2 + \sum_{\beta=1}^{n} s_\beta^2 \leqq A\left(q + \frac{A}{q}\right).$$

Dieser Satz ist, wie ich hier zeigen will, als Spezialfall in einer allgemeineren Regel enthalten:

II. *Setzt man, wenn* $M=(c_{\varkappa\lambda})$ *eine beliebige quadratische Matrix des Grades* n *mit reellen oder komplexen Koeffizienten ist,*

$$\sigma(M) = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{\varkappa\varkappa}, \qquad \vartheta(M) = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} |c_{\varkappa\lambda}|^2,$$

[2]) *Über eine Ungleichung*, Matematičeskij Sbornik, Bo. 39 (1932), S. 35—39.

so gilt für je zwei Matrizen A *und* B *die Ungleichung*

$$\vartheta(AB) + \vartheta(BA) \leqq \vartheta(A)\,\vartheta(B) + |\sigma(AB)|^2.$$

Ich gebe zugleich eine Methodé an, die auch für mehr als zwei Matrizen ähnlich geartete, allerdings wesentlich kompliziertere Ungleichungen abzuleiten gestattet.

§ 1.

Erster Schritt zum Beweise des Satzes I.

Ist $H=(h_{\varkappa\lambda})$ die Koeffizientenmatrix der positiven Hermiteschen Form (1), so lässt sich bekanntlich eine Matrix $A=(a_{\varkappa\lambda})$ so bestimmen, dass

$$H = A\bar{A}', \tag{4}$$

d. h.

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varkappa\nu}\, \overline{a_{\lambda\nu}} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots, n) \tag{5}$$

wird. Für jedes der n^n Systeme

$$(\rho) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \tag{6}$$

von n Indizes aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ und für jede Permutation

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

der Zahlen $1, 2, \dots, n$ setze man

$$a_P^{(\rho)} = a_{\lambda_1\rho_1}\, a_{\lambda_2\rho_2} \dots a_{\lambda_n\rho_n} \tag{8}$$

und

$$h_P = h_{1\lambda_1}\, h_{2\lambda_2} \dots h_{n\lambda_n}. \tag{9}$$

Ist dann

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ \mu_1 & \mu_2 \quad \mu_n \end{pmatrix}$$

eine zweite, nicht notwendig von P verschiedene Permutation, so wird

$$h_{P^{-1}Q} = h_{\lambda_1\mu_1}\, h_{\lambda_2\mu_2} \dots h_{\lambda_n\mu_n}.$$

Dieses Produkt lässt sich wegen (5) in der Form

$$\sum_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n} a_{\lambda_1\rho_1}\, a_{\lambda_2\rho_2} \dots a_{\lambda_n\rho_n} \cdot \bar{a}_{\mu_1\rho_1}\, \bar{a}_{\mu_2\rho_2} \dots \bar{a}_{\mu_n\rho_n},$$

schreiben. Mit Hilfe der durch (8) erklärten Zeichen können wir daher schliessen, dass für je zwei Permutationen P und Q die Gleichung

$$h_{P^{-1}Q} = \sum_{\rho} a_P^{(\rho)} \bar{a}_Q^{(\rho)} \tag{10}$$

gilt.

Bilden nun die unitären Matrizen M_G eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$, so wird für je zwei Permutationen P, Q von $\mathfrak{G}$

$$M_{P^{-1}Q} = M_{P^{-1}} M_Q, \qquad M_{P^{-1}} = M_P^{-1} = M_P' .$$

Führt man nun für jedes der n^n Indizessysteme (6) die Matrix

$$F_\rho = \sum_P M_P^{-1} a_P^{(\rho)} \tag{11}$$

des Grades m ein, wobei P alle Permutationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft, so wird

$$\bar{F}_\rho' = \sum_P \bar{M}_{P^{-1}}' \bar{a}_P^{(\rho)} = \sum_P M_P \bar{a}_P^{(\rho)} .$$

Dies liefert

$$F_\rho \bar{F}_\rho' = \sum_{P,Q} M_{P^{-1}Q} a_P^{(\rho)} \bar{a}_Q^{(\rho)},$$

wo P und Q alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchlaufen. Aus (10) folgt daher

$$\sum_\rho F_\rho \bar{F}_\rho' = \sum_{P,Q} M_{P^{-1}Q} h_{P^{-1}Q} . \tag{12}$$

Bezeichnet man nun die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit g, so lässt sich jede Permutation G von $\mathfrak{G}$ auf g verschiedene Arten als Produkt $P^{-1}Q$ schreiben. Die in (12) rechts auftretende Summe ist daher das g-fache der durch die Formel (2) definierten Matrix S.

Wir erhalten demnach

$$S = \sum_G M_G h_G = \frac{1}{g} \sum_\rho F_\rho \bar{F}_\rho' . \tag{13}$$

Diese Gleichung setzt in Evidenz, dass S eine Hermitesche Matrix ist, zu der eine nichtnegative Hermitesche Form gehört. Denn bekanntlich hat jede Matrix von der Gestalt $F_\rho \bar{F}_\rho'$ und auch jede Summe von solchen Bildungen diese Eigenschaft.

