Si $f(\bar{z})$ parcourt l'ensemble de fonctions de la classe L, $\frac{-x}{g(-x)}$ décrit le domaine Δ_r. On en déduit de suite le théorème II de l'Introduction.

Streszczenie.

W pracy tej badam klasę L funkcyj $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ holomorficznych w kole $|z|<1$, przyjmujących w tem kole conajwyżej raz każdą wartość i odwzorowujących to koło na obszary linjowo osiągalne w znaczeniu węższem, t. j. takie że zbiór punktów nie należących do obszaru jest identyczny ze zbiorem punktów należących do pewnej rodziny domkniętych półprostych, przyczem dwie półproste należące do rodziny nie mogą się przecinać. Otrzymuję wyniki następujące:

I. Jeśli $\bar{z}$ $(|z|=r<1)$ jest ustalone a $f(z)$ przebiega wszystkie funkcje klasy L, to zmienna $u=\frac{z}{f(z)}$ zakreśla obszar domknięty Δ_r który jest obszarem zakreślonym przez zmienną

$$u=\frac{(1+s)^2}{1+\frac{s+t}{2}},$$

gdy s i t przybierają wszelkie wartości z kół $|s|\leqq r$ i $|t|\leqq r$.

Wniosek. Jeśli $\bar{z}$ zakreśla koło $|\bar{z}|<1$ a $f(z)$ przebiega wszystkie funkcje klasy L, to zmienna $u=\frac{\bar{z}}{f(z)}$ zakreśla wnętrze (ale nie brzeg) koła $|u-1|<3$, z wyłączeniem początku układu, przyczem jest $|\arg u|<3\cdot\frac{\pi}{2}$.

II. Jeśli z $(|z|=r<1)$ jest ustalone a $f(z)$ przebiega wszystkie funkcje klasy L, to zmienna $v=\frac{zf'(z)}{f(z)}$ zakreśla obszar Δ_r który jest z Δ_r jednokładny. Środek jednokładności leży w początku układu, a stosunek jednokładności ma wartość $\frac{1}{1-r^2}$.

Krótki szkic dowodu twierdzenia I (bez wniosku) był odczytany przeze mnie na XIV Zjeździe Lekarzy i Przyrodników Polskich w Poznaniu (wrzesień 1933).

Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi.

par

M. Paul Montel.

1. Le présent travail concerne le théorème de Jacobi sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction analytique d'une variable possédant trois périodes indépendantes.

Je précise d'abord la notion de systèmes de périodes indépendantes en tenant compte de l'orientation des périodes infinitésimales. Cela permet une analyse du théorème de Jacobi.

Ce théorème exprime que les trois équations fonctionnelles obtenues en égalant à zéro les différences premières d'une fonction analytique pour trois valeurs de l'accroissement n'ont d'autre solution commune qu'une constante lorsque ces valeurs sont indépendantes. Si l'on remplace les différences premières par les différences d'ordre supérieur p, on obtient des équations fonctionnelles qui caractérisent les polynomes de degré $p-1$, ce qui constitue une extension du théorème de Jacobi.

Si l'on se borne aux fonctions d'une variable réelle, il suffit de deux équations fonctionnelles relatives à des accroissements indépendants.

Dans le cas des fonctions de k variables complexes ou réelles, les polynomes de k variables sont caractérisés respectivement par $2k+1$ ou $k+1$ équations fonctionnelles relatives à un nombre égal de systèmes de k périodes simultanées.

2. Soient ω_1, ω_2, ω_3 trois périodes dans le plan de la variable complexe z. Considérons le corps de périodes constitué par toutes les combinaisons linéaires $m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3$ à coefficients entiers. On dit que les périodes sont indépendantes ou dépendantes suivant que ce corps de périodes admet ou n'admet pas de périodes infiniment petites.

S'il existe des périodes infiniment petites, il peut arriver que, quelque petit que soit ε, il existe toujours deux périodes de longueur ou module inférieur à ε formant un angle différent de 0 ou π; ou bien, à partir d'une certaine valeur de ε, les périodes ont toutes la même orientation.

Soit E l'ensemble des points-périodes, c'est-à-dire des points du plan complexe ayant pour affixes les périodes. Dans le premier cas, l'ensemble E est partout dense dans le plan. Menons par O deux vecteurs-périodes, d'orientations différentes et de longueurs inférieures à ε. Tout parallélogramme de périodes déduit du premier par une translation égale à une période du corps aura pour sommets, des points-périodes. Donc tout point du plan est à une distance inférieure à 2ε d'un point-période. Comme ε est arbitrairement petit, on voit que E est partout dense dans le plan.

