zerlegt wird (so dass also Cantorsche Mannigfaltigkeiten Räume sind, deren Dimension mit der Zusammenhangsstufe übereinstimt), so können wir das Bewiesene auch in der Form aussprechen:

I' Jeder mindestens n-dimensionale kompakte Raum enthält einen n-stufig zusammenhängenden Teil.

Bemerken wir, dass eine beinahe unmittelbare Folgerung aus I' der folgende dimensionstheoretische Satz ist: [7])

Ist ein mindestens n-dimensionaler kompakter Raum A stetig auf einen Raum B[8]) abgebildet, so dass die Urbildmenge jedes Punktes von B höchstens m—dimensional ist, so ist B mindestens $(n-m)$—dimensional.

Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n bei festem m. Für $m=n$ ist die Behauptung trivial; sei $m>n$ und die Behauptung sei richtig, wenn n durch eine kleinere Zahl ersetzt wird. Nach I' dürfen wir annehmen, A sei n-stufig zusammenhängend. Dann ist aber B $(n-m)$-stufig zusammenhängend (und a fortiori mindestens $(n-m)$-dimensional), denn würde eine höchstens $(n-m-2)$-dimensionale Menge C den Raum B zerlegen, so würde die Urbildmenge von C den Raum A zerlegen, und, da diese Urbildmenge nach der Induktionsvoraussetzung höchstens $(n-2)$-dimensional ist, kämen wir in Widerspruch zur Annahme, A sei n-stufig zusammenhängend.

[7]) Vgl. meine Note in Proc. Ac. Amst. 30, S. 164.

[8]) B ist der *gauze* Bildraum.

Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles

par

M. Biernacki.

Introduction.

On a étudié depuis longtemps la classe E de fonctions

$$f(z) = z + a_2 z^2 + $$

holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$ et la sous-classe G de fonctions de la classe E qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine (je ne considère dans ce travail que *les domaines qui ne se recouvrent pas*). On peut dire qu'un domaine est étoilé par rapport à l'origine lorsque l'ensemble des points qui ne sont pas intérieurs au domaine est identique avec l'ensemble des points d'une famille de demi-droites fermées, dont les prolongements passent tous par l'origine. En supprimant dans cette définition les mots „dont les prolongements passent par l'origine" on obtient une classe de domaines plus étendue, on pourrait appeler de tels domaines *linéairement accessibles au sens large.* Par contre nous dirons qu'un domaine est *linéairement accessible au sens strict* si l'ensemble des points qui ne sont pas intérieurs au domaine est identique avec l'ensemble des points d'une famille de demi-droites fermées et *si deux demi-droites de la famille ne se coupent jamais* (cependant elles peuvent être parallèles et l'extrémité d'une demi-droite peut appartenir à une autre demi-droite). Un domaine étoilé est évidemment linéairement accessible au sens strict. Tout domaine borné, dont la frontière n'est coupée qu'en 2 points au plus par des parallèles à une direction fixe est linéairement accessible au sens strict.

Une valeur z ($|z| = r$) étant fixée, on peut se proposer de déterminer la région décrite par la variable

$$u = \frac{z}{f(z)}$$

lorsque $f(z)$ parcourt l'ensemble de toutes les fonctions d'une classe donnée. Ce problème a été résolu pour la classe E par *H.* Grötsch[1]) et H. Grunsky[2]), et pour la sous-classe G par *A. Marx*[3]): u décrit le domaine M_r décrit par le point d'affixe $(1+s)^2$, lorsque la variable complexe s décrit le cercle $|s| \leq r$. Je me suis proposé de résoudre le même problème pour la sous-classe L de fonctions de la classe E qui représentent le cercle unité sur des domaines linéairement accessibles au sens strict. J'ai utilisé dans ce but une formule de *G. Julia*[4]) et j'ai obtenu les résultats suivants:

Théorème I.

z ($|z| = r < 1$) étant fixé le domaine Δ_r couvert par la variable $u = \dfrac{z}{f(z)}$ lorsque $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ parcourt l'ensemble de toutes les fonctions univalentes, holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et qui représentent ce cercle sur des domaines linéairement accessibles (au sens strict) est le domaine fermé décrit par le point d'affixe

$$u = \frac{(1+s)^2}{1 + \frac{1}{2}(s+t)}$$

lorsque les variables s et t décrivent les cercles $|s| \leq r$ et $|t| < r$. Les points de la frontière de Δ_r correspondent aux fonctions $f(z)$ qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur le plan muni d'une seule coupure qui est une demi - droite.

En faisant tendre r vers 1 on déduit du théorème I (cf. § 8) le résultat:

Corollaire: Si z décrit le cercle $|z| < 1$ et $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ parcourt l'ensemble de toutes les fonctions dont il est question dans le théorème I *la variable $u = \dfrac{z}{f(z)}$ couvre l'intérieur (mais non pas la périphérie) du cercle $|u - 1| < 3$, le point d'affixe o étant cependant excepté. On a $|\arg u| < 3 \cdot \dfrac{\pi}{2}$.*

En imitant maintenant un raisonnement de A. Marx[5]) on déduit de suite (cf. § 9) du théorème I le suivant:

Théorème II.

z ($|z| = r < 1$) étant fixé le domaine couvert par la variable $v = \dfrac{z f'(z)}{f(z)}$ lorsque $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ parcourt l'ensemble de toutes les fonctions dont il est question dans le théorème I est le domaine $\bar{\Delta}_r$ homothétique de Δ_r, le centre d'homothétie étant à l'origine et le rapport d'homothétie ayant la valeur $\dfrac{1}{1-r^2}$. Les points de la frontière de Δ_r correspondent aux fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur le plan muni d'une seule coupure qui est une demi - droite. On a

$$|\arg v| < 3 \cdot \frac{\pi}{2}$$

J'ai présenté une brève esquisse de la démonstration du théorème I (sans corollaire) au XIV-e Congrès de la Médecine et des Sciences naturelles polonaises à Poznań (septembre 1933). Je me servirai, dans tout ce qui suit, des abréviations suivantes: d. d. = demi-droite, l. a. = linéairement accessible *au sens strict*. Je désignerai par S la famille des demi-droites qui intervient dans la définition des domaines linéairement accessibles.