§ 2.

Beweis des Satzes I.

Wir haben noch zu zeigen, dass auch die Matrix $S - D \cdot E_m$ das Koeffizientensystem einer nichtnegativen Hermiteschen Form liefert.

Dies ist jedenfalls richtig, wenn wir die Matrix A, die bei gegebenem H nur der Bedingung (4) zu genügen hat, so wählen können, dass für mindestens g unter den Indizessystemen (ρ).

$$F_\rho \bar{F}_\rho = D \cdot E_m \tag{14}$$

wird.

Um dieses Ziel zu erreichen, stelle man, was bekanntlich stets möglich ist, unsere positive Hermitesche Form in der Gestalt

$$\sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda = | a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n |^2 + | a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + \ldots + a_{n2} x_n |^2 + \ldots$$

dar. Die Matrix $H = (h_{\varkappa\lambda})$ erhält dann die Gestalt (4), wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

also

$$a_{\varkappa\lambda} = 0 \text{ für } \varkappa < \lambda \tag{15}$$

wird.

Setzt man analog der Formel (9) für jede Permutation (7)

$$a_P = a_{1\lambda_1} a_{2\lambda_2} \ldots a_{n\lambda_n},$$

so ist dies wegen (15) nur für die identische Permutation $P = E$ von Null verschieden. Ausserdem wird

$$| a_E |^2 = D .$$

Man betrachte nun unter den n^n Indizessystemen (6) nur diejenigen $n!$, bei denen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ voneinander verschieden sind. Bezeichnet man in diesem Fall die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_n \end{pmatrix}$$

mit R, so wird in der Summe (11) für jede Permutation P der Gruppe $\mathfrak{G}$

$$a_P^{(\rho)} = a_{i_1\rho_1}\, a_{i_2\rho_2} \dots a_{i_n\rho_n} = a_{P^{-1}R},$$

also gleich 0, wenn P von R verschieden ist, und gleilh a_E, wenn $P = R$ wird. Dies zeigt, dass in der Summe (13) für die von uns zu betrachtenben $n!$ Indizessysteme (ρ)

$$F_\rho\, F_\rho' = 0$$

oder

$$F_\rho\, F_\rho' = a_E \bar{a}_E \cdot M_R^{-1}\, (M_{R^{-1}})' = D \cdot E_m$$

wird, je nachdem die Permutation R in $\mathfrak{G}$ fehlt oder in $\mathfrak{G}$ vorkommt. Die g Permutationen R von $\mathfrak{G}$ liefern also g mal den Fall (14).

Damit ist der Satz I als bewiesen anzusehen. Wir erkennen zugleich, dass die Matrix $S - D \cdot E_m$ sich in der Gestalt

$$S - D \cdot E_m = \sum_\rho{}' F_\rho\, \bar{F}_\rho' \tag{16}$$

schreiben lässt, wo ρ nur diejenigen Indizessysteme (6) zu durchlaufen hat, bei denen mindestens zwei Indizes einander gleich sind[3]).

§ 3.

Ergänzende Bemerkungen und Folgerungen.

1. Wählt man als Gruppe $\mathfrak{G}$ die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ und als unitäre Darstellung M_G die reguläre Darstellung, so geht unsere Matrix $S - D \,.\, E_m$ in die „Gruppenmatrix"

$$T = (h_{PQ^{-1}} - D \,.\, e_{PQ^{-1}}) \tag{17}$$

des Grades $m = n!$ über. Hierbei durchlaufen P und Q alle $n!$ Permutationen von $\mathfrak{S}_n$, unter e_R ist nach dem Vorgange von Frobenius 1 oder 0 zu verstehen, je nachdem die Permutation R gleich der Identität E oder von E verschieden ist.

Aus dem Satze I ergibt sich, dass T für jede positive Hermitesche Form H mit der Determinante D eine Hermitesche Matrix ist, zu der eine nichtnegative Hermitesche Form gahört. Man kann aber auch

[3]) Auf die Untersuchung der Frage, welche $F_\rho\, \bar{F}_\rho'$ hierbei von der Nullmatrix verschieden sein können, gehe ich hier nicht ein.

umgekehrt schliessen: *Weiss man, dass T diese Eigenschaft besitzt, so gilt der Satz I für jede Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ und jede unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$.*

Dies folgt aus einer allgemeinen, fast trivialen Regel:

A. *Ist*

$$H = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, \bar{x}_\lambda \qquad (h_{\varkappa\lambda} = \bar{h}_{\lambda\varkappa})$$

eine nichtnegative Hermitesche Form und sind

$$M_1,\ M_2, \dots,\ M_n$$

beliebige quadratische Matrizen, deren Grad m keiner Beschränkung unterliegt, so stellt die Summe

$$C = \sum_{\varkappa,\lambda} h_{\varkappa\lambda}\, M_\varkappa\, M_\lambda' = (c_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m) \tag{18}$$

eine Hermitesche Matrix dar, zu der eine nichtnegative Form

$$C(u, \bar{u}) = \sum_{\alpha,\beta}^{m} c_{\alpha\beta}\, u_\alpha\, \bar{u}_\beta$$

gehört.

