Cela étant, posons dans l'expression

$$\frac{1}{\delta_{n+k}} = \frac{\frac{1}{\Delta_1}+\frac{2}{\Delta_2}+\dots+\frac{n}{\Delta_n}}{\binom{n+k+1}{2}} + \frac{\frac{n+1}{\Delta_{n+1}}+\dots+\frac{n+k}{\Delta_{n+k}}}{\binom{n+k+1}{2}}$$

$n = m_1, m_2, \dots$ et $k = k_n$. En vertu de (15) et (16) on a

$$\frac{n+1}{\Delta_{n+1}}+\dots+\frac{n+k}{\Delta_{n+k}} \geq \frac{(n+1)+\dots+(n+k)}{\alpha+\varepsilon}$$

donc

(18) $$\frac{1}{\delta_{n+k}} \geq \frac{\binom{n+1}{2}}{\binom{n+k+1}{2}}\,\frac{1}{\delta_n} + \frac{(n+1)+\dots+(n+k)}{\binom{n+k+1}{2}}\cdot\frac{1}{\alpha+\varepsilon}.$$

Faisons tendre l'indice n vers l'infini par des valeurs $m_1, m_2, \dots$ et k par des valeurs $k_{m_1}, k_{m_2}, \dots$. Les fractions

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{\binom{n+k+1}{2}} = \frac{n\,(n+1)}{(n+k)\,(n+k+1)},$$

$$\frac{(n+1)+\dots+(n+k)}{\binom{n+k}{2}} = 1 - \frac{n\,(n+1)}{(n+k)\,(n+k+1)}$$

tendent, en vertu de (17), respectivement vers

$$\frac{1}{(1+\eta)^2} \quad \text{et} \quad 1-\frac{1}{(1+\eta)^2}$$

donc étant $\delta_n \to D$ on obtient de l'inégalité (18)

$$\frac{1}{D} \geq \frac{1}{(1+\eta)^2}\,\frac{1}{D} + \left[1-\frac{1}{(1+\eta)^2}\right]\cdot\frac{1}{\alpha+\varepsilon}$$

d'où il résulte que

$$\frac{1}{D} \geq \frac{1}{\alpha+\varepsilon}$$

et par conséquent on a $\alpha+\varepsilon \geq D \geq \beta$. Or, cette inégalité a lieu quel que soit $\varepsilon > 0$ donc, étant $\alpha \leq \beta$, on a

$$\alpha = \beta = D,$$

c. q. f. d.

Über mehrfach monotone Folgen.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Dem Andenken an Leon Lichtenstein gewidmet.

Einleitung.

ν, n, k, s, l, m bedeuten stets ganze Zahlen.

$\sum\limits_a^b$ bedeute 0 für $b<a$.

Eine Folge reeller Zahlen

(1) $$A_\nu,\quad 0 \leq \nu \leq n$$

mit

(2) $$A_0 = 0,\quad A_n = 1$$

also $n \geq 1$) heisse k fach monoton für ein k mit $1 \leq k \leq n$, wenn bei jedem s mit $1 \leq s \leq k$ ihre s ten Differenzen sämtlich ≥ 0 sind.

Die Folge heisse vollmonoton, wenn sie n fach monoton ist.

Bekanntlich gibt es bei jeder k fach monotonen Folge für $1 \leq l \leq n$ ein $p_l \geq 0$, so dass

(3) $$A_\nu = \sum_{l=1}^{k-1}\binom{\nu}{l}p_l + \sum_{l=k}^{\nu}\binom{\nu-l+k-1}{k-1}p_l \quad \text{für } 1 \leq \nu \leq n.$$

Für jede Folge von $n+1$ reellen Zahlen (1) mit (2) werde

$$D(A)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\right)^2$$

gesetzt.

Es sei E_n für $n\geqq 1$ das Maximum von $D(A)$ bei allen vollmonotonen Folgen von $n+1$ Zahlen, $E_n(k)$ für $n\geqq k\geqq 1$ das Maximum von $D(A)$ für alle k fach monotonen Folgen von $n+1$ Zahlen.