§ 1. Nous allons faire d'abord quelques remarques au sujet des domaines l. a. et des fonctions qui représentent le cercle unité sur de tels domaines.

Lemme I. Toute fonction univalente qui représente le cercle unité sur un domaine l. a. est limite uniforme des fonctions qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur des plans munis d'un nombre fini de coupures qui sont des demi - droites sans points communs.

Il est évident qu'un plan muni de telles coupures est un domaine l. a. On peut supposer que toutes les fonctions considérées s'annulent à l'origine et que leurs dérivées y soient positives. Supposons que $f(z)$ représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine D l. a. ($f(0) = 0$, $f'(0) > 0$) et soit S la famille de d. d. qui correspond à D. Nous construirons par récurrence des systèmes S_n d'un nombre *fini* de d. d. de la famille S

[1]) Über zwei Verschiebungsprobleme der konformen Abbildung. Ber. Preus. Akad. Phys. Math. Klasse 1933. log u décrit le cercle fermé dont le diamètre est le segment qui joint les points d'affixe 2 log $(1 \pm r)$.

[2]) Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schriften des math. Seminars der Univ. Berlin. Bd 1. Heft 3. 1932.

[3]) Untersuchungen über die schlichten Abbildungen. Math. Annalen 1 o 7 (1932). cf. aussi E. Strohhäcker. Mat. Zeit. 37 (1933).

[4]) Annales scient. de l'Ecole Normale. 3-e série 39 (1922). J. Hadamard a établi auparavant une formule analogue relative au cas des fonctions harmoniques: cf. son Calcul des Variations.

[5]) Zwei Sätze über schlichte Funktionen. Ber. Preus. Akad. Phys. — Math. Klasse 1929.

de manière que $S_n \subset S_{n+1}$ et que tous les points non intérieurs à D et dont les distances à l'origine ne dépassent pas n se trouvent à une distance non supérieure à $\frac{1}{n}$ d'une des d. d. du système S_n. Appelons Σ_n le système des d. d. qui s'obtiennent des d. d. du S_n si on enlève au bout de chacune d'elles un segment de longueur $\frac{1}{n}$. Les d. d. du système Σ_n n'ont pas de points communs. Appelons $f_n(z)$ la fonction qui représente le cercle $|z| < 1$ sur le plan fendu suivant les d. d. du système Σ_n ($f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$). Puisque $|f'_n(0)| \geq |f'(0)|$ et $|f'_n(0)|$, décroit avec $\frac{1}{n}$ la famille $f_n(z)$ est normale[6], on peut donc extraire de la suite $\{f_n(z)\}$ une autre qui tend uniformément à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ vers une fonction $\varphi(z)$. Si w est l'affixe d'un point intérieur de D $\varphi(z)$ prend cette valeur dans le cercle unité, car si $w = f_n(z_n)$ $|z_n|$ ne dépasse pas un nombre fixe plus petit que 1. Au contraire, $\varphi(z)$ ne prend pas une valeur w n'appartenant pas au D, car autrement les fonctions $f_n(z)$ devraient prendre, pour n assez grand, toutes les valeurs d'un petit cercle de centre w, ce qui est en contradiction avec la définition des $f_n(z)$. Or $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$, donc $\varphi(z) \equiv f(z)$

Lemme II. Considérons un domaine l.a. D et la famille associée S des d.d. L'ensemble des points de la frontière du D qui appartiennent à une d.d. de la famille S se réduit — s'il n'est pas vide — soit à un seul point, soit à un seul segment.

Supposons, en effet, qu'il existe sur la d.d. $FF'P$ de la famile S deux points F et F' de la frontière de D, l'intérieur de l'intervalle FF' étant composé de points extérieurs à D. Par le milieu M de FF' traçons une droite perpendiculaire à FF'. D étant connexe, cette droite contient des points de la frontière, désignons par F_1 et F_2 ceux qui sont le plus près de M, d'une part et de l'autre de ce point (bien entendu *un* des points F_1 et F_2 peut ne pas exister). Traçons autour des points F et F' comme centres deux cercles de rayons très petits par rapport aux MF_1 et MF_2: ces cercles contiennent des points intérieurs I et I'. I'est, par exemple, du même côté de la droite qui contient la d. d. $FF'P$ que F_2. On peut joindre I' et I par une ligne continue C qui ne contient que des points intérieurs, elle coupe la droite qui passe par F_2 et M sur le segment infini qui s'étend au-delà de F_2. Par le

[6]) P. Montel. Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Paris. Gauthiers-Villars p. 29.

point F_2 il passe une d. d. F_2Q du système S, cette d. d. ne peut couper ni la ligne C ni la d. d. $FF'P$. Désignons par E le point où une parallèle à F_2Q menée par F coupe le segment MF_2 (E peut se confondre avec F_2) et soit N un point du segment ME situé dans le voisinage du point E. Il est clair que toute d. d. qui passe par le point N (extérieur au D) doit couper soit les d. d. FMP ou F_2Q soit la ligne C. Nous aboutissons donc à une contradiction.