Dans le second cas, l'ensemble E est partout dense sur les droites Δ menées par chaque point-période parallèlement à la direction des périodes infinitésimales. Le raisonnement est tout à fait semblable au précédent. On en déduit que l'ensemble E est partout dense sur un réseau de droites parallèles équidistantes Δ, ou sur une droite unique issue de l'origine.

Dans le premier cas, nous dirons que les périodes sont *strictement indépendantes*. Dans le second, nous dirons que les périodes sont *semi-dépendantes*. Enfin, lorsqu'il n'y a pas de période infinitésimale, nous dirons que les périodes sont *dépendantes*.

On peut traduire analytiquement les conditions relatives à ces différents cas. On peut toujours trouver trois nombres réels μ_1, μ_2, μ_3, non tous nuls, vérifiant l'égalité

$$\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \mu_3 \omega_3 = 0.$$

Dans le premier cas, il n'existe entre les nombres μ_1, μ_2, μ_3 aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers non tous nuls.

Dans le second cas, il existe une seule relation de cette nature.

Dans le troisième cas, il en existe deux distinctes [1].

Pour un système de $k+1$ périodes $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{k+1}$ dans un espace à k dimensions, on est conduit à une classification de même nature reposant sur les orientations des périodes infinitésimales. On est ainsi amené à considérer des systèmes de périodes *semi-dépendantes d'ordres*

[1] M. Julia a été conduit à une étude de l'ensemble E par des considérations géométriques d'une autre nature (Remarques sur le théorème de Jacobi relatif aux périodes des fonctions uniformes et sur la projection des réseaux de l'espace. Bull. des sciences mathématiques, t. XLVI, p. 51, 1922).

1, 2, ... $(k-1)$, correspondant au nombre de relations linéaires distinctes à coefficients entiers entre les nombres μ_i qui vérifient la relation

$$\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \dots \mu_{k+1} \omega_{k+1} = 0.$$

Les systèmes de périodes semi-dépendantes d'ordres 0 et k se confondent respectivement avec les systèmes de périodes strictement indépendantes et les systèmes de périodes dépendantes.

Les considérations précédentes sont en liaison étroite avec les théorèmes d'approximation de Dedekind.

3. Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe z définie dans un domaine (D) et vérifiant les relations

$$\Delta_1(f) = f(z+\omega_1) - f(z) = 0, \quad \Delta_2(f) = f(z+\omega_2) - f(z) = 0,$$
$$\Delta_3(f) = f(z+\omega_3) - f(z) = 0.$$

Ces relations permettent de définir la fonction en tous les points du plan déduits de ceux de (D) par l'addition d'une période.

Si les périodes sont strictement indépendantes, l'ensemble d'indétermination est le même en tous les points. Je dis en effet que, autour de chaque point z_0, la fonction prend une infinité de fois chacune de ses valeurs car, soit z_1 un autre point: l'ensemble déduit de E par la translation z_1 est partout dense dans le plan: il a donc une infinité de points dans le voisinage de z_0 en chacun desquels la fonction prend la valeur $f(z_1)$. Par exemple, la fonction $f(z)$ égale à *un* aux points de E et à zéro aux autres points vérifie bien les équations données.

Donc, si $f(z)$ est continue en un point de (D), elle se réduit à une constante. Il n'existe aucune solution si $f(z)$ ne prend autour d'un point de (D) qu'un nombre fini de fois une de ses valeurs, en particulier lorsque $f(z)$ est, en un point, multivalente d'ordre fini. Remarquons que si (D) ne comprend pas tout le plan, nous admettons que $f(z)$ est prolongeable dans tout le plan à l'aide des équations.

Si les périodes sont semi-dépendantes, ou voit de même que, en tout point d'une parallèle Δ_0 à Δ situé à l'intérieur de (D) l'ensemble d'indétermination des valeurs prises sur Δ_0 est le même; plus précisément, dans tout segment de Δ_0, $f(z)$ prend une infinité de fois l'ensemble des valeurs qu'elle prend sur Δ_0. Donc, si en un point de Δ_0, $f(z)$ est continue sur cette droite, la fonction est constante sur la droite. Si $f(z)$ est continue en un point de chaque droite Δ_0, elle est constante sur chacune de ces droites. Par exemple, la fonction $f(ax+by)$,

$$ax + by = 0$$

définissant la direction Δ et $f(u)$ désignant une fonction périodique de u lorsque l'ensemble E cet distribué sur un réseau de droites parallèles, ou une fonction arbitraire de u lorsque cet ensemble est porté par une seule droite. Si $f(u)$ est continue, la fonction $f(z)$ ainsi définie est continue.

