Sur un théorème de M. Szegö

par

S. Bernstein.

Dans son Mémoire*) „Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein", M. Szegö a etabli la proposition générale suivante:

Si on a pour toute valeur réelle de θ

$$\varphi(\theta) = \lambda_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \cos \nu\theta \geqslant 0 \tag{1}$$

et

$$|f(\theta)| \leqq A, \quad \text{où } f(\theta) = a_0 + \theta_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \ldots$$
$$+ a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \tag{2}$$

on aura aussi pour toute valeur réelle de θ

$$\left[\sum_1^n \lambda_{n-\nu}(a_v \cos\nu\theta + b_v \sin\nu\theta)\right]^2$$
$$+ \left[\sum_1^n \lambda_{n-\nu}(b_\nu \cos\nu\theta - a_\nu \sin\nu\theta)\right]^2 \leqslant \lambda_0^2 A^2. \tag{3}$$

Observons que l'inégalité (3) est équivalente à l'inégalité

$$\left|\sum_1^n \lambda_{n-\nu}\left[a_\nu \cos(\nu\theta + \alpha) + b_\nu \sin(\nu\theta + \alpha)\right]\right| \leqq \lambda_0 A = M \tag{4}$$

*) Schriften des Königsberger Gelehrten Gesellschaft. 1928.

pour α quelconque. Remarquons aussi que le signe d'égalité dans (3) ou (4) a lieu, lorsque $a_k = b_k = 0$ pour $k < n$ et $a_n^2 + b_n^2 = A^2$. Ainsi le théorème de M. Szegö est équivalent au suivant: *parmi les fonctions* $f(\theta)$ *dont les coefficients satisfont à l'inégalité* (4) *pour toute valeur réelle de* θ *et* α, *où les nombres* λ *satisfont à* (1), *la fonction***) $A \cos(n\theta + \beta)$ *(pour* β *quelconque) qui atteint son extremum absolu en* $2n$ *points s'écarte le moins possible de zéro pour toute valeur de* θ; *l'écart minimum est donc* $A = \frac{M}{\lambda_0}$.

Je me propose de généraliser un peu ce beau théorème et en donner une nouvelle démonstration fondée sur la théorie classique de la meilleure approximation.

En supposant que pour une paire de valeurs données de α et θ_0 on a

$$\sum_{\nu=0}^{n} \Big\{ \lambda_{n-\nu} [a_\nu \cos(\nu\theta_0 + \alpha) + b_\nu \sin(\nu\theta_0 + \alpha)] + \mu_{n-\nu} [b_\nu \cos(\nu\theta_0 + \alpha) - a_n \sin(\nu\theta_0 + \alpha)] = M \tag{5}$$

où $\mu_0 = \mu_\lambda = 0$, je me propose d'abord d'établir *les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent être assujetties les constantes* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n, \mu_1, \ldots \mu_{n-1}$ *pour que la fonction* $f_0(\theta)$, *dont les coefficients satisfont à* (5) *qui s'écarte le moins possible de zéro entre toutes les fonctions* $f(\theta)$ *satisfaisant à* (5), *atteigne son extremum absolu en* $2n$ *points.*

A cet effet, commençons par observer que, si les coefficients a_k, b_k de la fonction $f(\theta)$ satisfont à la condition (5), les coefficients $a_k^1 = a_k \cos k\theta_0 + b_k \sin k\theta_0$, $b_k^1 = b_k \cos k\theta_0 - a_k \sin k\theta_0$ de la fonction $f(\theta + \theta_0)$ satisferont à la condition

$$\sum_{\nu=0}^{n} \Big\{ \lambda_{n-\nu} [a_\nu^1 \cos\alpha + b_\nu^1 \sin\alpha] + \mu_{n-\nu} [b_\nu^1 \cos\alpha - a_\nu^1 \sin\alpha] \Big\} = M \tag{5bis}$$