Bestimmt man nämlich eine Matrix $(a_{\varkappa\lambda})$ des Grades n, so dass

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\varkappa\mu}\, \bar{a}_{\lambda\mu} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

wird, und setzt

$$N_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\mu}\, M_\varkappa, \qquad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

so wird, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$C = \sum_{\mu=1}^{n} N_\mu\, \bar{N}_\mu'$$

was unsere Behauptung in Evidenz setzt.

Weiss man nun, dass für jede positive Form H mit der Determinante D die Gruppenmatrix T eine nichtnegative Hermitesche Form bestimmt, so erscheint, wenn $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ mit den Permutationen $P_1, P_2, \dots, P_g$ ist, die Matrix

$$T_1 = (h_{P_\rho P_\sigma^{-1}} - D\, e_{P_\rho P_\sigma^{-1}}) \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, g)$$

als ein „Hauptabschnitt" von T. Daher ist auch T_1 die Koeffizientenmatrix einer nichtnegativen Hermiteschen Form. Bilden nun die unitären Matrizen

$$M_{P_1}, M_{P_2}, \ldots, M_{P_g}$$

des Grades m eine Darstellung von $\mathfrak{G}$, so wird die Summe

$$C_1 = \sum_{\rho, \sigma=1}^{g} (h_{P_\rho P_\sigma^{-1}} - D\, e_{P_\rho P_\sigma^{-1}})\, M_{P_\rho} \bar{M}'_{P_\sigma}$$

nach A. die Eigenschaft haben, eine nichtnegative Hermitesche Form zu liefern. Es ist aber hier

$$M_{P_\rho} \bar{M}'_{P_\sigma} = M_{P_\rho} M_{P_\sigma}^{-1} = M_{P_\rho P_\sigma^{-1}},$$

woraus leicht folgt, dass die von uns zu betrachtende Matrix $S - D \cdot E_m$ mit $g\, C_1$ übereinstimmt.

2. Der Vollständigkeit wegen will ich noch auf einen Satz aufmerksam machen, der sich an den von uns benutzten Satz A anschliesst.

B. *Es sei*

$$H = \sum_{\varkappa, \lambda=1}^{n} h_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa \bar{x}_\lambda \qquad (h_{\varkappa\lambda} = \bar{h}_{\lambda\varkappa})$$

eine beliebige Hermitesche Form mit den (reellen) charakteristischen Wurzeln

$$\omega_1 \leqq \omega_2 \leqq \ldots \leqq \omega_n .$$

Bildet man für unitäre Martizen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *des Grades* m *die Summe* (18) *und bezeichnet man die* m *charakteristischen Wurzeln dieser (wieder Hermiteschen) Matrix mit*

$$\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \ldots \leqq \gamma_m ,$$

so ist stets

(19) $$\gamma_1 \geqq n\,\omega_1 , \quad \gamma_m \leqq n\,\omega_n .$$

Um dies zu beweisen, bestimme man, was nach dem Satz über die Transformation einer Hermiteschen Form auf die „Hauptachsen" gewiss möglich ist, eine unitäre Matrix $(u_{\varkappa\lambda})$ des Grades n, so dass

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu\, u_{\varkappa\mu}\, \bar{u}_{\lambda\mu}$$

wird. Setzt man dann

$$F_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{n} u_{\varkappa\mu}\, M_\varkappa ,$$

so wird, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$\sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu\, F_\mu \bar{F}'_\mu = \sum_{\varkappa, \lambda} h_{\varkappa\lambda}\, M_\varkappa \bar{M}'_\lambda = C$$

und

$$\sum_{\mu=1}^{n} F_\mu \bar{F}'_\mu = \sum_{\varkappa, \lambda}^{n} M_\mu \bar{M}'_\mu = n\, E_m ,$$

wo E_m wieder die Einheitsmatrix des Grades m bedeutet. Hieraus folgt, dass

$$C - n\,\omega_1 E_m = \sum_{\mu=1}^{n} (\omega_\mu - \omega_1)\, F_\mu \bar{F}'_\mu$$

und

$$n\,\omega_n E_m - C = \sum_{\mu=1}^{n} (\omega_n - \omega_\mu)\, F_\mu \bar{F}'_\mu$$

als Hermitesche Matrizen, zu denen nichtnegative Hermitesche Formen gehören, anzusehen sind. Ihre charakteristischen Wurzeln

$$\gamma_\alpha - n\,\omega_1 , \quad \text{bzw. } n\,\omega_n - \gamma_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

sind daher nichtnegative reelle Zahlen. Dies liefert die Ungleichungen (19) [4]).