In meiner Arbeit *Über einige Ungleichungen von Herrn G. Grüss* [Bd. 39 (1935) der von L. Lichtenstein begründeten Mathematischen Zeitschrift, S. 742—744] bewies ich für die vollmonotonen Folgen

$$D(A)\leqq\frac{4}{45}+\frac{1}{n}. \tag{4}$$

Da für die vollmonotone Folge

$$A_\nu=\frac{\nu^2}{n^2},\quad 0\leqq\nu\leqq n,$$

bei $n\longrightarrow\infty$

$$D(A)=\frac{1}{n^5}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^4-\frac{1}{n^6}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2\right)^2\longrightarrow\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}$$

ist, ergibt sich

$$\lim_{n=\infty}E_n=\frac{4}{45}.$$

(4) enthält $(n\longrightarrow\infty)$ den Grüssschen Satz: Ist $f(x)$ für $0\leqq x\leqq 1$ reell und stetig, und ist die Folge

$$f\left(\frac{\nu}{n}\right),\quad 0\leqq\nu\leqq n, \tag{5}$$

für jedes $n\geqq 1$ vollmonoton, so ist

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx-\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\leqq\frac{4}{45}. \tag{6}$$

Statt der Stetigkeit genügte für diesen Beweis von (6) natürlich eigentliche R—Integrabilität.

Mein heutiges Hauptresultat wird $(n\longrightarrow\infty)$ sofort liefern, dass statt der Vollmonotonie der Folge (5) ihre vierfache Monotonie für alle $n\geqq 4$ ausreicht, um (6) zu erschliessen.

Und damit höre ich auf, von Integralungleichungen zu sprechen, und überlasse dem Leser die entsprechende Übertragung der kommenden Summensätze.

Zu meiner gegenwärtigen Untersuchung regte mich ein Brief an, den Herr von Mises mir am 2. April d. J. sandte. Er teilte mir einen (auf Maximalbetrachtungen beruhenden) Beweis von

$$\lim_{n=\infty}E_n(2)=\frac{1}{9}$$

mit (den ich zur Vorbereitung auf §§ 2—3 in § 1 durch einen anderen ersetzen werde).

Andererseits ist trivialerweise

$$\lim_{n=\infty}E_n(1)=\frac{1}{4}$$

(Analogon zu einem anderen, auch in meiner vorigen Arbeit besprochenen Satz von Herrn Grüss). Denn

1) $D(A)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\right)^2-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(1-A_\nu)\leqq\frac{1}{4}$.

2) In der zulässigen Folge

$$A_\nu=\begin{cases}0 \text{ für } 0\leqq\nu<\frac{n}{2},\\ 1 \text{ für } \frac{n}{2}\leqq\nu\leqq n\end{cases}$$

ist bei $n\longrightarrow\infty$

$$D(A)=\frac{1}{n}\sum_{\frac{n}{2}\leqq\nu\leqq n}1-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{\frac{n}{2}\leqq\nu\leqq n}1\right)^2\longrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Es werde für $k\geqq 1$

$$L(k)=\overline{\lim_{n=\infty}}\,E_n(k)$$

gesetzt. Dann ist nach dem Gesagten

$$L(1) = \frac{1}{4},$$

$$L(2) = \frac{1}{9}.$$

Da für $n \geqq k+1$ jede $k+1$ fach monotone Folge auch k fach monoton ist, ist

$$E_n(k) \geqq E_n(k+1) \text{ für } n \geqq k+1 \geqq 2,$$

also

$$L(k) \geqq L(k+1) \text{ für } k \geqq 1.$$

Daher ist

$$\lim_{k=\infty} L(k) = L$$

vorhanden.

Für $n \geqq k \geqq 1$ ist

$$E_n(k) \geqq E_n(n) = E_n;$$

aus

$$\lim_{n=\infty} E_n = \frac{4}{45}$$

folgt also für $k \geqq 1$

$$L(k) = \overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n(k) \geqq \underline{\lim_{n=\infty}}\, E_n(k) \geqq \frac{4}{45} \tag{7}$$

und hieraus

$$L \geqq \frac{4}{45}.$$

Es entstand nun für mich die Frage, ob $L(k)$ *beständig fallend* gegen L strebt. Die starke Abnahme von

$$L(1) = \frac{1}{4} = \frac{225}{900},$$

$$L(2) = \frac{1}{9} = \frac{100}{900},$$

$$L(3) = \frac{9}{100} = \frac{81}{900} \quad \text{(Beweis in § 2)}$$

bis in die Nähe von

$$\frac{4}{45} = \frac{80}{900}$$

spricht nicht gegen diese Möglichkeit.

