Remarque sur le diamètre transfini d'un ensemble de points de l'espace.

par

F. Leja.

Warszawa.

1. La notion du diamètre transfini d'un ensemble plan introduite par M. Fekete[1]) a été étendue à des ensembles situés dans l'espace à trois dimensions par MM. G. Pólya et G. Szegö[2]). Voici la définition donnée par MM. Pólya et Szegö:

Soit E un ensemble fermé et borné de points de l'espace et

$$p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_n \tag{1}$$

$n+1$ points quelconques de cet ensemble. La distance de deux points p et q étant désignée par $|pq|$ posons[3])

$$D(p_0, p_1, \ldots, p_n) = \binom{n+1}{2} : \left(\sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{1}{|p_j p_k|}\right) \tag{2}$$

et soit

$$D_n = \max_{(E)} D(p_0, p_1, \ldots, p_n) \tag{3}$$

la borne supérieure de la fonction $D(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ lorsque, n étant supposé fixe, les points (1) parcourent arbitrairement l'ensemble E. nO

---

[1]) M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koëffizienten (Math. Zeitschr. t. 17, 1923, p. 228—249).

[2]) G. Pólya und G. Szegö: Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen (Journal für Mathem. t. 165, 1931, p. 4—49).

[3]) Soit $D(p_0, p_1, \ldots, p_n) = 0$ s'il existe des points coincidant parmi p_0 $p_1, \ldots, p_n$.

démontre facilement que la suite $\{D_n\}$ n'est pas croissante et par suite elle tend vers une limite

$$\lim D_n = D \tag{4}$$

dite le diamétre transfini de E. Cette limite est non négative et ne surpasse pas le diamètre proprement dit de E car on a $D_n \leqq D_1 = \max\limits_{(E)} |p_0\, p_1| = d$, où d est le diamètre (proprement dit) de E.

2. Formons pour $j = 0, 1, \ldots, n$ l'expression que voici [4]):

$$\Delta_n^{(j)}(p_0, \ldots, p_n) = n : \left(\frac{1}{|p_j\, p_0|} + \ldots + \frac{1}{|p_j\, p_{j-1}|} + \frac{1}{|p_j\, p_{j+1}|} + \ldots + \frac{1}{|p_j\, p_n|} \right) \tag{5}$$

et désignons par

$$\Delta_n = \max_{(E)} \left\{ \min_{(j)} \Delta_n^{(j)}(p_0, \ldots, p_n) \right\} \tag{6}$$

la borne supérieure du plus petit des nombres $\Delta_n^{(0)}, \Delta_n^{(1)}, \ldots, \Delta_n^{(n)}$ lorsque les points (1) varient arbitrairement dans l'ensemble E. Observons que la borne Δ_n est un nombre fini car, étant $|p_j\, p_k| \leqq d$, on a

$$0 \leqq \Delta_n^{(j)}(p_0, \ldots, p_n) \leqq n : \frac{n}{d} = d.$$

D'autre part, observons que cette borne est atteinte dans l'ensemble E car E est, par hypothèse, fermé et borné.

Cela posé, je vais démontrer que: *la suite*

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_n, \ldots$$

est convergente et on a

$$\lim \Delta_n = \lim D_n. \tag{7}$$

Démonstration. — D'après la remarque précédente il existe $n+1$ points $q_0, q_1, \ldots, q_n$ de l'ensemble E tels qu'on a

$$\Delta_n = \min_{(j)} \Delta_n^{(j)}(q_0, \ldots, q_n) \leqq \Delta_n^{(j)}(q_0, \ldots, q_n), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

donc

[4]) Posons $\Delta_n^{(j)}(p_0, \ldots, p_n) = 0$ si p_j coïncide avec un des points $p_0, \ldots p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_n$.

$$\frac{1}{\Delta_n} \geqq \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{|q_j\, q_0|} + \ldots + \frac{1}{|q_j\, q_{j-1}|} + \frac{1}{|q_j\, q_{j+1}|} + \ldots + \frac{1}{|q_j\, q_n|} \right) \tag{8}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n$. En ajoutant ces inégalités membre à membre on obtient

$$\frac{n+1}{\Delta_n} \geqq \frac{1}{n} \sum_{j \neq k} \frac{1}{|q_j\, q_k|} = \frac{2}{n} \cdot \binom{n+1}{2} \cdot \frac{1}{D(q_0, \ldots, q_n)}$$

d'où il résulte que

$$\Delta_n \leqq D_n \tag{9}$$

car $D(q_0, \ldots, q_n)$ est au plus égal à D_n. L'inégalité (9) prouve que notre proposition est vraie dans le cas où $\lim D_n = D = 0$. Nous supposerons dons la suite que $D > 0$.