3. Die Tatsache, dass die Gruppenmatrix (17) für jede positive Hermitesche Form H eine nichtnegative Hermitesche Form in $n!$ Veränderlichen liefert, ist identisch mit der Eigenschaft, lauter nichtnegative Hauptunterdeterminanten aufzuweisen. Für jede von E verschiedene Permutation

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist daher insbesondere

[4]) Diese Ungleichungen liefern insbesondere für $m < n$ eine Methode, die Zahlen ω_1 und ω_n mit Hilfe der kleinsten bzw. grössten charakteristischen Wurzel einer Hermiteschen Form mit weniger als n Veränderlichen nach oben bzw. nach unten abzuschätzen. Sie liefern also eine Ergänzung zu dem vielbenutzten Satz über die Wurzeln der „Abschnitte" einer Hermiteschen Form.

$$\begin{vmatrix} h_E - D, & h_{P^{-1}} \\ h_P \quad , & h_E - D \end{vmatrix} = (h_E - D)^2 - |h_P|^2 \geqq 0 .$$

Dies liefert eine nicht uninteressante Verschärfung des Hadamardschen Satzes

$$D \leqq h_E = h_{11}\, h_{22} \ldots h_{nn} .$$

Wir erkennen, dass für *jedes* vom Hauptglied $h_{11}\, h_{22} \ldots h_{nn}$ verschiedene Glied der Summe

$$D = \sum + h_{1\lambda_1}\, h_{2\lambda_2} \ldots h_{n\lambda_n}$$

genauer

$$D \leqq h_{11}\, h_{22} \ldots h_{nn} - |h_{1\lambda_1}\, h_{2\lambda_2} \ldots h_{n\lambda_n}|$$

wird [5]).

4. Etwas tieferliegend ist eine weitere Anwendung des Satzes über die Gruppenmatrix (17).

Sind

$$H = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, \bar{x}_\lambda , \qquad H_1 = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h^{(1)}_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, \bar{x}_\lambda$$

zwei nichtnegative Hermitesche Formen und setzt man

$$h_{\varkappa\lambda}\, h^{(1)}_{\varkappa\lambda} = h^{(2)}_{\varkappa\lambda} ,$$

so ist bekanntlich auch

$$H_2 = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} h^{(2)}_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, \bar{x}_\lambda$$

eine nichtnegative Form [6]).

Herr A. Oppenheim [7]) hat zuerst auf eine interessante Ergänzung dieses Satzes aufmerksam gemacht: Bezeichnet man die Determinanten der Formen H, H_1, H_2 mit D, D_1, D_2, so wird stets

$$D_2 \geqq D\, D_1 . \tag{20}$$

Dies ergibt sich sogar in präziserer Gestalt recht einfach aus unseren Ergebnissen. Man bilde nämlich, wenn für jede Permutation (7)

[5]) Für den Fall, dass P eine Transposition ist, findet sich diese Ungleichung schon bei E. Fischer, *Über den Hadamardschen Determinantensatz*, Archiv der Mathematik und Physik (3), Bd. 13 (1908) S. 32—40.

[6]) Vgl. meine Arbeit *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen*, Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 140 (1911) S. 11.

$$h^{(\alpha)}_P = h^{(\alpha)}_{1\lambda_1}\, h^{(\alpha)}_{2\lambda_2} \ldots h^{(\alpha)}_{n\lambda_n} \qquad \left(\alpha = 0,\ 1,\ 2;\quad h^{(0)}_{\varkappa\lambda} = h_{\varkappa\lambda}\right)$$

gesetzt wird, die Gruppenmatrizen

$$T_\alpha = \left(h^{(\alpha)}_{PQ^{-1}} - D_\alpha\, e_{PQ^{-1}}\right) .$$

Da T_0 und T_1 nichtnegative Hermitesche Formen (in n Veränderlichen) liefern, gilt dasselbe auch für die Matrix $(c_{PQ^{-1}})$, wenn für jede Permutation R

$$\begin{aligned} c_R &= (h_R - D\, e_R)\left(h^{(1)}_R - D_1\, e_R\right) \\ &= h^{(2)}_R - D\, h^{(1)}_R\, e_R - D_1\, h_R\, e_R + D D_1\, e_R \end{aligned} \tag{21}$$

gesetzt wird. Ist nun $\zeta(R)$ der alternierende Charakter der symmetrischen Gruppe, d. h. $\zeta(R) = 1$ oder -1, je nachdem R eine gerade oder ungerade Permutation ist, so wird

$$\sum_{P,Q} c_{PQ^{-1}}\, \zeta(P)\, \zeta(Q) = \sum_{P,Q} c_{PQ^{-1}}\, \zeta(PQ^{-1}) = n! \sum_R c_R\, \zeta(R)$$

eine nichtnegative Grösse. Es wird aber, wie aus (21) folgt,

$$\sum_R c_R\, \zeta(R) = D_2 - D\, h^{(1)}_E - D_1\, h_E + D D_1 ,$$

also ist [8])

$$D_2 \geqq D\, h^{(1)}_E + D_1\, h_E - D D_1 . \tag{22}$$

Wegen $h_E \geqq D$, $h^{(1)}_E \geqq D_1$ folgt hieraus die Ungleichung (20).

Die Formel (22) schreibt man besser in der Form

$$h^{(2)}_E - D_2 \leqq (h_E - D)\left(h^{(1)}_E - D_1\right) ,$$

was eine naheliegende Verallgemeinerung zulässt: *Sind*

$$H_\alpha = \sum_{\varkappa,\lambda} h^{(\alpha)}_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, \bar{x}_\lambda \qquad (\alpha = 0,\ 1, \ldots,\ k-1)$$

[7]) *Inequalities connected with definite Hermitian forms*, Journal of the London Mathematical Society, Bd. V (1930), S. 114—119.