Mein Hauptergebnis ist, dass jene Frage überraschenderweise zu verneinen ist. Es ist

$$L(4) \leqq \frac{4}{45} \text{ (Beweis in § 3)},$$

also

$$L(k) = \frac{4}{45} = L \text{ für } k \geqq 4. \tag{8}$$

Übrigens ist nach (7) und (8) für $k \geqq 4$

$$\lim_{n=\infty} E_n(k) = L(k); \tag{9}$$

(9) gilt nach dem Obigen für $1 \leqq k \leqq 2$ und wird in § 3 auch für $k = 3$ bewiesen.

§ 1.

k = 2.

1) Nach (3) ist für $1 \leqq \nu \leqq n$

$$A_\nu = \sum_{l=1}^{\nu} (\nu - l + 1) p_l,$$

also

$$A_\nu^2 = \sum_{l,m=1}^{\nu} p_l p_m (\nu - l + 1)(\nu - m + 1),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu^2 = \sum_{l,m=1}^{n-1} p_l p_m \sum_{\nu=\mathrm{Max}(l,m)}^{n-1} (\nu - l + 1)(\nu - m + 1).$$

Hierin ist

$$\left(\sum_{\nu=\mathrm{Max}(l,m)}^{n-1} (\nu - l + 1)(\nu - m + 1)\right)^2 \leqq \sum_{\nu=l}^{n-1} (\nu - l + 1)^2 \cdot \sum_{\nu=m}^{n-1} (\nu - m + 1)^2$$

$$= \sum_{g=1}^{n-l} g^2 \cdot \sum_{g=1}^{n-m} g^2 \leqq \frac{1}{3^2} (n - l + 1)^3 (n - m + 1)^3;$$

daher ist

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu^2$$

$$\leqq \frac{1}{n} + \sum_{l,m=1}^{n} p_l p_m \frac{((n-l+1)(n-m+1))^{\frac{3}{2}}}{3n}. \tag{10}$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} A_n^2 = \sum_{l,m=1}^{n} p_l p_m \frac{(n-l+1)(n-m+1)}{9} \tag{11}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = \sum_{l=1}^{n} p_l \sum_{\nu=l}^{n} (\nu-l+1) = \sum_{l=1}^{n} p_l \sum_{g=1}^{n-l+1} g \geqq \sum_{l=1}^{n} p_l \frac{(n-l+1)^2}{2},$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)^2 \geqq \sum_{l,m=1}^{n} p_l p_m \frac{((n-l+1)(n-m+1))^2}{4n^2}. \tag{12}$$

Für reelle x ist

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2}\right)^2 \geqq 0. \tag{13}$$

Aus (10), (11), (12), (13) folgt

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{n} - D(A)$$

$$\geqq \sum_{l,m=1}^{n} p_l p_m n^2 \left(\frac{(n-l+1)(n-m+1)}{9n^2} - \frac{((n-l+1)(n-m+1))^{\frac{3}{2}}}{3n^3}\right.$$

$$\left. + \frac{((n-l+1)(n-m+1))^2}{4n^4}\right)$$

$$= \sum_{l,m=1}^{n} p_l p_m n^2 \varphi\left(\frac{\sqrt{(n-l+1)(n-m+1)}}{n}\right) \geqq 0,$$

$$D(A) \leqq \frac{1}{9} + \frac{1}{n},$$

$$E_n(2) \leqq \frac{1}{9} + \frac{1}{n},$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}} E_n(2) \leqq \frac{1}{9}.$$