Remarque: D étant un domaine l.a. il existe toujours une famille S de d. d. telle que l'extrémité de chaque d. d. appartient à la frontière de D. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi pour une famille S. Considérons celles des d. d. de S qui contiennent les points de la frontière de D, en enlevant de ces d. d. s'il y a lieu des segments de longueurs finies, nous obtenons une famille S' de d. d. dont les extrémités appartiennent à la frontière de D. Considérons une région R extérieure à D et non recouverte par la famille S': je dis qu'elle se réduit à un angle dont le sommet appartient à la frontière de D. En effet, les points de la frontière de R sont situés sur 2 d. d. de S' seulement: autrement 3 de ces d. d. délimitent avec une partie de la frontière de D deux régions R_1 et R_2, R devrait appartenir à chacune d'elles. Supposons que les extrémités des 2 d. d. en question soient F et F' et considérons deux autres points F_1 et F_2 de la frontière commune de D et de R, par ces points passent des d. d. de S', soit δ_1 et δ_2. On voit aisément que le domaine D devrait appartenir à la région limitée par δ_1 et δ_2, les points F et F' seraient donc extérieurs à D, ce qui est impossible. F coïncide donc avec F' et R est bien un angle de sommet F. Il est évident que l'on peut compléter la famille S' de manière que la famille obtenue couvre tous les points non intérieurs à D et satisfasse à la condition voulue. Le raisonnement que nous venons de faire prouve évidemment aussi que *si par chaque point de la frontière d'un domaine D passe une d. d. ne contenant pas des points intérieurs à D et si deux de ces d. d. ne se coupent pas, D est l. a.*

Lemme III. Si f(z) est limite uniforme pour $n \to \infty$ de fonctions $f_n(z)$ [$f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$] univalentes dans le cercle $|z| < 1$ et qui le représentent sur des domaines D_n l. a. f(z) représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine D l. a. (On suppose que la convergence est uniforme dans chaque cercle $|z| \leq r < 1$ et que $f(z)$ n'est pas $\equiv 0$). Un point F (à distance finie) de la frontière de D est limite d'une suite de points F_n appartenant aux frontières des D_n. Dans le cas contraire, en effet, le point F serait centre d'un cercle C ne contenant que les points intérieurs des D_n pour n assez grand. L'ensemble des points qui sont des limites pour $n \to \infty$ des points intérieurs des D_n (et de ceux-ci seulement) se compose d'un nombre (au plus dénombrable) de domaines connexes Δ et le cercle C appartiendrait à un de ces domaines, soit D^*. D est identique avec celui des domaines Δ qui contient l'origine. Si donc D^* contient l'origine, C appartiendrait au D, si D^* ne contient pas l'origine le cercle C serait extérieur au D, dans les deux cas on aboutit à une contradiction.

Cela posé, soit s un nombre naturel et E_s un ensemble d'un nombre fini N_s de points de la frontière de D, ces points étant choisis de la sorte que chaque point de la frontière de D, dont la distance à l'origine ne dépasse pas s se trouve à une distance non supérieure à $\frac{1}{s}$ d'un point de E_s. De la suite $\{f_n(z)\}$ on peut extraire une suite partielle $\{f_{n_i}(z)\}$ $(i=1,2,3\ldots)$ telle que F_k étant un point quelconque de E_s et $F_k^{n_i}$ une suite déterminée des points des frontières des D_{n_i} qui tend vers F_k lorsque $i\to\infty$, la d. d. $\delta_k^{n_i}$ de la famille S qui passe par $F_k^{n_i}$ tend vers une position déterminée δ_k $(k=1,2,\ldots N_s)$. La d. d. δ_k passe par F_k et ne contient pas de points intérieurs à D. Deux d. d. δ_k ne se coupent pas, car autrement les d. d. $\delta_k^{n_i}$ se couperaient aussi pour i assez grand. On peut construire des ensemble E_s $(s=1,2,3,\ldots.)$ de manière que $E_s\subset E_{s+1}$.

Supposons que la suite partielle de fonctions qui correspond

$$\begin{array}{llll}
\text{à } E_1 \text{ soit} & f_1^1,\ f_2^1\ldots & & f_s^1\ldots\\
\text{à } E_2 \quad " & f_1^2,\ f_2^2\ldots & & f_s^2\ldots\\
\ldots & \ldots & & \\
\text{à } E_s \text{ soit} & f_1^s,\ f_2^s\ldots & & f_s^s\ldots\\
\ldots & \ldots & &
\end{array}$$

et remarquons que l'on peut considérer la suite $f_1^{s+1},\ f_2^{s+1},\ f_3^{s+1}\ldots$ comme suite partielle de la suite $f_1^s,\ f_2^s,\ f_3^s\ldots$ $(s=1,2,3,\ldots)$. L'ensemble $T=E_1+E_2+\ldots$ est partout dense sur la frontière de D. Si F est un point de cet ensemble il appartient à E_s pour s assez grand, donc par F il passe une d. d. δ qui ne contient pas de points intérieurs à D, d'ailleurs deux d.d. δ qui passent par des points différents de T ne se coupent pas. Si F'est un point quelconque de la frontière de D il existe une suite de points de l'ensemble T qui tend vers F' et telle que les d.d. δ correspondantes tendent vers une d.d. δ' qui passe par F'. δ' ne contient pas de points intérieurs à D. Deux d.d. δ' ou d.d. δ et δ' ne se coupent pas, car autrement les d.d. δ qui tendent vers ces

d. d. devraient se couper aussi. D'après les raisonnements qui suivent la remarque qui précède le lemme III D est donc l. a.