Si $f(z)$ est, en un point, multivalente d'ordre fini sur la direction Δ, il y a impossibilité. Il en est ainsi, en particulier, lorsque $f(z)$ est multivalente d'ordre fini en un point. Donc, dans tous les cas: *Il n'existe aucune fonction de la variable z admettant trois périodes non dépendantes et multivalente d'ordre fini en un point.*

En particulier, si $f(z)$ est analytique, on retrouve le théorème de Jacobi classique, mais la seule propriété des fonctions analytiques qui soit utilisée est la multivalence d'ordre fini en chaque point, lorsque la fonction ne se réduit pas à une constante.

Si les périodes sont dépendantes, on obtient comme solutions des fonctions doublement périodiques.

4. Proposons-nous maintenant de trouver les solutions du système

$$\Delta_1 = c_1, \quad \Delta_2 = c_2, \quad \Delta_3 = c_3,$$

c_1, c_2, c_3 désignant des constantes, en nous bornant, pour simplifier, aux fonctions $f(z)$, holomorphes dans (D). Il est toujours convenu que ces fonctions sont définies hors de (D) au moyen des équations précédentes, ainsi que leurs dérivées. Or, la dérivée $f'(z)$, vérifiant les équations

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

est une constante A, si les périodes ne sont pas dépendantes; on a donc

$$f(z) = Az + B.$$

Remarquons que $f(z)$ se réduit à une constante lorsqu'une des constantes c_i est nulle, car, si c_1, par exemple, est égal à zéro, on en déduit que $A\omega_1$ est nul.

Si les périodes sont dépendantes, $f(z)$ est une primitive de fonction doublement périodique.

5. Soit enfin, le système

$$\Delta_1{}^p = 0, \quad \Delta_2{}^p = 0, \quad \Delta_3{}^p = 0,$$

le symbole $\Delta_1{}^p$, par exemple, désignant la différence d'ordre p de la fonction $f(z)$, supposée toujours analytique dans (D), pour des accroissements $\omega_1, 2\omega_1, \ldots, p\omega_1$ donnés à la variable. Lorsque le domaine (D) ne comprend pas tout le plan, nous supposons qu'il soit assez grand

pour être coupé par des parallèles aux vecteurs ω_1, ω_2, ω_3, suivant des cordes de longueurs au moins égales respectivement à $(p-1)\,|\,\omega_1\,|$, $(p-1)\,|\,\omega_2\,|$, $(p-1)\,|\,\omega_3\,|$. Dans ces conditions, la définition de $f(z)$ peut être étendue à tout point du plan au moyen des équations précédentes.

Supposons les périodes non dépendantes et admettons que toute solution de ce système soit un polynome de degré inférieur d'une unité à l'ordre des différences lorsque cet ordre est $1, 2, \ldots (p-1)$. Il en est bien ainsi lorsque p est égal à 1. Montrons que, dans ces conditions, ce fait est encore valable pour l'ordre p. Rappelons que, pour les differences mêlées, le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel les différences premières successives sont effectuées.

Soit

$$\varphi(z) = \Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-1}\Delta_3{}^{p-1} f(z).$$

La fonction $\varphi(z)$ est analytique et vérifie les équations

$$\Delta_1\varphi = 0, \qquad \Delta_2\varphi = 0, \qquad \Delta_3\varphi = 0$$

c'est donc une constante C. Soit alors

$$\psi(z) = \Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-1}\Delta_3{}^{p-2} f(z);$$

on a

$$\Delta_1\psi = 0, \qquad \Delta_2\psi = 0, \qquad \Delta_3\psi = C,$$

donc ψ est une constante C' et C qui est égal á $\Delta_3\psi$ est nul. Ainsi de suite; on voit donc que, dans la suite

$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-1}\Delta_3{}^{p-1},$$
$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-1}\Delta_3{}^{p-2},$$
$$— \quad — \quad — \quad —$$
$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-1}\Delta_3,$$
$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-1},$$

toutes les fonctions, sauf peut-être la derniére, sont nulles; et la dernière est constante. Reprenons les mêmes calculs pour la suite