[8]) Diese Ungleichung führt bereits Herr Oppenheim a. a. O. als von mir herrührend an. Er gibt für sie auch einen direkten Beweis an. Der im Text entwickelte Beweis wird hier zum ersten Mal veröffentlicht.

k nichtnegative Hermitesche Formen, setzt man

$$h_{\varkappa\lambda}^{(k)} = h_{\varkappa\lambda}^{(0)}\, h_{\varkappa\lambda}^{(1)} \ldots h_{\varkappa\lambda}^{(k-1)}$$

und

$$H_k = \sum_{\varkappa,\lambda} h_{\varkappa\lambda}^{(k)}\, x_\varkappa\, \bar{x}_\lambda\,,$$

so gilt für die Determinanten $D_0, D_1, \ldots, D_k$ der Formen $H_0, H_1, \ldots, H_k$ die Ungleichung

$$h_{11}^{(k)}\, h_{22}^{(k)} \ldots h_{nn}^{(k)} - D_k \leqq \prod_{\alpha=0}^{k-1} \left(h_{11}^{(\alpha)}\, h_{22}^{(\alpha)} \ldots h_{nn}^{(\alpha)} - D_\alpha\right).$$

§ 4.

Der Satz II und seine Verallgemeinerung.

1. Setzt man für je zwei Matrizen n-ten Grades $A = (a_{\varkappa\lambda})$ und $B = (b_{\varkappa\lambda})$

$$\Delta(A, B) = \vartheta(A)\,\vartheta(B) + |\sigma(AB)|^2 - \vartheta(AB) - \vartheta(BA)\,,$$

so ist zu beweisen, dass stets

$$\Delta(A, B) \geqq 0 \tag{23}$$

ist[9]). Es empfiehlt sich, anstatt $\Delta(A, B)$ den Ausdruck $\Delta(A, B')$ zu untersuchen. Berücksichtigt man, dass bekanntlich für je zwei Matrizen M und N

$$\vartheta(M) = \sigma(M\bar{M}')\,, \qquad \sigma(MN) = \sigma(NM)\,, \qquad \sigma(\bar{M}') = \overline{\sigma(M)}$$

ist, so erkennt man, dass

$$\begin{aligned} \Delta(A, \bar{B}') = {} & \sigma(A\bar{A}')\,\sigma(B\bar{B}') + \sigma(A\bar{B}')\,\sigma(B\bar{A}') \\ & - \sigma(\bar{A}'A\bar{B}'B) - \sigma(A\bar{A}'B\bar{B}') \end{aligned} \tag{23'}$$

wird. Die zu beweisende Ungleichung (23) beruht nun auf einer einfachen Identität: *Setzt man nämlich für je 4 Indizes $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ aus der Reihe* $1, 2, \ldots, n$

$$f_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} = a_{\varkappa\mu}\, b_{\lambda\nu} + a_{\lambda\nu}\, b_{\varkappa\mu} - a_{\varkappa\nu}\, b_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}\, b_{\varkappa\nu}\,,$$

[9]) Die Bedeutung dieser Ungleichung tritt erst klar hervor, wenn man beachtet, dass bekanntlich $\vartheta(AB)$ und $\vartheta(BA)$ höchstens gleich $\vartheta(A)\,\vartheta(B)$ sind. Ausserdem ist, wie man mit Hilfe der „Schwarzschen" Ungleichung ebenso leicht zeigt, auch $|\sigma(AB)|^2 \leqq \vartheta(A)\,\vartheta(B)$. Die Ungleichung (23) liefert also eine Verbesserung gegenüber der roheren Abschätzung

$$\vartheta(AB) + \vartheta(BA) \leqq 2\,\vartheta(A)\,\vartheta(B).$$

so wird für beliebige komplexe Grössen $a_{\rho\sigma}$, $b_{\rho\sigma}$

$$4\,\Delta(A, \bar{B}') = \sum_{\varkappa,\mu,\lambda,\nu=1}^{n} |f_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}|^2\,. \tag{24}$$

Der Beweis dieser Identität lässt sich ohne Mühe durch eine einfache Rechnung führen. Ihr Ursprung tritt aber erst klar hervor, wenn man eine allgemeinere Betrachtung durchführt.

2. Es seien

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l, \ldots \tag{25}$$

komplexe Veränderliche in endlicher Anzahl und

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_l, \ldots \tag{26}$$

die konjugiert komplexen Werte. Eine ganze rationale Funktion $f(x, y, \ldots; \bar{x}, \bar{y}, \ldots)$ der Veränderlichen (25) und (26) soll im folgenden als ein *nichtnegatives Hermitesches Polynom* bezeichnet werden, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

a. Der Ausdruck $f(x, y, \ldots; \bar{x}, \bar{y}, \ldots)$ nimmt für alle Werte der Argumente $x, y, \ldots$ nur reelle, nichtnegative Werte an.

b. Es lassen sich endlich viele ganze rationale Funktionen

$$\varphi_1(x, y, \ldots), \quad \varphi_2(x, y, \ldots), \ldots, \varphi_r(x, y, \ldots),$$

die nur von den Veränderlichen (25) abhängen, dagegen die Veränderlichen (26) nicht enthalten, so bestimmen, dass identisch

$$f(x, y, \ldots; \bar{x}, \bar{y}, \ldots) = \sum_{\rho=1}^{r} |\varphi_\rho(x, y, \ldots)|^2 \tag{27}$$

wird.[10]).