Lemme IV. Considérons un domaine polygonal P l. a. et un côté BC de P. Supposons que ce côté n'a pas de points communs avec une coupure de P[7]*). Si on fait glisser les sommets B et C sur les côtés voisins de BC ou sur leurs prolongements de manière que le côté BC reste parallèle à sa direction primitive, le polygone P' ainsi obtenu est encore l. a., pourvu que le déplacement parallèle soit assez petit.*

Je ferai d'abord une remarque évidente: considérons une d. d. de la famille S relative au polygone P et soit F l'ensemble (connexe d'après le lemme II) des points de la frontière de P qui appartiennent à la d.d. considérée. Si l'on déplace parallèlement la d. d., tous ses points qui n'appartiennent pas à un voisinage (arbitrairement restreint) de l'ensemble F restent extérieurs à P, pourvu que le déplacement parallèle soit assez petit. En effet, le nombre des côtés de P étant fini, la distance de la d. d. des côtés qui ne contiennent pas F est supérieure à un nombre positif. Nous pouvons d'ailleurs supposer, en vertu de la remarque qui suit le lemme II, que les extrémités des d. d. de la famille S appartiennent à la frontière de P. Cela posé, nous pouvons établir une correspondance biunivoque et continue entre les points des côtés parallèles BC et $B'C'$ des polygones P et P' ainsi des côtés voisins AB et $A'B'$, CD et $C'D'$ de manière que les sommets A, B, C, D correspondent aux sommets A', B', C', D' et que la distance des points correspondants soit très petite. Si δ est une d.d. de la famille S relative au polygone P et qui passe par un point M d'un des côtés AB, BC, CD, considérons la d.d. δ^* parallèle et de la même direction que δ et qui passe par le point M' qui correspond à M. On voit, en tenant compte de la remarque qui vient d'être faite, que si le déplacement parallèle est assez petit, les d.d. δ^* ne contiennent pas de points intérieurs à P'; il est d'autre part évident (les angles étant conservés) que les d. d. δ^* ne se coupent pas. Les d.d. δ^* et les d.d. δ qui aboutissent aux côtés de P autres que AB, BC, CD constituent une famille S pour le polygone P' qui est donc l. a. (Les d. d. δ issues des côtés autres que AB, BC, CD ne contiennent pas de points intérieurs à P', car autrement une de ces d.d. s'approcherait autant que l'on veut du côté BC, or on voit aisément, en tenant compte de ce que les d. d. de S ne se coupent pas, que c'est impossible). Le raisonnement s'étend, moyennant des modifications insignifiantes, au cas où quelques uns des côtés considérés de P auraient une longueur infinie. Ainsi p. ex si le côté AB est voisin du

[7]) On suppose aussi que les extrémités B et C n'appartiennent pas à une coupure.

côté qui s'étend du sommet B vers l'infini et si l'on déplace parallèlement ce dernier on peut considérer comme correspondants deux points M et M', MM' étant parallèle à AB. Lorsque M s'éloigne indéfiniment sur le côté $B\infty$ la d. d. de la famille S qui passe par M ne peut s'approcher indéfiniment d'un point Q de la frontière de P, car alors la d.d. de S issue d'un point fixe M_0 de $B\infty$ devrait passer par Q, or cela est impossible en vertu du lemme II (on suppose que la d. d. issue de M ne coïncide pas avec $B\infty$: ce cas particulier se traite aisément).

§ 2. Considérons dans le plan de la variable w une courbe Γ simple, fermée et qui est la réunion d'un nombre fini d'arcs analytiques. Γ limite un domaine borné D qui contient l'origine. Désignons par $z=\varphi(w)$ la fonction qui représente conformément D sur le cercle $|z|<1$ de manière que $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)>0$. Faisons varier un peu la courbe Γ et désignons par δw le déplacement du point d'affixe w compté suivant la normale à Γ en w et par dw la différentielle de w le long de la courbe Γ primitive. Soit enfin y un point fixe de D et posons $\varphi(y)=x$. *G. Julia* a fait connaître (loc. cit. [4]) *la formule suivante* pour la variation de $\varphi(y)$

$$\delta\varphi(y)=\int_\Gamma \frac{x(x+z)}{x-z}\,\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varphi'^2(w)\,\delta w\,dw}{z^2} \tag{1}$$

On a posé ici $z=\varphi(w)$ et w parcourt la courbe Γ dans le sens positif (donc $|z|=1$), on suppose d'ailleurs que les conditions $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)>0$ restent toujours vérifiées. On voit aisément que l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varphi'^2(w)\,\delta w\,dw}{z^2}$$

est *positive* si la variation δw a lieu dans le sens de la normale *extérieure* au domaine D et qu'elle est *négative* dans le cas où cette variation a lieu dans le sens de la normale *intérieure*.