$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-2}\Delta_3{}^{p-2},$$
$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-2}\Delta_3{}^{p-3},$$
$$— \quad — \quad — \quad —$$
$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-2}\Delta_3,$$
$$\Delta_1{}^{p-1}\Delta_2{}^{p-2},$$

nous verrons que toutes ces fonctions, sauf la dernière peut-être, sont nulles ainsi que $\Delta_1^{p-1}\Delta_2^{p-1}$, et que la dernière est constante. En continuant ainsi, nous formerons $p-1$ colonnes dont la dernière est

$$\Delta_1^{p-1}\Delta_2\Delta_3 = 0,$$

$$\Delta_1^{p-1}\Delta_2 = C^{te},$$

On en déduit aussitôt

$$\Delta_1^{p-1} = C_1,$$

C_1 désignant une constante, toujours à l'aide du même raisonnnement. Ainsi,

$$\Delta_1^{p-1}(f) = C_1, \qquad \Delta_2^{p-1}(f) = C_2, \qquad \Delta_3^{p-1}(f) = C_3,$$

C_2 et C_3 désignant de nouvelles constantes. Alors

$$\Delta_1^{p-1}(f') = 0, \qquad \Delta_2^{p-1}(f') = 0, \qquad \Delta_3^{p-1}(f') = 0,$$

et $f'(z)$ est un polynome de degré $p-2$; $f(z)$ est par conséquent un polynome de degré $p-1$. Nous avons donc démontré la proposition suivante:

Toute fonction analytique $f(z)$ vérifiant les équations

$$\Delta_1^p(f) = 0, \qquad \Delta_2^p(f) = 0, \qquad \Delta_3^p(f) = 0,$$

dans lesquelles les accroissements forment un système de périodes non dépendantes est un polynome arbitraire de degré $p-1$.

On en déduit aussitôt que toute fonction analytique $f(z)$ satisfaisant aux équations

$$\Delta_1^p(f) = 0, \qquad \Delta_2^q(f) = 0, \qquad \Delta_3^r(f) = 0$$

dans lesquelles les accroissements forment un système de périodes non dépendantes est un polynome arbitraire dont le degré est inférieur au plus petit des entiers p, q, r. On obtient des résultats analogues lorsque les seconds membres sont des polynomes donnés $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ de degrés respectifs p_1, q_1, r_1; la solution est fournie par un polynome, s'il existe, de degré égal au plus petit des entiers $p+p_1$, $q+q_1$, $r+r_1$.

6. Examinons le cas des fonctions d'une variable réelle x vérifiant un système de deux équations de la forme

$$\Delta_1^p(f) = 0, \qquad \Delta_2^p(f) = 0,$$

les différences correspondant à des accroissements ω_1, ω_2 réels et formant un système de deux périodes indépendantes, c'est-à-dire telles que leur rapport ne soit pas rationnel.

Lorsque p est égal à *un*, une fonction $f(x)$ qui admet les périodes ω_1 et ω_2, et que l'on peut supposer définie pour toute valeur réelle en la prolongeant au besoin, prend autour de chaque point une infinité de fois chacune de ses valeurs. On le voit de la même manière que dans le cas des variables complexes puisque l'ensemble E des points-périodes est ici dense sur l'axe des x. Par exemple, la fonction égale à *un* aux points de E et à zéro aux autres points de l'axe répond à la question. Si elle est continue en un point, elle se réduit à une constante. Si en un point, elle ne prend qu'un nombre fini de fois une de ses valeurs, il n'y a pas de solution. Par exemple: *il n'existe aucune fonction multivalente d'ordre fini en un de ses points et admettant deux périodes indépendantes.*

Bornons-nous aux fonctions continues et considérons les équations

$$\Delta_1(f) = c_1, \qquad \Delta_2(f) = c_2,$$

c_1 et c_2 désignant des constantes. La fonction

$$g(x, h) = f(x+h) - f(x),$$

h désignant une constante arbitraire, satisfait aux équations

$$\Delta_1(g) = \Delta_2(g) = 0;$$

comme elle est continue, elle ne dépend pas de x, on obtient sa valeur en faisant x égal à zéro, ce qui donne

$$f(x+h) = f(x) + f(h) - f(0).$$

On en déduit que $f(x)$ est de la forme $Ax+B$. Si c_1 est nul, $f(x)$ est constante.

Le résultat obtenu peut s'énoncer de la manière suivante:

Toute fonction continue $f(x)$ qui vérifie l'équation de Cauchy

$$f(x+h) = f(x) + f(h)$$

pour deux valeurs de h dont le rapport est irrationnel est de la forme Ax.