Ein nichtnegatives Hermitesches Polynom besitzt nun eine bemerkenswerte Eigenschaft. Man betrachte nämlich neben den Veränderlichen (25) und (26) ebenso viele neue komplexe Veränderliche

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l, \ldots \text{ bzw. } \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_l, \ldots$$

und führe für jede Funktion g der Veränderlichen (25) und (26) die Differentiationsprozesse

[10]) Es ist hierbei zu beachten, dass z. B. der Ausdruck $(x\bar{x} - y\bar{y})^2$ zwar der Bedingung a. genügt, aber nicht als Hermitesches Polynom aufzufassen ist. Denn eine Darstellung der Form (27) ist hier nicht möglich.

$$D_{x,\xi}\, g = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial x_\varkappa}\, \xi_\varkappa, \qquad D_{\bar{x},\bar{\xi}}\, g = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_\varkappa}\, \bar{\xi}_\varkappa,$$

$$\delta_{x,\xi}\, g = D_{x,\xi}\, D_{\bar{x},\bar{\xi}}\, g = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k} \frac{\partial^2 g}{\partial x_\varkappa\, \partial \bar{x}_\lambda}\, \xi_\varkappa\, \bar{\xi}_\lambda$$

und die entsprechenden Prozesse

$$D_{y,\eta}\, g, \quad D_{\bar{y},\bar{\eta}}\, g, \quad \delta_{y,\eta}\, g \quad \text{u. s. w.}$$

ein.

Es gilt dann folgendes Polarisierungsprinzip, das zwar auf der Hand liegend ist, aber gute Dienste leistet:

Für jedes nichtnegative Hermitesche Polynom $f(x, y, \ldots; \bar{x}, \bar{y}, \ldots)$ *sind die Ausdrücke*

$$\delta_{x,\xi}\, f, \quad \delta_{y,\eta}\, f, \quad \delta_{x,\xi}\, \delta_{y,\eta}\, f \quad \text{u. s. w.}$$

wieder nichtnegative Hermitesche Polynome der in ihnen vorkommenden Veränderlichen.

Denn bedeutet $\bar{\varphi}_\rho(x, y, \ldots)$ dasjenige Polynom, das aus $\varphi_\rho(x, y, \ldots)$ dadurch hervorgeht, dass man jeden Koeffizienten durch den konjugiert komplexen Wert ersetzt, so wird in (27)

$$|\varphi_\rho(x, y, \ldots)|^2 = \varphi_\rho(x, y, \ldots)\, \bar{\varphi}_\rho(\bar{x}, \bar{y}, \ldots),$$

also

$$\delta_{x,\xi}\, |\varphi_\rho\, x, y, \ldots)|^2 = D_{x,\xi}\, \varphi_\rho(x, y, \ldots).\; D_{\bar{x},\bar{\xi}}\, \bar{\varphi}_\rho(\bar{x}, \bar{y}, \ldots),$$

was auch in der Form

$$|D_{x,\xi}\, \varphi_\rho(x, y, \ldots)|^2$$

geschrieben werden kann. Aus (27) folgt also

$$\delta_{x,\xi}\, f = \sum_{\rho=1}^{r} |D_{x,\xi}\, \varphi_\rho(x, y, \ldots)|^2$$

und hierauf kann man wieder den Polarisierungsprozess $\delta_{y,\eta}$ anwenden u. s. w.

3. Um nun auf die Identität (24) geführt zu werden, schliesse man folgendermassen. Ist $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine Matrix n-ten Grades, so setze man

$$H = A\bar{A}' = (h_{\varkappa\lambda}) \qquad (h_{\varkappa\lambda}) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\varkappa\mu}\, \bar{a}_{\lambda\mu}.$$

und

(28) $$|x E_n - H| = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots \pm c_n.$$

Ferner bezeichne man die Spur der ν-ten Potenz von H mit s_ν. Dann wird bekanntlich

$$2c_2 = s_1^2 - s_2 = \sigma(A\bar{A}')\, \sigma(A\bar{A}') - \sigma(A\bar{A}'A\bar{A}').$$

Andererseits ist

$$c_2 = \sum_{\varkappa<\lambda} \begin{vmatrix} h_{\varkappa\varkappa} & h_{\varkappa\lambda} \\ h_{\lambda\varkappa} & h_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \sum_{\varkappa<\lambda} \sum_{\mu<\nu} \begin{vmatrix} a_{\varkappa\mu} & a_{\varkappa\nu} \\ a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{\varkappa\mu} & \bar{a}_{\varkappa\nu} \\ \bar{a}_{\lambda\mu} & \bar{a}_{\lambda\nu} \end{vmatrix},$$

was man auch in der Form

(29) $$4c_2 = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{\varkappa\mu}, & a_{\varkappa\nu} \\ a_{\lambda\mu}, & a_{\lambda\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{\varkappa\mu}, & \bar{a}_{\varkappa\nu} \\ \bar{a}_{\lambda\mu}, & \bar{a}_{\lambda\nu} \end{vmatrix}$$

schreiben kann.