2) In der zulässigen Folge $(n \geqq 2)$

$$A_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \nu < \frac{n}{3}, \\ \dfrac{3\frac{\nu}{n} - 1}{2} & \text{für } \frac{n}{3} \leqq \nu \leqq n \end{cases}$$

ist

$$D(A) = \frac{1}{n} \sum_{\frac{n}{3} \leqq \nu \leqq n} \frac{\left(3\frac{\nu}{n} - 1\right)^2}{4} - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{\frac{n}{3} \leqq \nu \leqq n} \frac{3\frac{\nu}{n} - 1}{2}\right)^2;$$

daher ist

$$\underline{\lim_{n=\infty}} E_n(2) \geqq \frac{1}{4}\left(\int_{\frac{1}{3}}^{1} (3\xi - 1)^2 \, d\xi - \left(\int_{\frac{1}{3}}^{1} (3\xi - 1) \, d\xi\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\int_0^2 \eta^2 \, d\eta - \frac{1}{9}\left(\int_0^2 \eta \, d\eta\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{9} - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{9}.$$

§ 2.

$\mathbf{k = 3}$.

1) Nach (3) ist für $1 \leqq \nu \leqq n$

$$A_\nu = \nu p_1 + \sum_{l=2}^{\nu} \binom{\nu - l + 2}{2} p_l \leqq \nu p_1 + \sum_{l=2}^{\nu} \frac{(\nu - l + 2)^2}{2} p_l,$$

also

$$A_\nu^2 \leqq \nu^2 p_1^2 + \nu p_1 \sum_{l=2}^{\nu} (\nu - l + 2)^2 p_l + \frac{1}{4} \sum_{l,m=2}^{\nu} p_l p_m (\nu - l + 2)^2 (\nu - m + 2)^2,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^2 \leqq 3 + \sum_{\nu=1}^{n-3} A_\nu^2$$

$$\leqq 3 + p_1^2 \frac{n^3}{3} + p_1 \sum_{l=2}^{n-3} p_l \sum_{\nu=l}^{n-3} \nu (\nu - l + 2)^2$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{l,m=2}^{n-3} p_l p_m \sum_{\nu=\mathrm{Max}(l,m)}^{n-3} (\nu-l+2)^2(\nu-m+2)^2.$$

Hierin ist

$$\sum_{\nu=l}^{n-3}\nu(\nu-l+2)^2 \leqq \sum_{\nu=l-2}^{n-3}(\nu+2)(\nu-l+2)^2=\sum_{\mu=0}^{n-l-1}(\mu+l)\mu^2$$

$$\leqq\int_0^{n-l}(\eta+l)\,\eta^2\, d\eta = \frac{(n-l)^4}{4}+\frac{l(n-l)^3}{3},$$

$$\left(\sum_{\nu=\mathrm{Max}(l,m)}^{n-3}(\nu-l+2)^2(\nu-m+2)^2\right)^2 \leqq \sum_{\nu=l}^{n-3}(\nu-l+2)^4\cdot\sum_{\nu=m}^{n-3}(\nu-m+2)^4$$

$$\leqq \sum_{g=1}^{n-l-1} g^4\cdot\sum_{g=1}^{n-m-1}g^4 \leqq \frac{1}{5^2}(n-l)^5(n-m)^5;$$

daher ist

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n A_\nu^2 \leqq \frac{3}{n} + p_1^2\frac{n^2}{3}+p_1\sum_{l=2}^n p_l\left(\frac{(n-l)^4}{4n}+\frac{l(n-l)^3}{3n}\right) \\ \qquad + \sum_{l,m=2}^n p_l p_m \frac{\left((n-l)(n-m)\right)^{\frac{5}{2}}}{20n}. \end{cases} \tag{14}$$