Désignons par $w=f(z)$ la fonction inverse de $\varphi(w)$. x étant un point fixe du cercle $|z|<1$ je me propose de calculer la variation de $f(x)$ lorsqu'on déforme Γ et les conditions $f(0)=0$, $f'(0)>0$ restent toujours vérifiées. Posons $y=f(x)$. Après la variation du contour Γ à la valeur x correspond la valeur $\bar{y}=y+\delta f(x)$ et à la valeur y la valeur $\bar{x}=x+\delta\varphi(y)$. Dans une transformation infiniment voisine de $w=f(z)$ à un arc de courbe parcouru de x vers $\bar{x}$ correspond un arc de courbe parcouru de $\bar{y}$ vers y. Nous avons donc la relation

$$\delta f(x)=-f'(x)\,\delta\varphi(y)$$

qui nous fournit, en tenant compte de (1), la formule:

$$\delta f(x)=\int_\Gamma \frac{x f'(x)\,(x+z)}{z-x}\left[\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varphi'^2(w)\,\delta w\,dw}{z^2}\right] \qquad z=\varphi(w) \tag{2}$$

M. Julia a établi aussi la formule:

$$\delta\varphi'(0)=\frac{-\varphi'(0)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'^2(w)\,\delta w\,dw}{z^2}$$

Puisque $f'(0)=\dfrac{1}{\varphi'(0)}$ on aura donc aussi

$$\delta f'(0)=f'(0)\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(w)\,\delta w\,dw}{z^2} \tag{2'}$$

On voit aisément que les formules (2) et (2') s'étendent au cas où D n'est pas borné et — avec quelques précautions — au cas où les parties de Γ que l'on fait varier s'étendent elles-mêmes à l'infini, et au cas où D est muni de coupures.

§ 3. Considérons un domaine polygonal D simplement connexe (borné ou non) qui contient l'origine et dont la frontière peut contenir des coupures qui sont des segments de droites ou des d. d. En conservant les notations du § 2 nous allons calculer la variation de $f(x)$ lorsqu'on allonge un des segments (ou une des d. d.) en question d'une quantité infiniment petite δl. On suppose que les conditions $f(0)=0$, $f'(0)>0$ restent toujours vérifiées.

Considérons d'abord la fonction $u=\psi(x, d)$ qui représente conformément le cercle $|x|<1$ sur le cercle $|u|<1$ muni d'une coupure le long du segment: $1-d<u<1$ (d est un petit nombre positif) de manière que $\psi(0, d)=0$, $\psi'_x(0, d)>0$. On trouve facilement que la fonction ψ satisfait à la relation:

$$4(1-d)\left(\psi+\frac{1}{\psi}\right)-(2-d)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-2d^2=0$$

d'où l'on déduit le développement de ψ suivant les puissances de d

$$\psi(x, d)=x+\frac{x(x+1)}{4(x-1)}\,d^2+\ldots$$

Si le cercle $|u|<1$ est fendu suivant le segment: $1-d<|u|<1$, $\arg u=\Theta$ il suffit de remplacer $\psi(x, d)$ par $\psi\left(x e^{-i\Theta}, d\right)e^{i\Theta}$ et en posant $e^{i\Theta}=z_0$ il vient

$$\psi(x, d) = x + \frac{x(x+z_0)}{4(x-z_0)} d^2 + \ldots \tag{3}$$

Cela posé, considérons la fonction $f(z)$, $[f(0)=0,\ f'(0)>0]$ qui représente conformément le cercle $|z|<1$ sur le domaine D et supposons qu'à l'extrémité P de la coupure rectiligne correspond le point d'affixe $z_0 = e^{i\Theta}$. Au cercle $|u|<1$ (muni de la coupure) la fonction $f(u)$ fait correspondre le domaine D^* qui s'obtient de D si on prolonge la coupure rectiligne suivant un petit arc analytique PM qui est tangent en P à la coupure. La fonction

$$\lambda(x) = f[\psi(x, d)] = f(x) + \frac{x f'(x)(x+z_0)}{4(x-z_0)} d^2 + \ldots \tag{4}$$

représente le cercle $|x|<1$ sur le domaine D^* $[\lambda(0)=0,\ \lambda'(0)>0]$. En remplaçant l'arc PM par sa projection orthogonale PN sur le prolongement de la fente rectiligne on obtient un domaine D^{**}; soit $\mu(x)$ $[\mu(0)=0,\ \mu'(0)>0]$ la fonction qui représente conformément le cercle $|x|<1$ sur le domaine D^{**}. Evaluons une limite supérieure de $|\mu(x)-\lambda(x)|$: on pourra appliquer à la fonction $\mu(x)$ la formule (2), l'intégration ayant lieu des deux côtés du segment PN[8]. D^{**} étant un domaine polygonal, $\mu(z)$ est représentée par l'intégrale de Schwarz, donc si w_1 est l'affixe de N, $\mu(z_1)=w_1$ et z voisin de z_1, on aura le développement suivant les puissances de $(z-z_1)$:

$$\mu'(z) = A_1(z-z_1) + A_2(z-z_1)^2 + \ldots \qquad (A_1 \neq 0) \tag{5}$$

Si $\varphi(w)$ est la fonction inverse de $\mu(z)$ on aura donc

$$\varphi'(w) = A_1^{-1}(z-z_1)^{-1} + B_0 + B_1(z-z_1) + \ldots$$

$$\varphi'^2(w) = A_1^{-2}(z-z_1)^{-2} + 2B_0A_1^{-1}(z-z_1)^{-1} + \ldots \tag{6}$$

D'autre part l'intégration de (5) fournit l'égalité

$$w - w_1 = \frac{1}{2} A_1 (z-z_1)^2 + \ldots \tag{7}$$

[8]) M. Julia suppose que le contour du domaine est une courbe simple fermée mais l'extension de sa formule au cas où il y a des coupures ne présente aucune difficulté, toutefois l'application de la formule (2) à un seul côté du segment PN conduit à une intégrale infinie. Nous assimilons d'ailleurs $\lambda(x)-\mu(x)$ à $\delta\mu(x)$ en négligeant les accroissements d'ordre supérieur.