Passons maintenant au cas général et démontrons que toute fonction continue de la variable réelle x qui vérifie un système de la forme

$$\Delta_1^p = \Delta_2^p = 0$$

est un polynome entier de degré inférieur à l'ordre des différences.

La fonction

$$\varphi(x) = \Delta_1^{p-1}\Delta_2^{p-1}(f)$$

est continue et vérifie

$$\Delta_1(\varphi) = \Delta_2(\varphi) = 0,$$

donc $\varphi(x)$ est une constante C. De même,

$$\psi(x) = \Delta_1^{p-1}\Delta_2^{p-2}(f)$$

vérifie

$$\Delta_1(\psi) = 0, \qquad \Delta_2(\psi) = C,$$

donc ψ est une constante et C est nul; et ainsi de suite. On formera donc le tableau

$$\begin{array}{l} \Delta_1^{p-1}\Delta_2^{p-1}(f), \\ \Delta_1^{p-1}\Delta_2^{p-2}(f), \\ - - - - \\ \Delta_1^{p-1}\Delta_2(f), \\ \Delta_1^{p-1}(f), \end{array}$$

dans lequel toutes les fonctions sont nulles sauf peut-être la dernière qui est une constante C_0; on verrait de même que $\Delta_2^{p-1}(f)$ est une constante C'_0. On a donc

$$\Delta_1^{p-1}(f) = C_0, \qquad \Delta_2^{p-1}(f) = C'_0.$$

Posons

$$f(x) = C_0 \frac{x^{p-1}}{(p-1)!\,\omega_1^{p-1}} + g(x),$$

on en déduit

$$\Delta_1^{p-1}(g) = 0, \qquad \Delta_2^{p-1}(g) = C^{te}.$$

On peut alors former les tableaux

$$\begin{array}{ll} \Delta_1^{p-2}\Delta_2^{p-2}(g), & \Delta_2^{p-2}\Delta_1^{p-2}(g), \\ \Delta_1^{p-2}\Delta_2^{p-3}(g), & \Delta_2^{p-2}\Delta_1^{p-3}(g), \\ - - - & - - - \\ \Delta_1^{p-2}\Delta_2(g), & \Delta_2^{p-2}\Delta_1(g), \\ \Delta_1^{p-2}(g), & \Delta_2^{p-2}(g), \end{array}$$

dans lesquels toutes les fonctions sont nulles sauf peut-être les deux de la dernière ligne qui sont des constantes C_1 et C'_1. En posant

$$g(x) = C_1 \frac{x^{p-2}}{(p-2)!\,\omega_1^{p-2}} + h(x),$$

on aura

$$\Delta_1^{p-2}(h) = 0, \qquad \Delta_2^{p-2}(h) = C^{te},$$

et l'on pourra continuer. Au bout de $p-1$ opérations, on arrivera à une fonction $u(x)$ définie par l'égalité

$$f(x) = \frac{C_0}{(p-1)!}\left(\frac{x}{\omega_1}\right)^{p-1} + \frac{C_1}{(p-2)!}\left(\frac{x}{\omega_1}\right)^{p-2} + \ldots + C_{p-2}\left(\frac{x}{\omega_1}\right) + u(x)$$

et vérifiant les équations

$$\Delta_1(u) = 0, \qquad \Delta_2(u) = C^{te},$$

comme u est continue, c'est une constante C_p et on a finalement,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{C_{k-1}}{(p-k)!}\left(\frac{x}{\omega_1}\right)^{p-k};$$

c'est un polynome de degré $p-1$.

M. Anghelutza a démontré que l'équation

$$\Delta^p(f) = 0$$

caractérise les polynomes de degré $p-1$ lorsqu'elle est vérifiée pour toute valeur de l'accroissement. On voit qu'il suffit que cette équation soit satisfaite pour deux valeurs indépendantes de cet accroissement [1]).

Ce résultat se retrouve dans un grand nombre d'équations fonctionnelles: lorsqu'une telle équation fonctionnelle est vérifiée pour deux valeurs de l'accroissement dont le rapport est irrationnel, ce système est équivalent à l'équation différentielle qu'on en déduit en faisant tendre cet accroissement vers zéro [2]).

7. Si nous passons au cas des fonctions de plusieurs variables complexes, nous obtiendrons des résultats semblables comportant certaines particularités nouvelles. Bornons-nous aux fonctions $f(z, z')$ de deux variables complexes z et z'. Nous considérerons les différences obtenues en donnant aux variables des accroissements simultanés h et h' et poserons

$$\Delta(f) = f(z+h,\; z'+h') - f(z, z').$$

---

[1]) Voir Th. Anghelutza (Sur une équation fonctionnelle caractérisant les polynomes, *Mathematica, vol. VI, p. 1, 1932*).