Andererseits ist

$$A_\nu \geqq \nu p_1 + \sum_{l=2}^{\nu}\frac{(\nu-l)^2}{2}p_l,$$

$$\frac{9}{100}=\frac{9}{100}A_n^2$$

$$\text{(15)}\ \geqq \frac{9}{100}p_1^2n^2+\frac{9}{100}p_1 n\sum_{l=2}^n p_l(n-l)^2+\frac{9}{400}\sum_{l,m=2}^n p_l p_m(n-l)^2(n-m)^2,$$

$$\sum_{\nu=1}^n A_\nu \geqq p_1\sum_{\nu=1}^n\nu+\frac{1}{2}\sum_{l=2}^n p_l\sum_{\nu=l}^n(\nu-l)^2\geqq p_1\frac{n^2}{2}+\frac{1}{6}\sum_{l=2}^n p_l(n-l)^3,$$

$$\text{(16)}\ \frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=1}^n A_\nu\right)^2 \geqq \frac{p_1^2}{4}n^2+p_1\sum_{l=2}^n p_l\frac{(n-l)^3}{6}+\sum_{l,m=2}^n p_l p_m\frac{(n-l)^3(n-m)^3}{36n^2}.$$

Aus (14), (15), (16) folgt

$$\begin{cases} \frac{9}{100}+\frac{3}{n}-D(A)\geqq p_1^2 n^2\left(\frac{9}{100}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \\ +p_1\sum_{l=2}^n p_l n(n-l)^2\left(\frac{9}{100}-\frac{(n-l)^2}{4n^2}-\frac{l(n-l)}{3n^2}+\frac{n-l}{6n}\right) \\ +\sum_{l,m=2}^n p_l p_m (n-l)^2(n-m)^2 \\ \qquad \times\left(\frac{9}{400}-\frac{(n-l)^{\frac{1}{2}}(n-m)^{\frac{1}{2}}}{20n}+\frac{(n-l)(n-m)}{36n^2}\right). \end{cases} \tag{17}$$

Wird hierbei

$$\frac{n-l}{n}=x,$$

$$\frac{(n-l)^{\frac{1}{2}}(n-m)^{\frac{1}{2}}}{n}=y$$

gesetzt, so ist in (17)

$$\frac{9}{100}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{150}\geqq 0,$$

$$\frac{9}{100}-\frac{(n-l)^2}{4n^2}-\frac{l(n-l)}{3n^2}+\frac{n-l}{6n}=\frac{9}{100}-\frac{x^2}{4}-\frac{(1-x)x}{3}+\frac{x}{6}$$

$$=\frac{1}{150}+\frac{1}{12}(1-x)^2\geqq\frac{1}{150}\geqq 0,$$

$$\frac{9}{400}-\frac{(n-l)^{\frac{1}{2}}(n-m)^{\frac{1}{2}}}{20n}+\frac{(n-l)(n-m)}{36n^2}=\frac{9}{400}-\frac{y}{20}+\frac{y^2}{36}$$

$$=\left(\frac{3}{20}-\frac{y}{6}\right)^2\geqq 0.$$

Also ist

$$\frac{9}{100}+\frac{3}{n}-D(A)\geqq 0,$$

$$D(A)\leqq\frac{9}{100}+\frac{3}{n}.$$

$$E_n(3) \leqq \frac{9}{100} + \frac{3}{n},$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\; E_n(3) \leqq \frac{9}{100}.$$

2) In der zulässigen Folge $(n \geqq 3)$

$$A_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \nu < \dfrac{n}{10}, \\ \dfrac{\left(10\dfrac{\nu}{n} - 1\right)^2}{9^2} & \text{für } \dfrac{n}{10} \leqq \nu \leqq n \end{cases}$$

ist

$$D(A) = \frac{1}{n} \sum_{\frac{n}{10} \leqq \nu \leqq n} \frac{\left(10\frac{\nu}{n} - 1\right)^4}{9^4} - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{\frac{n}{10} \leqq \nu \leqq n} \frac{\left(10\frac{\nu}{n} - 1\right)^2}{9^2} \right)^2;$$

daher ist

$$\underline{\lim_{n=\infty}}\; E_n(3) \geqq \frac{1}{9^4} \left(\int_{\frac{1}{10}}^{1} (10\,\xi - 1)^4 \, d\xi - \left(\int_{\frac{1}{10}}^{1} (10\,\xi - 1)^2 \, d\xi \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{9^4} \left(\frac{1}{10} \int_0^9 \eta^4 \, d\eta - \frac{1}{10^2} \left(\int_0^9 \eta^2 \, d\eta \right)^2 \right) = \frac{1}{9^4} \left(\frac{9^5}{5 \cdot 10} - \frac{9^5}{10^2} \right) = \frac{9}{100}.$$

§ 3.

k = 4.