On a donc inversement

$$z - z_1 = \sqrt{\frac{2}{A_1}}\sqrt{w-w_1} + C_1(w-w_1) + C_2(w-w_1)^{3/2} + \ldots \tag{8}$$

où le radical $\sqrt{\frac{2}{A_1}}$ est déterminé, *les signes du radical* $\sqrt{w-w_1}$ *sont différents des deux côtés de la coupure* PN. En portant (8) dans (6) il vient:

$$\varphi'^2(w) = \frac{1}{2} A^{-1}(w-w_1)^{-1} + D_1(w-w_1)^{-1/2} + \ldots \tag{9}$$

D'autre part, on a selon (8):

$$\frac{x+z}{(z-x)z^2} = \frac{x+z_1}{(z_1-x)z_1^2} + E_1\sqrt{w-w_1} + \ldots \tag{10}$$

(9) et (10) fournissent le développement:

$$\frac{\varphi'^2(w)(x+z)}{(z-x)z^2} = \frac{x+z_1}{2A_1(z_1-x)z_1^2}\,\frac{1}{w-w_1} + \frac{F_1}{\sqrt{w-w_1}} + \ldots \tag{11}$$

Appliquons maintenant la formule (2) en désignant par δw la différence des affixes d'un point de l'arc PM et de sa projection orthogonale sur le segment PN et en distinguant au moyen des indices * et ** les expressions qui correspondent aux points de même affixe, mais qui se trouvent sur les côtés opposés de la coupure PN. Il vient, N' étant un point du segment PN:

$$\lambda(x) - \mu(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot x f'(x) \cdot \lim_{N'\to N} \int_{PN'} \left\{ \left[\frac{x+z}{(z-x)z^2}\varphi'^2(w) \right]^* - \left[\frac{x+z}{(z-x)z^2}\varphi'^2(w) \right]^{**} \right\} \delta w\, dw$$

En vertu de (11) on aura donc, si PN est assez petit:

$$|\lambda(x) - \mu(x)| < \frac{1}{2\pi} |x f'(x)| \cdot 3\,|F_1| \cdot \operatorname{Max}|\delta w| \int_{PN} \left| \frac{dw}{\sqrt{w-w_1}} \right| \tag{12}$$

Or, l'intégrale qui figure au second membre est de l'ordre de $\sqrt{PN}$, tandis que Max $|\delta w|$ est de l'ordre supérieur à PN.

L'arc de courbe PM est l'image de la fente: $1-d<|z|<1$, $\arg z=\theta$ fournie par la fonction $f(z)$ qui représente $|z|<1$ sur D, z_0 étant le point qui correspond à P, d'affixe w_0, on aura un développement analogue à (7):

$$w-w_0=H(z-z_0)^2+\dots \qquad (H\neq 0)$$

qui montre que d^2 est équivalent à $\frac{PM}{|H|}$ ou encore à $\frac{PN}{|H|}$. La différence $\lambda(x)-f(x)$ est donc, d'après (4), équivalente à

$$\frac{xf'(x)(x+z_0)}{4(x-z_0)}\,\frac{PN}{|H|} \tag{13}$$

D'après (12) et (13) $|\lambda(x)-\mu(x)|$ est négligeable par rapport à $|\lambda(x)-f(x)|$, la formule (13) représente donc la variation cherchée. Il est clair que si l'on raccourcit la coupure rectiligne de PN il faut changer le signe dans (13). En définitive nous obtenons la formule:

$$\delta f(x)=\pm\frac{xf'(x)}{4|H|}\,\frac{x+z_0}{z_0-x}\,\delta l \tag{14}$$

où le signe $+$ correspond au raccourcissement et le signe $-$ à l'allongement de la coupure rectiligne d'une quantité positive infiniment petite δl ($|H|$ ne dépend pas de x). L'analogie de cette formule avec la formule (2) du § 2 est évidente.

Pour établir une formule analogue à (2') on peut utiliser l'intégrale de Cauchy: puisque

$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(x)}{x^2}\,dx$. ($C$ est un petit cercle de centre 0) on aura, d'après (14)

$$\delta f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{\delta f(x)}{x^2}\,dx=\pm\frac{\delta l}{4|H|}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f'(x)}{x}\,\frac{x+z_0}{z_0-x}\,dx$$

$$\delta f'(0)=\pm\frac{\delta l}{4|H|}f'(0)\,^{9)}. \tag{14'}$$

§ 4. Considérons la sous-classe L_n des fonctions $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ de la classe L, qui représentent le cercle unité sur un domaine *polygonal* limité par n côtés (de longueur finie ou non) au plus. La famille de fonctions L étant normale (cf. Montel loc. cit. [6])), de toute suite infinie de fonctions de la classe L_n on peut extraire une autre qui tend uniformément vers une fonction $\theta(z)$ univalente dans le cercle $|z|<1$ [$\theta(0)=0$, $\theta'(0)=1$], $\theta(z)$ représente évidement ce cercle sur un domaine polygonal limité par n côtés au plus, qui, d'après le lemme III, est l. a. Donc, *de toute suite infinie de fonctions de la classe L_n on peut extraire une suite partielle qui tend vers une fonction de la même classe.*