Il suffira donc d'examiner le cas, où $\theta_0 = 0$. Or, si l'extremum absolu de $f_0(\theta)$ est atteint en $2n$ points, puisqu'on a alors $a_\nu = b_\nu = 0$ pour $\nu < n$, la fonction $f_0(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ satisfera à la condition

$$\lambda_0 [a_n \cos\alpha + b_n \sin\alpha] = M,$$

de sorte que (en ajoutant la condition que $a_n^2 + b_n^2$ doit être minimum) on a

$$f_0(\theta) = \frac{M}{\lambda_0} \cos(n\theta - \alpha) \tag{6}$$

**) Sans affirmer, bien entendu, que c'est la forme unique possible.

Les $2n$ points d'écart de $f_0(\theta)$ seront donc

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}, \text{ où } k = 0, 1, \ldots 2n-1.$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f_0(\theta)$ s'écarte le moins possible de zéro consiste en ce qu'il soit impossible de construire une fonction

$$F(\theta) = A_n \cos(n\theta - \alpha) + B_n \sin(n\theta - \alpha) + \ldots + A_1 \cos(\theta - \alpha) + B_1 \sin(\theta - \alpha) + A_0$$

telle que $(-1)^k F(\varphi_k) > 0$ et qu'on ait en même temps

$$\sum_{\nu=0}^{n} \Big\{ \lambda_{n-\nu} [(A_\nu \cos\alpha - B_\nu \sin\alpha)\cos\alpha + (A_\nu \sin\alpha + B_\nu \cos\alpha)\sin\alpha] + \mu_{n-\nu} [(A_\nu \sin\alpha + B_\nu \cos\alpha)\cos\alpha + (B_\nu \sin\alpha - A_\nu \cos\alpha)\sin\alpha]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [\lambda_{n-\nu} A_\nu + \mu_{n-\nu} B_\nu] + A_0 \cos\alpha = 0$$

En d'autres termes, *il est nécessaire et suffisant que, quels que soient les nombres* $M_k > 0$, le système d'équations

$$A_n \lambda_0 + A_{n-1}\lambda_1 + B_{n-1}\mu_1 + \ldots + B_1 \mu_{n-1} + A_0 \lambda_n \cos\alpha = 0$$

$$A_n \cos(n\varphi_k - \alpha) + A_{n-1} \cos(\overline{n-1}\,\varphi_k - \alpha) + \ldots B_1 \sin(\varphi_k - \alpha) + A_0 = M_k (-1)^k, \tag{7}$$

où $k = 0, 1 \ldots 2n-1$, (B_n ne figure pas, car $\mu_0 = 0$ et $\sin(n\varphi_k - \alpha) = \sin k\pi = 0$) *soit incompatible.* Or, pour celà il faut et il suffit que, quelles que soient les grandeurs $M_k > 0$, le déterminant d'ordre $2n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \mu_{n-1} & \lambda_n \cos\alpha & 0 \\ \cos(n\varphi_0 - \alpha) & \cos(\overline{n-1}\,\varphi_0 - \alpha) & \ldots & \sin(\varphi_0 - \alpha) & 1 & M_0 \\ \cos(n\varphi_1 - \alpha) & \cos(\overline{n-1}\,\varphi_1 - \alpha) & \ldots & \sin(\varphi_1 - \alpha) & 1 & -M_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(n\varphi_{2n-1} - \alpha) & \cdot & \ldots & \sin(\varphi_{2n-1} - \alpha) & 1 & -M_{2n-1} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, c'est à dire que tous les mineurs relatifs aux éléments (non nuls) de la dernière colonne soient de même signe. En désignant par Δ_k le mineur relatif à l'élément $(-1)^k M_k$, nous avons