Um den Gang nicht zu unterbrechen, schicke ich sechs Hilfsbetrachtungen voraus.

I) Für $3 \leqq l \leqq n-4$, $h \geqq 0$ ist

$$\sum_{\nu=l}^{n-4} \nu^h (\nu - l + 3)^3 \leqq \sum_{\nu=l-3}^{n-4} (\nu + 3)^h (\nu - l + 3)^3 = \sum_{\mu=0}^{n-l-1} (\mu + l)^h \mu^3$$

$$\leqq \int_0^{n-l} (\eta + l)^h \eta^3 \, d\eta;$$

also ($h = 1$ und $h = 2$)

$$\sum_{\nu=l}^{n-4} \nu (\nu - l + 3)^3 \leqq \int_0^{n-l} (\eta^4 + l\,\eta^3) \, d\eta = \frac{(n-l)^5}{5} + \frac{l\,(n-l)^4}{4},$$

$$\sum_{\nu=l}^{n-4} \nu^2 (\nu - l + 3)^3 \leqq \int_0^{n-l} (\eta^5 + 2\,l\,\eta^4 + l^2\,\eta^3) \, d\eta$$

$$= \frac{(n-l)^6}{6} + \frac{2\,l\,(n-l)^5}{5} + \frac{l^2\,(n-l)^4}{4}.$$

II) Für $3 \leqq l \leqq n-4$, $3 \leqq m \leqq n-4$ ist

$$\left(\sum_{\nu=\text{Max}(l,m)}^{n-4} (\nu - l + 3)^3 (\nu - m + 3)^3 \right)^2 \leqq \sum_{\nu=l}^{n-4} (\nu - l + 3)^6 \cdot \sum_{\nu=m}^{n-4} (\nu - m + 3)^6$$

$$\leqq \sum_{g=1}^{n-l-1} g^6 \cdot \sum_{g=1}^{n-m-1} g^6 \leqq \frac{1}{7^2} (n-l)^7 (n-m)^7,$$

$$\sum_{\nu=\text{Max}(l,m)}^{n-4} (\nu - l + 3)^3 (\nu - m + 3)^3 \leqq \frac{1}{7} \left((n-l)(n-m) \right)^{\frac{7}{2}}.$$

III) Aus

$$\xi \geqq \eta - \zeta, \quad \eta \geqq 0$$

folgt

$$\xi^2 + 2\,\xi\,\zeta + \zeta^2 = (\xi + \zeta)^2 \geqq \eta^2,$$

$$\xi^2 \geqq \eta^2 - \zeta\,(2\,\xi + \zeta).$$

IV) Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist

$$\chi(x) = \frac{4}{135} - \frac{x^2}{15} - \frac{(1-x)\,x}{12} + \frac{x}{24}$$

$$= \frac{1}{216} + \frac{(1-x)\,(3-2\,x)}{120} \geqq 0,$$

V) Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist

$$\psi(x) = \frac{2}{135} - \frac{x^3}{36} - \frac{(1-x)\,x^2}{15} - \frac{(1-x)^2\,x}{24} + \frac{x}{72}$$

$$= \frac{1}{1080} + \frac{(1-x)^2}{72} + \frac{(1-x)\,x^2}{360} \geqq 0.$$

VI) Für reelles x ist

$$\omega(x) = \frac{1}{405} - \frac{x}{252} + \frac{x^2}{576} \geqq \frac{1}{441} - \frac{x}{252} + \frac{x^2}{576} = \left(\frac{1}{21} - \frac{x}{24}\right)^2 \geqq 0.$$