x étant fixé supposons que $f(z)$ parcourt l'ensemble de toutes les fonctions de la classe L_n; la variable $u=\frac{x}{f(x)}$ décrira un ensemble Δ_x^n D'après la propriété que nous venons d'établir Δ_x^n *est un ensemble fermé*. Or, la frontière [10]) de Δ_x^n contient un ensemble E de points, qui est partout dense sur cette frontière, chaque point M de E jouissant de la propriété suivante: il existe un point P tel que chaque point intérieur au cercle dont le centre est P et dont le rayon est PM n'appartient pas à Δ_x^n. En effet, si F est un point quelconque de la frontière de Δ_x^n, considérons un cercle C de centre F et de rayon ε arbitrairement petit. Le cercle C' concentrique à C et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ contient un point P extérieur à Δ_x^n. Il existe un cercle de centre P dont la périphérie passe par un point M de la frontière et dont l'intérieur ne contient pas de points de Δ_x^n; le rayon de ce cercle ne dépasse pas $\frac{\varepsilon}{2}$, donc M appartient au cercle C. Considérons un point M quelconque de l'ensemble E et soit u_0 l'affixe du point P correspondant. Si $f(z)$ parcourt l'ensemble de fonctions de la classe L_n le module

9) L'emploi de l'intégrale de Cauchy permet aussi de déduire de la formule de M. Julia la formule générale'

$$\delta a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Big[na_n+2(n-1)a_{n-1}z^{-1}+2(n-2)a_{n-2}z^{-2}+\dots+ +2a_1z^{-(n-1)}\Big]\frac{\varphi'^2(w)\,\delta w\,dw}{z^2}$$

pour la variation des coefficients du développement

$$f(z)=a_1z+\dots+a_nz^n+\dots \qquad (a_1>0)$$

10) Je dis qu'un point F de Δ_x^n appartient à la frontière de Δ_x^n si un cercle de centre F et de rayon arbitrairement petit contient un point P extérieur à Δ_x^n. Un point de Δ_x^n qui n'appartient pas à la frontière est donc le centre d'un cercle dont tous les points appartiennent à Δ_x^n.

$$\left| \frac{x}{f(x)} - u_0 \right|$$

atteint le *minimum* lorsque $f(x) = f_0(x)$, l'expression $\dfrac{x}{f_0(x)}$ étant l'affixe du point M. Etudions le domaine polygonal D_0 que la fonction $f_0(z)$ fait correspondre au cercle unité. Nous allons calculer dans ce but la variation de l'expression

$$T = \frac{x f'(0)}{f(x)} - u_0$$

lorsqu'on déforme le domaine D_0 (x et u_0 étant fixes et les conditions $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ étant toujours vérifiées). L'on a

$$\delta T = \frac{x \, \delta f'(0)}{f(x)} - \frac{x f'(0)}{f^2(x)} \delta f(x)$$

d'où, d'après (2) et (2') du § 2, la formule générale (Γ_0 est la frontière de D_0):

$$\frac{\delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}} = \int_{\Gamma_0} \left[\frac{x f'(0)}{T f(x)} + \frac{x^2 f'(0) f'(x)(x+z)}{T f^2(x)(x-z)} \right] \cdot \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi'^2(w) \, \delta w \, dw}{z^2} \tag{15}$$

tandis que si on change la longueur d'une coupure on aura d'après (14) et (14') du § 3

$$\frac{\delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}} = \pm \frac{\delta l}{4|H|} \left[\frac{x f'(0)}{\mathrm{T} f(x)} + \frac{x^2 f'(0) f'(x)(x+z_0)}{\mathrm{T} f^2(x)(x-z_0)} \right] \tag{16}$$

si z_0 correspond à l'extrémité de la coupure. *Supposons que l'on déforme D_0 de manière qu'il reste l. a. et limité par n côtés au plus: la partie réelle de $\dfrac{\delta \mathrm{T}}{T}$ devra être non négative:* en effet, dans le cas contraire, on aura une fonction $f_1(z)$ pour laquelle $|T|$ est plus petit que pour $f_0(z)$, la fonction $f_2(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_1'(0)}$ serait de la classe L_n et l'on aurait

$$\left| \frac{x}{f_2(x)} - u_0 \right| < \left| \frac{x}{f_0(x)} - u_0 \right| \tag{17}$$

ce qui est impossible. Or, le crochet des formules (15) ou (16) est une fonction homographique de z (ou de z_0): si la variable z décrit la circonférence $|z| = 1$ cette fonction décrit une circonférence et par suite *sa partie réelle ne peut s'annuler plus de deux fois.* Les multiplicateurs:

$$\text{(M)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi'^2(w) \, \delta w \, dw}{z^2} \qquad \text{et} \qquad \pm \frac{\delta l}{4|H|}$$

sont toujours réels, le premier est positif (§ 2) lorsque la variation δw a lieu dans le sens de la normale extérieure au domaine considéré et négatif dans le cas où cette variation a lieu dans le sens de la normale intérieure; dans le second multiplicateur δl est essentiellement positif et on doit prendre (§ 3) le signe $+$ si on raccourcit la coupure de δl et le signe $-$ si on allonge la coupure de la même quantité. Il est aisé de voir que *le domaine D_0 ne peut être limité par plus de deux côtés qui n'ont pas de points communs avec des coupures.* Dans le cas contraire, en effet, il existerait un côté (du genre considéré) du polygone D_0 tel que z décrivant l'arc de $|z| = 1$ qui correspond à ce côté, la partie réelle du crochet qui figure dans le second membre de (15) conserverait un signe constant; il en résulte, en tenant compte du signe du premier des multiplicateurs (M) que l'on pourrait déplacer le côté considéré parallèlement à lui-même de manière que la partie réelle de $\dfrac{\delta T}{T}$ serait négative [11]). Or, le domaine obtenu par ce déplacement serait encore, d'après le lemme IV, l. a.; nous arrivons donc a une contradiction avec la propriété de D_0 qui vient d'être signalée.