[2]) Paul Montel (Sur des propriétés finies caractérisant des courbes et des surfaces. *Revue de l'Enseignement scientifique, 3e an. p. 200, 1930*).

De telles différences obéissent aux mêmes lois de calcul que les différences relatives aux fonctions d'une seule variable.

Les accroissements $h = h_1 + i h_2$, $h' = h_3 + i h_4$ définissent un vecteur-période ω dans un espace à quatre dimensions. Nous sommes donc conduits à considérer des systèmes de cinq périodes $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$. Pour une fonction de k variables complexes, on introduirait un système de $2k+1$ périodes.

Le corps de périodes défini par les cinq périodes données admet un ensemble E de points-périodes dont la distribution peut comporter, comme nous l'avons vu au paragraphe 2, des formes diverses.

Lorsque les cinq périodes sont strictement indépendantes, l'ensemble E est partout dense dans l'espace à quatre dimensions.

Les périodes peuvent être semi-dépendantes d'ordres 1, 2, ou 3. Dans le premier cas, les points de E sont partout denses sur une suite d'hyperplans à trois dimensions parallèles et équidistants, ou confondus.

Si les périodes sont semi-dépendantes d'ordre 2, les points de E sont partout denses sur un réseau d'hyperplans à deux dimensions déduits de l'un d'eux au moyen de translations égales à deux vecteurs fixes, ou à un seul vecteur, ou tous confondus. Ces hyperplans peuvent être des plans caractéristiques. Pour les périodes semi-dépendantes d'ordre 3, les points de E sont partout denses sur un réseau de droites déduites de l'une d'elles par des translations égales à trois, deux vecteurs fixes, ou à un seul, ou bien sont toutes confondues.

Enfin, les périodes peuvent être dépendantes. L'ensemble E forme alors un réseau quadruple de points déduits de l'un d'eux par le groupe des translations définies par quatre vecteurs fixes.

Si une fonction $f(z, z')$ vérifie les équations

$$\Delta_1(f)=0,\quad \Delta_2(f)=0,\quad \Delta_3(f)=0,\quad \Delta_4(f)=0,\quad \Delta_5(f)=0$$

et si les périodes sont strictement indépendantes, elle prend autour de chaque point une infinité de fois chacune de ses valeurs. Une même valeur est prise en des points partout denses dans l'espace à 4 dimensions. Si la fonction est continue en un seul point, c'est une constante. Si autour d'un point, elle ne prend une même valeur que sur une multiplicité à moins de 4 dimensions, il n'y a aucune solution.

Pour des périodes semi-dépendantes d'ordre *un*, le théorème relatif aux fonctions continues en un point n'est plus valable; mais il n'existe aucune fonction verifiant les relations et telle que, autour d'un point, elle ne prenne une même valeur que sur une multiplicité à moins de 3 dimensions. Donc:

Il n'existe aucune fonction de deux variables complexes admettant cinq périodes strictement indépendantes ou semi-dépendantes d'ordre un et qui, autour d'un point déterminé, ne prenne une même valeur que sur une variété de moins de trois dimensions.

En particulier, il n'existe aucune fonction analytique admettant cinq périodes des types précédents, mais la seule propriété des fonctions analytiques qui intervienne ici est celle de ne prendre une même valeur que sur des variétés à deux dimensions.

Si les périodes sont semi-dépendantes d'ordres deux ou trois, il peut exister des fonctions analytiques possédant cinq périodes. Par exemple, donnons-nous cinq périodes $\omega_j = h_j + i h_j'$ vérifiant les égalités

$$\frac{h_1'}{h_1} = \frac{h_2'}{h_2} = \frac{h_3'}{h_3} = \mu$$

et soit $F(u)$ une fonction doublement périodique admettant les périodes $h_4' - \mu h_4$ et $h_5' - \mu h_5$. La fonction analytique $F(z' - \mu z)$ admet les cinq périodes données.

Si les périodes sont dépendantes, la solution est fournie par des fonctions abéliennes à quatre périodes.