Observons que l'inégalité (8) entraîne la suivante

$$\frac{n}{\Delta_n} \geqq \frac{1}{|q_j\, q_0|} + \frac{n-1}{\Delta_{n-1}^{(j)}(q_1, \ldots, q_n)}$$

ayant lieu pour $j = 1, 2, \ldots, n$ d'où, en tenant compte des inégalités: $|q_j\, q_0| < d$, $\min\limits_{(j)} \Delta_{n-1}^{(j)}(q_1, \ldots, q_n) \leqq \Delta_{n-1}$, on obtient

$$\frac{n}{\Delta_n} \geqq \frac{1}{d} + \frac{n-1}{\Delta_{n-1}}. \tag{10}$$

Considérons maintenant $n+1$ points $p_0, p_1, \ldots, p_n$ de l'ensemble E tels pour lesquels

$$D_n = D(p_0, p_1, \ldots, p_n).$$

Lorsque $n > 1$ on a en vertu de (2) et (5)

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{D_n} = \frac{n}{\Delta_n^{(j)}(p_0, \ldots, p_n)} + \frac{\binom{n}{2}}{D(p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_n)}$$

donc, quel que soit $j = 0, 1, \ldots, n$, on a

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{D_n} \geqq \frac{n}{\Delta_n^{(j)}(p_0, \ldots, p_n)} + \frac{\binom{n}{2}}{D_{n-1}}$$

et par suite

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{D_n} \geqq \frac{n}{\Delta_n} + \frac{\binom{n}{2}}{D_{n-1}}. \tag{11}$$

Si $n = 1$ cette inégalité se réduit à l'équation: $\frac{1}{D_1} = \frac{1}{\Delta_1}$, car on a $\Delta_1 = \max\limits_{(E)} |p_0 p_1| = D_1$. Posons dans (11) $n = 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons ces inégalités membre à membre. On obtient

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{D_n} \geqq \frac{1}{\Delta_1} + \frac{2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{n}{\Delta_n}$$

donc on a en tenant compte de (9)

$$D_n \leqq \frac{\binom{n+1}{2}}{\frac{1}{\Delta_1} + \frac{2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{n}{\Delta_n}} \leqq \frac{\binom{n+1}{2}}{\frac{1}{D_1} + \frac{2}{D_2} + \ldots + \frac{n}{D_n}}.$$

Or, ce résultat prouve que la suite

$$\delta_n = \frac{\binom{n+1}{2}}{\frac{1}{\Delta_1} + \frac{2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{n}{\Delta_n}}. \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

tend vers la limite (4) car le dernier membre de l'inégalité précédente tend avec D_n vers la même limite D.

Je dis qu'on a $\lim \Delta_n = D$. En effet, posons

$$\alpha = \liminf \Delta_n \leqq \limsup \Delta_n = \beta$$

et observons qu'on a $\alpha \geqq 0$ et

$$\beta \leqq D \leqq d$$

ce qui résulte do (9) et du fait qu'on a $D_1 = d$ et que la suite $\{D_n\}$ n'est pas croissante. Si l'on avait $\alpha = d$ la suite $\{\Delta_n\}$ tendrait évidemment vers D. Si l'on a $\alpha < d$ soit ε un nombre positif tel qu'on ait

$$\alpha + \varepsilon < d. \tag{13}$$

D'après (10) on a

$$\frac{n+1}{\Delta_{n+1}} \geqq \frac{1}{d} + \frac{n}{\Delta_n},$$

$$\frac{n+2}{\Delta_{n+2}} \geqq \frac{1}{d} + \frac{n+1}{\Delta_{n+1}} \geqq \frac{2}{d} + \frac{n}{\Delta_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n+k}{\Delta_{n+k}} \geqq \frac{k}{d} + \frac{n}{\Delta_n}. \tag{14}$$

D'autre part, il existe une suite infinie d'indices $m_1, m_2, \ldots$ tels qn'on a

$$\Delta_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } n = m_1, m_2, \ldots$$

donc il suit de (14) que, quel que soit $k = 1, 2, \ldots$ on a

$$\frac{1}{\Delta_{n+k}} > \frac{k}{n+k} \cdot \frac{1}{d} + \frac{n}{n+k} \cdot \frac{1}{\alpha + \frac{\varepsilon}{2}} \qquad \text{pour } n = m_1, m_2, \ldots \tag{15}$$

Observons maintenant que l'inégalité

$$\frac{k}{n+k} \cdot \frac{1}{d} + \frac{n}{n+k} \cdot \frac{1}{\alpha + \frac{\varepsilon}{2}} \geqq \frac{1}{\alpha + \varepsilon} \tag{16}$$

est satisfaite pour $k = 0$ et qu'elle n'est pas satisfaite pour les k arbitrairement grands car, dans le cas contraire, on aurait $\frac{1}{d} \geqq \frac{1}{\alpha + \varepsilon}$ ce qui reste en contradiction avec (13).