Diese Formel zeigt, dass c_2 als ein nichtnegatives Hermitesches Polynom der Veränderlichen $a_{\rho\sigma}$ und $\bar{a}_{\rho\sigma}$ zu bezeichnen ist. Ist nun $B = (b_{\varkappa\lambda})$ eine zweite Matrix, so führe man die Differentiationsprozesse

$$D_{a,b}\, g = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial a_{\varkappa\lambda}}\, b_{\varkappa\lambda}, \qquad \delta_{a,b}\, g = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial a_{\varkappa\lambda}\, \partial \bar{a}_{\mu\nu}}\, b_{\varkappa\lambda}\, \bar{b}_{\mu\nu}$$

ein und bilde die Ausdrücke

(30) $$D_{a,b} \begin{vmatrix} a_{\varkappa\mu} & a_{\varkappa\nu} \\ a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\nu} \end{vmatrix} = a_{\varkappa\mu}\, b_{\lambda\nu} - a_{\lambda\nu}\, b_{\varkappa\mu} + b_{\varkappa\mu}\, a_{\lambda\nu} - b_{\lambda\nu}\, a_{\varkappa\mu} = f_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}$$

Dann folgt aus (29)

(31) $$4\,\delta_{a,b}\, c_2 = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{n} |f_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}|^2.$$

Andererseits erhält man durch eine einfache Rechnung

$$\delta_{a,b}\, \sigma(A\bar{A}')\, \sigma(A\bar{A}') = 2\,\sigma(A\bar{A}')\, \sigma(B\bar{B}') + 2\,\sigma(A\bar{B}')\, \sigma(B\bar{A}'),$$

$$\begin{aligned} \delta_{a,b}\, \sigma(A\bar{A}'A\bar{A}') &= \sigma(A\bar{B}'B\bar{A}') + \sigma(A\bar{A}'B\bar{B}') \\ &\quad + \sigma(B\bar{B}'A\bar{A}') + \sigma(B\bar{A}'A\bar{B}') \\ &= 2\,\sigma(A\bar{A}'B\bar{B}') + 2\,\sigma(\bar{A}'A\bar{B}'B). \end{aligned}$$

Aus (23′) folgt daher in den früheren Bezeichnungen

$$\delta_{a,b}\, c_2 = \Delta(A, \bar{B}'),$$

woraus in Verbindung mit (30) die Identität (24) folgt.

4. Man erkennt nun leicht, wie man auch für beliebig viele Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ Ungleichungen angeben kann, die der Ungleichung $\Delta(A, \overline{B'}) \geqq 0$ analog sind. Geht man von einer Matrix A aus, deren Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ als komplexe Veränderliche aufgefasst werden, und betrachtet eine beliebige ganze rationale Funktion Φ der Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ und $\overline{a_{\varkappa\lambda}}$, von der man weiss, dass sie Eigenschaften eines nichtnegativen Hermiteschen Polynoms hat, so darf die Ungleichung $\Phi \geqq 0$ „polarisiert" werden. Man hat sich hierbei Differentiationsprozesse

$$\delta_\alpha = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial^2}{\partial a_{\varkappa\lambda}\, \partial a_{\mu\nu}} a_{\varkappa\lambda}^{(\alpha)} a_{\mu\nu}^{(\alpha)}, \qquad \delta = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k$$

zu bedienen.

Insbesondere liefern die durch (28) definierten Ausdrücke $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zulässige Funktionen Φ, für die $\delta\Phi \geqq 0$ wird. Ausserdem darf, wie aus der Theorie der rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe folgt, für Φ bei gegebenem k jede Determinante der Form

$$\Phi = \begin{vmatrix} c_{\lambda_1} & c_{\lambda_1+1} & \ldots & c_{\lambda_1+\rho-1} \\ c_{\lambda_2-1} & c_{\lambda_2} & \ldots & c_{\lambda_2+\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\lambda_\rho-\rho+1} & c_{\lambda_\rho-\rho+2} & \ldots & c_{\lambda_\rho} \end{vmatrix} \qquad (c_0 = 1,\ c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0)$$

gewählt werden, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ positive ganze Zahlen sind, die den Bedingungen

$$k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\rho, \quad \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_\rho$$

genügen sollen. Die zugehörigen Ungleichungen $\vartheta\Phi \geqq 0$ haben die Eigenschaft gemeinsam, dass die links stehenden Ausdrücke nur von der Spuren der Matrizen $A_\alpha \overline{A'}_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$ und gewisser unter ihren Produkten abhängen.