8. Considérons les fonctions $f(z, z')$ analytiques et les systèmes de cinq périodes strictement indépendantes ou semi-dépendantes du premier ordre. Toute solution du système

$$(1)\qquad \Delta_1(f)=c_1,\quad \Delta_2(f)=c_2,\quad \Delta_3(f)=c_3,\quad \Delta_4(f)=c_4,\quad \Delta_5(f)=c_5,$$

c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 désignant des constantes, est un polynome du premier degré en (z, z'), comme on le voit aussitôt en dérivant les égalités précédentes par rapport à z et par rapport à z'.

Si trois au moins des constantes c_i sont nulles, la fonction est constante. En effet, si f était de la forme $az + bz' + c$, on devrait avoir par exemple

$$a h_1 + b h_1' = a h_2 + b h_2' = a h_3 + b h_3' = 0.$$

Les périodes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ seraient dans un même plan caractéristique et le système serait semi-dépendant d'ordre 2 au moins.

Si l'on considère le système

$$(2)\qquad \Delta_1^p(f)=0,\quad \Delta_2^p(f)=0,\quad \Delta_3^p(f)=0,\quad \Delta_4^p(f)=0,\quad \Delta_5^p(f)=0,$$

ou pourra reprendre la formation des tableaux qui a été faite au paragraphe 5; on obtiendra des valeurs nulles ou constantes tant que les fonctions introduites vérifieront des systèmes de la forme (1) pour lesquels trois au moins des constantes c_i sont nulles. Lorsque le nombre des constantes nulles sera inférieur à 3, ou remplacera f par f' et on pourra continuer. Quand on sera de nouveau arrêté, on remplacera f' par f'' etc. Les symboles $f', f'', \ldots$ désignent ici une dérivée premiere, seconde, etc. arbitraire. On arrivera finalement à une dérivée vérifiant les équations

$$\Delta_1{}^{p-1} = \Delta_2{}^{p-1} = \Delta_3{}^{p-1} = \Delta_4{}^{p-1} = \Delta_5{}^{p-1} = 0.$$

Supposons que l'on ait établi que toute solution du système (2) est un polynome lorsque l'ordre des différences est $p-1$. On en déduira que la dérivée considérée est un polynome et que, par conséquent, toute dérivée d'un ordre assez élevé est nulle. La fonction cherchée f sera donc encore un polynome quand l'ordre des différences est égal à p. Ainsi:

Toute fonction analytique $f(z, z')$ vérifiant le système

$$\Delta_i{}^p(f) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

correspondant à des périodes strictement indépendantes ou semi-dépendantes du premier ordre est un polynome en z et z'.

Mais ce polynome n'est pas nécessairement de degré inférieur à p comme dans le cas des fonctions d'une variable, au moins lorsque p est assez grand. En effet, tout polynome de degré $p-1$ au plus vérifie les équations (2). Ajoutons-lui un groupe homogène de degré p, $\varphi(z, z')$; on a, par un calcul facile

$$\Delta^p \varphi(z, z') = p\, \varphi(h, h')$$

pour la période $\omega\ (h, h')$. Si φ satisfait aux équations (2), le polynome homogène $\varphi(h, h')$ doit admettre les solutions (h_i, h_i') pour $i=1, 2, 3, 4, 5$. Si p est inférieur à 3, trois des rapports $\frac{h'_i}{h_i}$ sont nécessairement égaux et les périodes seraient semi-dépendantes d'ordre 2 au moins. Mais si p est supérieur ou égal à 3, la fonction φ existe: pour $p \geqq 5$, il suffit de prendre

$$\varphi(z, z') = \prod_{i=1}^{i=5} (h_i' z - h_i z') \,.\, P(z, z'),$$

$P(z, z')$ étant un polynome de degré $p-5$ par rapport à (z, z').

Si p est inférieur à 3, le polynome f ne contient de même aucun groupe homogène de degré $p+h$ $(h \geqq 0)$, sinon une dérivée d'ordre h

de ce groupe formerait un groupe homogène de degré p vérifiant les équations (2).

Si p est supérieur ou égal à 3, le polynome f peut contenir des termes de degrés $p+h$ $(h \geqq 0)$, h étant limité supérieurement en fonction de p comme on le voit aisément. Par exemple, le polynome

$$\varphi(z, z') = \left[\prod_{i=1}^{i=5} (h_i' z - h_i z')\right]^{h+1} \cdot P(z, z'),$$

$P(z, z')$ désignant un polynome de degré $p - 4h - 5$, est de degré $p+h$ et vérifie les équations (2) si l'on suppose que p est supérieur ou égal à $4h+5$.