Nun beginnt der Beweis von

$$L(4) \leqq \frac{4}{45}.$$

Aus $n \geqq 4 \geqq 2$ folgt

$$n - 1 \geqq \frac{n}{2}.$$

Nach (3) ist

$$A_\nu = \nu p_1 + \binom{\nu}{2} p_2 + \sum_{l=3}^{\nu} \binom{\nu - l + 3}{3} p_l \leqq \nu p_1 + \frac{\nu^2}{2} p_2 + \sum_{l=3}^{\nu} \frac{(\nu - l + 3)^3}{6} p_l,$$

$$A_\nu^2 \leqq \nu^2 p_1^2 + \nu^3 p_1 p_2 + \frac{\nu^4}{4} p_2^2 + \frac{1}{3} p_1 \sum_{l=3}^{\nu} \nu(\nu - l + 3)^3 p_l$$

$$+ \frac{1}{6} p_2 \sum_{l=3}^{\nu} \nu^2 (\nu - l + 3)^3 p_l + \frac{1}{36} \sum_{l,\,m=3}^{\nu} p_l p_m (\nu - l + 3)^3 (\nu - m + 3)^3,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^2 \leqq \frac{4}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-4} A_\nu^2$$

$$\leqq \frac{4}{n} + \frac{1}{n} p_1^2 \frac{n^3}{3} + \frac{1}{n} p_1 p_2 \frac{n^4}{4} + \frac{1}{n} p_2^2 \frac{n^5}{20} + \frac{1}{3n} p_1 \sum_{l=3}^{n-4} p_l \sum_{\nu=l}^{n-4} \nu(\nu - l + 3)^3$$

$$+ \frac{1}{6n} p_2 \sum_{l=3}^{n-4} p_l \sum_{\nu=l}^{n-4} \nu^2 (\nu - l + 3)^3$$

$$+ \frac{1}{36n} \sum_{l,\,m=3}^{n-4} p_l p_m \sum_{\nu=\mathrm{Max}(l,\,m)}^{n-4} (\nu - l + 3)^3 (\nu - m + 3)^3.$$

also nach I) und II)

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^2 \leqq{}& \frac{4}{n} + p_1^2 \frac{n^2}{3} + p_1 p_2 \frac{n^3}{4} + p_2^2 \frac{n^4}{20} \\ &+ p_1 \sum_{l=3}^{n} p_l \left(\frac{(n-l)^5}{15n} + \frac{l(n-l)^4}{12n}\right) \\ &+ p_2 \sum_{l=3}^{n} p_l \left(\frac{(n-l)^6}{36n} + \frac{l(n-l)^5}{15n} + \frac{l^2(n-l)^4}{24n}\right) \\ &+ \sum_{l,m=3}^{n} p_l p_m \frac{(n-l)^{\frac{7}{2}} (n-m)^{\frac{7}{2}}}{252n}. \end{aligned}\right.$$

Andererseits ist für $1 \leqq \nu \leqq n$

$$(19)\qquad A_\nu \geqq \nu p_1 + \frac{\nu(\nu-1)}{2} p_2 + \sum_{l=3}^{\nu} \frac{(\nu-l)^3}{6} p_l.$$

Aus (19) folgt zunächst

$$1 = A_n \geqq n p_1 + \frac{n(n-1)}{2} p_2 + \sum_{l=3}^{n} \frac{(n-l)^3}{6} p_l,$$

$$1 \geqq \frac{n(n-1)}{2} p_2 \geqq \frac{n^2}{4} p_2.$$

$$(20)\qquad \frac{n p_2}{2} \leqq \frac{2}{n}.$$

also nach III) $\left(\text{mit } \xi = 1,\ \zeta = \frac{2}{n},\ \zeta(2\xi + \zeta) \leqq \frac{2}{n}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{n}\right)$

$$1 \geqq \left(n p_1 + \frac{n^2}{2} p_2 + \sum_{l=3}^{n} \frac{(n-l)^3}{6} p_l\right)^2 - \frac{5}{n}$$

$$= n^2 p_1^2 + n^3 p_1 p_2 + \frac{n^4}{4} p_2^2 + \frac{n p_1}{3} \sum_{l=3}^{n} (n-l)^3 p_l$$

$$+\frac{n^2 p_2}{6}\sum_{l=3}^{n}(n-l)^3 p_l + \sum_{l,m=3}^{n} p_l p_m \frac{(n-l)^3 (n-m)^3}{36} - \frac{5}{n},$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{4}{45} > {} & p_1^2 \frac{4n^2}{45} + p_1 p_2 \frac{4n^3}{45} + p_2^2\frac{n^4}{45} + \frac{4np_1}{135}\sum_{l=3}^{n} (n-l)^3 p_l \\ & + \frac{2n^2p_2}{135}\sum_{l=3}^{n} (n-l)^3 p_l + \sum_{l,m=3}^{n} p_l p_m \frac{(n-l)^3(n-m)^3}{405} - \frac{1}{n}.\end{aligned}\right.$$