Schon der explizite Ausdruck, der sich für δc_3 ergibt, ist so kompliziert, dass ich diese Verallgemeinerungen des Satzes II nicht weiter verfolgen will.

5. Ich füge noch eine Bemerkung über das Auftreten des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (23) hinzu.

Setzt man

$$\overline{B'} = C = (c_{\varkappa\lambda}), \text{ d. h. } c_{\varkappa\lambda} = \overline{b_{\lambda\varkappa}}$$

und bildet man für je vier Indizes $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$

(32) $$g_{\varkappa\lambda\mu\nu} = a_{\varkappa\mu}\, c_{\lambda\nu} + a_{\lambda\nu}\, c_{\varkappa\mu} - a_{\varkappa\nu}\, c_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}\, c_{\varkappa\nu},$$

so lehrt die Identität (24), dass

$$\Delta(A, B) = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}^{n} |g_{\varkappa\lambda\mu\nu}|^2$$

wird. Die Gleichung

(33) $$\Delta(A, B) = 0$$

gilt also dann und nur dann, wenn alle Ausdrücke (32) verschwinden.

Sind ferner P und Q zwei Matrizen von nicht verschwindender Determinante und ersetzt man A und C durch PAQ und PCQ, so erfahren die Ausdrücke (32) eine lineare homogene Transformation. Hieraus folgt, dass die Gleichung (33) dann und nur dann gilt, wenn

$$\Delta(PAQ, \overline{Q'}B\overline{P'}) = 0$$

ist. Die hierzu gehörenden Ausdrücke (32) vereinfachen sich wesentlich, wenn man, falls r den Rang der Matrix A bedeutet, P und Q so bestimmt, dass in den üblichen Bezeichnungen

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wird.

Eine einfache Diskussion liefert nun insbesondere folgendes Resultat: *Ist der Rang von A (bzw. B) grösser als 2, so geht die Ungleichung (23) nur dann in eine Gleichung über, wenn B (bzw. A) die Nullmatrix ist.*

§ 5.

Der Khintchinesche Satz.

Wählt man in der Ungleichung (23) bei beliebigem A für B diejenige Matrix, deren Koeffizienten $b_{\varkappa\lambda}$ sämtlich gleich 1 sind, so erhält man für

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda}, \quad k_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\lambda}, \quad a = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} a_{\varkappa\lambda}, \quad t = \sum_{\varkappa,\lambda} |a_{\varkappa\lambda}|^2$$

speziell

$$\vartheta(AB) = n \sum_{\varkappa=1}^{n} |z_\varkappa|^2, \quad \vartheta(BA) = n \sum_{\varkappa=1}^{n} |k_\lambda|^2, \quad \sigma(AB) = a, \quad \vartheta(B) = n^2.$$

Unsere Ungleichung liefert daher für jede Matrix A

$$(34) \qquad n \sum_{\varkappa=1}^{m} |z_\varkappa|^2 + n \sum_{\lambda=1}^{n} |k_\lambda|^2 \leqq n^2 t + |a|^2$$

Sind insbesondere alle $a_{\varkappa\lambda}$ gleich Null oder Eins, so wird $t = a$, also geht (34) nach Division durch n in die in der Einleitung angegebene Khintchinesche Ungleichung über.

Nimmt man, wie das den von Herrn Khintchine in seinem speziellen Fall gemachten Voraussetzungen entspricht, insbesondere an, dass die Matrix A nur in den $m < n$ ersten Zeilen von 0 verschiedene Grössen enthält, so gilt sogar die präzisere Ungleichung

$$m \sum_{\varkappa=1}^{n} |z_\varkappa|^2 + n \sum_{\lambda=1}^{n} |k_\lambda|^2 \leqq m n t + |a|^2.$$

Man erhält dies, indem man in der Ungleichung (23) für B die Matrix wählt, die in den m ersten Kolonnen lauter Einsen, in den $n - m$ letzten lauter Nullen enthält.

Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung.

Dem Gedächtnis von Leon Lichtenstein gewidmet

von

Alexander Ostrowski

in Basel

Inhaltsübersicht

Literaturzusammenstellung 372
Einleitung 374

Kapitel I. **Anwendung der Eigenschaften harmonischer Funktionen im Halbstreifen.** 380

§ 1. *Argumentschwankung in der Nähe eines Randpunktes.* Sätze I—III, Nr. 1—6. 380

§ 2. *Beschränkte harmonische Funktionen im Halbstreifen.* Sätze IV—VII, Nr. 7—9. 391

§ 3. *Allgemeines über Winkeltreue und Winkelproportionalität am Rande.* Sätze VIII—XVI, Nr. 10—16. 402

Kapitel II. **Der Hauptsatz über Winkeltreue und Winkelproportionalität am Rande.** 412

§ 4. *Der konforme Winkel.* Sätze XVII—XXIII, Nr. 17—19. 412

§ 5. *Ungleichungen für konforme Massè.* Sätze XXIV—XXX, Nr. 20—25. 422

§ 6. *Der Hauptsatz über die Winkelproportionalität am Rande bei konformer Abbildung.* Sätze XXXI—XXXIII, Hauptsatz (XXXIII), Nr. 26—29. 440