Soit k_n le plus grand d'indices pour lesquels l'inégalité (16) est satisfaite. On a donc

$$\frac{k_n}{d} + \frac{n}{\alpha + \frac{\varepsilon}{2}} \geqq \frac{n + k_n}{\alpha + \varepsilon}$$

d'où l'on obtient

$$k_n \leqq n \cdot \frac{d \cdot \varepsilon}{(2\alpha + \varepsilon)(d - \alpha - \varepsilon)} = n \cdot \eta, \quad \text{où } \eta > 0.$$

D'autre part, on a

$$k_n > n \cdot \eta - 1$$

d'où il suit que

$$\frac{k_n}{n} \to \eta > 0. \tag{17}$$

Cela étant, posons dans l'expression

$$\frac{1}{\delta_{n+k}} = \frac{\frac{1}{\Delta_1} + \frac{2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{n}{\Delta_n}}{\binom{n+k+1}{2}} + \frac{\frac{n+1}{\Delta_{n+1}} + \ldots + \frac{n+k}{\Delta_{n+k}}}{\binom{n+k+1}{2}}$$

$n = m_1, m_2, \ldots$ et $k = k_n$. En vertu de (15) et (16) on a

$$\frac{n+1}{\Delta_{n+1}} + \ldots + \frac{n+k}{\Delta_{n+k}} \geqq \frac{(n+1) + \ldots + (n+k)}{\alpha + \varepsilon}$$

donc

$$(18) \qquad \frac{1}{\delta_{n+k}} \geqq \frac{\binom{n+1}{2}}{\binom{n+k+1}{2}} \frac{1}{\delta_n} + \frac{(n+1) + \ldots + (n+k)}{\binom{n+k+1}{2}} \cdot \frac{1}{\alpha + \varepsilon}.$$

Faisons tendre l'indice n vers l'infini par des valeurs $m_1, m_2, \ldots$ et k par des valeurs $k_{m_1}, k_{m_2}, \ldots$. Les fractions

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{\binom{n+k+1}{2}} = \frac{n\,(n+1)}{(n+k)\,(n+k+1)},$$

$$\frac{(n+1) + \ldots + (n+k)}{\binom{n+k}{2}} = 1 - \frac{n\,(n+1)}{(n+k)\,(n+k+1)}$$

tendent, en vertu de (17), respectivement vers

$$\frac{1}{(1+\eta)^2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{(1+\eta)^2}$$

donc étant $\delta_n \longrightarrow D$ on obtient de l'inégalité (18)

$$\frac{1}{D} \geqq \frac{1}{(1+\eta)^2} \frac{1}{D} + \left[1 - \frac{1}{(1+\eta)^2}\right] \cdot \frac{1}{\alpha + \varepsilon}$$

d'où il résulte que

$$\frac{1}{D} \geqq \frac{1}{\alpha + \varepsilon}$$

et par conséquent on a $\alpha + \varepsilon \geqq D \geqq \beta$. Or, cette inégalité a lieu quel que soit $\varepsilon > 0$ donc, étant $\alpha \leqq \beta$, on a

$$\alpha = \beta = D,$$

c. q. f. d.

Über mehrfach monotone Folgen.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Dem Andenken an Leon Lichtenstein gewidmet.

Einleitung.

ν, n, k, s, l, m bedeuten stets ganze Zahlen.

$\sum_a^b$ bedeute 0 für $b < a$.

Eine Folge reeller Zahlen

$$(1) \qquad A_\nu, \quad 0 \leqq \nu \leqq n$$

mit

$$(2) \qquad A_0 = 0, \quad A_n = 1$$

also $n \geqq 1$) heisse k fach monoton für ein k mit $1 \leqq k \leqq n$, wenn bei jedem s mit $1 \leqq s \leqq k$ ihre s ten Differenzen sämtlich $\geqq 0$ sind.

Die Folge heisse vollmonoton, wenn sie n fach monoton ist.

Bekanntlich gibt es bei jeder k fach monotonen Folge für $1 \leqq l \leqq n$ ein $p_l \geqq 0$, so dass

$$(3) \qquad A_\nu = \sum_{l=1}^{k-1} \binom{\nu}{l} p_l + \sum_{l=k}^{\nu} \binom{\nu - l + k - 1}{k-1} p_l \quad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n.$$

Für jede Folge von $n+1$ reellen Zahlen (1) mit (2) werde