Aus (19) und (20) folgt ferner für $1 \leqq \nu \leqq n$

$$A_\nu \geqq \nu p_1 + \frac{\nu^2}{2}p_2 + \sum_{l=3}^{\nu}\frac{(\nu-l)^3}{6}p_l - \frac{2}{n};$$

daher ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \geqq p_1\frac{n^2}{2} + p_2\frac{n^3}{6} + \sum_{l=3}^{n} \frac{p_l}{6}\sum_{\nu=l}^{n} (\nu-l)^3 - 2,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \geqq p_1\frac{n}{2} + p_2\frac{n^2}{6} + \sum_{l=3}^{n} \frac{p_l}{24n}(n-l)^4 - \frac{2}{n},$$

also nach III) $\left(\text{mit } \xi = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \leqq 1,\ \zeta = \frac{2}{n}\right)$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu\right)^2 \geqq \left(p_1\frac{n}{2}+p_2\frac{n^2}{6}+\sum_{l=3}^{n}\frac{p_l}{24n}(n-l)^4\right)^2-\frac{5}{n}$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} & = p_1^2\frac{n^2}{4} + p_1 p_2\frac{n^3}{6} + p_2^2\frac{n^4}{36} + p_1\sum_{l=3}^{n}\frac{p_l}{24}(n-l)^4 \\ & + p_2\frac{n}{3}\sum_{l=3}^{n}\frac{p_l}{24}(n-l)^4 + \sum_{l,m=3}^{n} p_l p_m\frac{(n-l)^4(n-m)^4}{576n^2} - \frac{5}{n}.\end{aligned}\right.$$

Aus (18), (21), (22) folgt unter Benutzung von IV), V), VI)

$$\begin{aligned}\frac{4}{45}+\frac{10}{n} - D(A) > {} & n^2p_1^2\left(\frac{4}{45}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+n^3p_1p_2\left(\frac{4}{45}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) \\ & + n^4p_2^2\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{20}+\frac{1}{36}\right) \\ & + p_1\sum_{l=3}^{n} p_l(n-l)^3 n\left(\frac{4}{135}-\frac{(n-l)^2}{15n^2}-\frac{l(n-l)}{12n^2}+\frac{n-l}{24n}\right) \\ & + p_2\sum_{l=3}^{n} p_l(n-l)^3n^2\left(\frac{2}{135}-\frac{(n-l)^3}{36n^3}-\frac{l(n-l)^2}{15n^3}-\frac{l^2(n-l)}{24n^3}+\frac{n-l}{72n}\right) \\ & + \sum_{l,m=3}^{n} p_lp_m(n-l)^3(n-m)^3\left(\frac{1}{405}-\frac{\sqrt{(n-l)(n-m)}}{252n}+\frac{(n-l)(n-m)}{576n^2}\right) \\ = {} & \frac{n^2p_1^2}{180}+\frac{n^3p_1p_2}{180}+p_1\sum_{l=3}^{n} p_l(n-l)^3 n\,\chi\left(\frac{n-l}{n}\right) \\ & + p_2\sum_{l=3}^{n} p_l(n-l)^3n^2\,\psi\left(\frac{n-l}{l}\right) \\ & + \sum_{l,m=3}^{n} p_lp_m(n-l)^3(n-m)^3\,\omega\left(\frac{\sqrt{(n-l)(n-m)}}{n}\right) \geqq 0.\end{aligned}$$

$$D(A) < \frac{4}{45}+\frac{10}{n},$$

$$E_n(4) < \frac{4}{45}+\frac{10}{n},$$

$$L(4) = \overline{\lim_{n=\infty}}\, E_n(4) \leqq \frac{4}{45}.$$

Berlin, den 10. Mai 1935.