9. Supposons enfin que f soit une fonction réelle de deux variables réelles x, y. Nous considèrerons les différences obtenues en donnant aux variables des accroissements réels simultanés h et h'. Le vecteur-période $\omega = h + ih'$ sera dans le plan de la variable complexe et nous serons conduits à introduire des systèmes de trois périodes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Pour une fonction de k variables réelles, il faudrait introduire des systèmes de $k+1$ périodes. Si une fonction $f(x, y)$ vérifie les équations

$$(3) \qquad \Delta_1(f) = \Delta_2(f) = \Delta_3(f) = 0,$$

ou verra comme précédemment que cette fonction est constante si elle est continue en un point et si les périodes sont strictement indépendantes. Si au contraire les périodes sont semi-dépendantes, toute fonction continue $f(u)$, périodique ou non suivant la disposition de l'ensemble E, fournira une fonction continue $f(ax+by)$ répondant à la question, comme on l'a vu au paragraphe 3. Nous nous limiterons aux fonctions continues et aux systèmes de périodes strictement indépendantes.

Cherchons dans ces hypothèses les solutions du système

$$\Delta_1(f) = c_1, \quad \Delta_2(f) = c_2, \quad \Delta_3(f) = c_3,$$

c_1, c_2, c_3 désignant trois constantes; la fonction

$$g(x, y) = f(x+h,\ y+h') - f(x, y)$$

vérifie le système (3) quels que soient h, h'. C'est donc une constante que l'on calculera en faisant $x = y = 0$. Comme ou peut remplacer $f(x, y)$ par $f(x, y) - f(0, 0)$, il est permis de supposer que $f(x, y)$ est nul par $x = y = 0$. La fonction $f(x, y)$ vérifie alors l'équation

$$f(x+h, y+h') = f(x, y) + f(h, h'),$$

et l'on peut admettre, en prolongeant au besoin la fonction à l'aide de cette égalité, que la propriété a lieu dans tout le plan, on en déduit

$$f(x,y)=f(x+0,\ 0+y)=f(x,0)+f(0,y),$$

donc f est de la forme $\varphi(x)+\psi(y)$, avec $\varphi(0)=\psi(0)=f(0,0)=0$. On a alors

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)-\varphi(h)=\psi(y+h')-\psi(y)-\psi(h').$$

Les deux membres de cette égalité sont égaux à une constante nécessairement nulle. Si donc $f(x,y)$ est continue en x et en y, c'est une fonction linéaire de x et de y. La solution générale du système proposé est donc

$$f(x,y)=ax+by+c.$$

Si deux des constantes c_i sont nulles, f est une constante, mais l'une d'elles peut être nulle.

10. — Considérons alors le système

$$\Delta_1{}^p(f)=\Delta_2{}^p(f)=\Delta_3{}^p(f)=0.$$

On opèrera toujours de la même manière en formant les tableaux déjà plusieurs fois introduits. Quand on sera arrêté comme au paragraphe 8, on remplacera f par

$$\Delta f=f(x+h,y)-f(x,y),$$

h désignant un nombre arbitraire. Quand on sera de nouveau arrêté, on remplacera Δf par $\Delta^2 f$, et ainsi de suite, on arrivera alors à montrer qu'une différence $\Delta^q(f)$ vérifie les équations

$$\Delta_1{}^{p-1}=\Delta_2{}^{p-1}=\Delta_3{}^{p-1}=0.$$

Si l'on a démontré que toute solution continue de ce système est un polynome, de degré borné en fonction de p, on en déduira qu'une différence d'ordre assez élevé de $\Delta^q(f)$ est nulle. Cette propriété étant vraie quels que soient x, y, h, on en conclura que $f(x,y)$ est polynome en x quel que soit y[1]; on verrait de même que c'est un polynome en y quel que soit x. Donc f est un polynome et l'on voit aisément que son degré est borné en fonction de p.

On peut d'ailleurs remarquer que s'il existait une infinité de polynomes $f_n(x,y)$ de degrés r_n indéfiniment croissants, dont on peut supposer tous les coefficients compris entre -1 et $+1$ en divisant chaque fonction par son coefficient de plus grand module, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n!}$ représenterait une solution sans être un polynome. Ainsi:

Toute fonction continue $f(x,y)$ vérifiant les équations

$$\Delta_1{}^p(f)=\Delta_2{}^p(f)=\Delta_3{}^p(f)=0$$

correspondant à des périodes strictement indépendantes est un polynome.

[1]) Cf. T. Popoviciu. (Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynomes. Mathematica, Vol. X, p. 1935).