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \lambda_n \cos\alpha \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ \cos(n\varphi_{\varkappa-1}-\alpha) & . & . & \cdots & \sin(\varphi_{\varkappa-1}-\alpha) & 1 \\ \cos(n\varphi_{\varkappa+1}-\alpha) & . & . & \cdots & \sin(\varphi_{\varkappa+1}-\alpha) & 1 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ \cos(n\varphi_{2n-1}-\alpha) & . & . & \cdots & . & 1 \end{vmatrix}$$

$$= l_0^{(k)}\lambda_0 + l_1^{(k)}\lambda_1 + m_1^{(k)}\mu_1 + \ldots \; m_{n-1}^{(k)}\mu_{n-1} + l_n^{(k)}\lambda_n \cos\alpha$$

Pour calculer les coefficients $l_i^{(k)}$, $m_i^{(k)}$ observons que, si on remplace les éléments λ_{n-i}, μ_{n-i} (où $i > s$) de la première ligne de Δ_k par $\cos(i\varphi - \alpha)$ et $\sin(i\varphi - \alpha)$, respectivement et $\lambda_n \cos\alpha$ par 1, il se réduit à

$$P_k(\varphi) = l_0^{(k)} \cos(n\varphi - \alpha) + l_1^{(k)} \cos(\overline{n-1}\,\varphi - \alpha)$$

$$+ m_1^{(k)} \sin(\overline{n-1}\,\varphi - \alpha) + \ldots + m_{n-1}^{(k)} \sin(\varphi - \alpha) + l_n^{(k)} \tag{9}$$

où $P_k(\varphi_h) = 0$, lorsque $h \gtrless k$. Par conséquent,

$$P_k(\varphi) = C_k \frac{\sin n(\varphi - \varphi^k)\cos\dfrac{\varphi - \varphi_k}{2}}{\sin\dfrac{\varphi - \varphi_k}{2}} + B_k \sin n(\varphi - \varphi_k) \tag{10}$$

où C_k et B_k sont des constantes. D'ailleurs, puisque $(-1)^k P_k(\varphi_k)$ ne dépend pas de k, on aura $C_k = (-1)^k C$, où C ne dépend pas de k. En remarquant que

$$\frac{\sin n\theta \cos\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \cos n\theta + 2\cos(n-1)\theta + \ldots + 2\cos\theta + 1$$

et en identifiant les deux expressions (10) et (9), nous voyons que

$$l_0^{(k)} \cos(n\varphi - \alpha) = C_k \cos n(\varphi - \varphi_k) + B_k \sin n(\varphi - \varphi_h)$$

$$= C\cos(n\varphi - \alpha) + (-1)^k B_k \sin(n\varphi - \alpha),$$

donc $B_k = 0$ et $l_0^{(k)} = C$; de même, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$l_{n-i}^{(k)} \cos(i\varphi - \alpha) + m_{n-i}^{(k)} \sin(i\varphi - \alpha) = 2C_k \cos i(\varphi - \varphi_k)$$

donc

$$l_{n-i}^{(k)} \cos\alpha - m_{n-i}^{(k)} \sin\alpha = 2C_k \cos i\varphi_k$$

$$l_{n-i}^{(k)} \sin\alpha + m_{n-i}^{(k)} \cos\alpha = 2C_k \sin i\varphi_k,$$

d'où

$$l_{n-i}^{(k)} = 2C_k(\cos\alpha \cos i\varphi_k + \sin\alpha \sin i\varphi_k)$$

$$= 2C_k \cos(\alpha - i\varphi_k) = 2C\cos(n-i)\varphi_k$$

$$m_{n-i}^{(k)} = 2C(\cos\alpha \sin i\varphi_k - \sin\alpha \cos i\varphi_k)$$

$$= 2C_k \sin(i\varphi_k - \alpha) = -2C\sin(n-i)\varphi_k$$

et, enfin,

$$l_n^{(k)} = C_k = (-1)^k C.$$

Par conséquent, en substituant les valeurs trouvées de $l_i^{(k)}$, $m_i^{(k)}$ dans (8) nous arrivons ainsi finalement à la conclusion suivante: *Pour que la fonction $f(\theta)$ qui parmi toutes les fonctions satisfaisant à (5) s'écarte le moins possible de zéro soit de la forme $f_0(\theta) = \alpha_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ $\left(\text{dont l'écart est } \dfrac{M}{\lambda_0}\right)$ il faut et il suffit que la somme* (où $\lambda_0 > 0$)

$$\lambda_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i \cos i\varphi_k - \mu_i \sin i\varphi_k) + (-1)^k \lambda_n \cos\alpha \geqslant 0 \tag{11}$$

soit non négative pour toutes les valeurs $\varphi_k = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{k\pi}{n}$ où $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Nous pouvons donc formuler, en tenant compte de la remarque faite au début, le théorème suivant:

Si $|\, f(\theta) \,| = a_0 + \theta, \cos\theta + b_1 \sin\theta + \ldots + \alpha_v \cos n\theta + b_n \sin n\theta \,| \leqslant A\ (2^{bi})$ pour toute valeur réelle de θ

la fonction

$$F_\alpha(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} \{\lambda_{n-\nu}[\alpha_\nu \cos(\nu\theta + \alpha) + b_\nu \sin(\nu\theta + \alpha)]$$

$$+ \mu_{n-\nu}[b_v \cos(\nu\theta + \alpha) - \alpha_\nu \sin(\nu\theta + \alpha)]\}, \tag{12}$$

où $\mu_0 = \mu_n = 0$

ne pourra dépasser, (mais pourra atteindre) $M = \lambda_0 A$ *en valeur absolue pour aucune valeur réelle de* θ, *si on a*

$$\lambda_0 + \lambda_n \cos n\varphi_k + 2\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i \cos i\varphi_k - \mu_i \sin i\varphi_k) \geq 0$$

pour $$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \text{ (où } k = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Soit, par exemple, $\alpha = 0$. Alors, sous la condition (2), la fonction

$$F_0(\theta) = \sum_{v=1}^{n} \{ \lambda_{n-\nu} [a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta] + \mu_{n-\nu} [b_\nu \cos \nu\theta - a_\nu \sin \nu\theta] \}$$

pourra atteindre, sans pouvoir la dépasser, la valeur $M = \lambda_0 A$, pourvu que la fonction

$$R(\varphi_k) = \lambda_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i \cos i\varphi_k - \mu_i \sin i\varphi_k) + (-1)^{k}\lambda_n$$

soit *non négative pour* $\varphi_k = \frac{k\pi}{n}$ (où $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$).

Dans le cas, où la fonction $R(\varphi)$ est *non negative, pour toutes les valeurs de* φ, on pourra affirmer que $|F_\alpha(0)| \leqslant \lambda_0 A$ *pour toute valeur de* α. Le théorème de M. Szegö se présente donc comme un cas particulier de notre dernière affirmation, qui correspond à la supposition que $\mu_i = 0$ quel que soit i.

Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge

von

L. Fejér (Budapest) und G. Szegö (St. Louis, Mo.).

In der Arbeit 4[1]) hat der Erste von uns den Begriff der „monotonen Konvergenz" einer Folge von komplexen Zahlen

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

gegen die komplexe Zahl z eingeführt[2]). Es wird darunter die Eigenschaft verstanden, dass die Folge der nichtnegativen Zahlen

$$|z - z_0|, \quad |z - z_1|, \quad |z - z_2|, \ldots, |z - z_n|, \ldots$$

monoton abnehmend (nicht wachsend) gegen Null konvergiert. Besonders interessant gestaltet sich diese Begriffsbildung in dem Spezialfalle von Potenzreihen:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

In dieser Note soll die monotone Konvergenz der Partialsummen von gewissen Klassen von Potenzreihen im Innern des Konvergenzkreises bewiesen werden, die dadurch charakterisiert sind, dass die Koeffizienten bestimmten Monotonitätsbedingungen genügen. Wenn die Partialsummen mit

$$s_0(z), s_1(z), s_2(z), \ldots, s_n(z), \ldots$$

[1]) Die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende des Textes.
[2]) Vgl. auch 3, § VIII.