On voit de même que *le domaine D_0 contient au plus deux coupures,*

---

[11]) Le cas où le côté considéré a une longueur infinie ne présente pas de difficulté, on constate sans peine que l'intégrale (15) reste finie. Si AB est le côté considéré et $A'B'$ ce côté dans sa nouvelle position ($A'B' \parallel AB$, $A'A$ et BB' sont situés sur les côtés voisins ou leurs prolongements) et si le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ fait un angle α aigu avec $\overrightarrow{AB}$ et de même le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ un angle aigu β avec $\overrightarrow{BA}$ il suffit de déplacer les points de AB normalement à AB. Si l'angle α, par exemple, est obtus, considérons la perpendiculaire AP abaissée de A sur $A'B'$. Si alors l'angle intérieur γ du polygone au sommet A est inférieur (supérieur) à π est si le déplacement s'effectue vers l'intérieur (l'extérieur) du polygone, on peut déplacer les points de AA' normalement à AA' vers la ligne brisée APA' et puis les points de AB normalement à AB. Si l'angle γ est $< \pi$ ($> \pi$) et si le déplacement s'effectue vers l'extérieur (l'intérieur) du polygone, on remplace d'abord AB par APB' en déplaçant les points de AB normalement à AB, puis on remplace APB' par $AA'B'$ en déplaçant les points de AP normalement à AP. Les déplacements complémentaires pourraient fournir une contribution positive dans lapartie réelle de $\dfrac{\delta T}{T}$: cependant elle est négligeable par rapport à la contribution négative fournie par le déplacement des points de AB normalement à AB.

autrement il existerait une coupure telle que si z_0 est la valeur de z qui correspond à son extrémité, le second membre de l'équation (16) aurait une partie réelle non nulle: en allongeant ou en raccourcissant un peu la coupure et en effectuant ensuite une homothétie par rapport à l'origine on obtiendrait une fonction $f_2(x)$ de la classe L_n telle que l'inégalité (17) serait vérifiée, ce qui est pourtant impossible.

§ 5. Ainsi le domaine D_0 a un nombre de côtés indépendant de n (que l'on peut supposer grand). Il en résulte qu'outre les variations de ce domaine considérées au § 4 on peut introduire d'autres variations qui augmentent le nombre de côtés: l'expression $\frac{\partial T}{T}$ *doit avoir toujours sa partie réelle non négative.* On peut montrer maintenant que D_0 *ne contient qu'une seule coupure au plus.* Supposons, en effet, qu'il y en a deux (remarquons que deux coupures d'un domaine l. a. n'ont pas de points communs). D'après ce que nous avons vu à la fin du § 4 les valeurs z_1 et z_2 de z qui correspondent aux extrémités des coupures doivent annuler la partie réelle du crochet de (15). Or, cette partie réelle ne s'annule que pour deux valeurs de $z\,(\,|\,z\,|=1)$ au plus, par suite elle reste positive d'un côté d'une quelconque des deux coupures. Considérons une coupure MN dont N est l'extrémité et un point A sur le côté de la coupure où la partie réelle du crochet est positive, nous remplacerons le côté AM (ou le côté qui s'étend de A vers l'infini) de la coupure par la ligne brisée composée d'un petit segment AB situé à l'intérieur du domaine primitif, segment qui est perpendiculaire à la coupure et du segment (ou d. d.) parallèle à la coupure et qui passe par B. Le domaine ainsi varié est encore l. a. En appliquant la formule (15) on voit que $\frac{\partial T}{T}$ aurait sa partie réelle négative [12]).

Notre raisonnement prouve de plus que *si la coupure existe les deux valeurs* z_1 et z_2 *qui annulent la partie réelle du crochet* (15) *correspondent aux points de la coupure (une d'elles au moins à l'extrémité de la coupure).*

Je dis maintenant que *les points extérieurs à* D_0 *n'existent pas.* Supposons le contraire. L'unique coupure aboutissant au plus aux 2 côtés du polygone D_0, un troisième côté n'aurait pas de point commun avec la coupure. De plus, on peut supposer que la partie réelle du crochet de (15) garde un signe constant pour les z qui correspondent à ce côté, il serait donc possible de reprendre les considérations du § 4: un déplacement parallèle convenable du côté en question conduit à une contradiction. Par suite D_0 n'est séparé de l'extérieur que par deux côtés au plus, D_0 *est donc un angle d'ouverture* $\leqslant 2\pi$ *(en particulier un demi-plan ou une bande comprise entre deux droites parallèles) muni d'une seule coupure au plus (qui est un segment fini ou une demi-droite).* S'il existe une coupure de longueur finie, traçons la d. d. du système S qui contient cette coupure. Cette d. d. délimite avec une partie de la frontière de D_0 un angle Ω situé à l'extérieur de D_0. Considérons un petit segment AB situé sur un des côtés de D_0 et choisi de façon que la partie réelle du crochet de (15) ne s'annule pas pour les z qui correspondent aux points du segment. S'il existe une coupure de longueur finie, nous supposons de plus que AB est situé sur la frontière de Ω et qu'il n'a pas de points communs avec la coupure. Il est clair que si l'on fait varier D_0 en remplaçant le segment AB par la ligne brisée $ACDB$ où $AC=BD$, CD est parallèle à AB et les angles en C et D droits, la partie réelle de $\frac{\partial T}{T}$ sera négative, pourvu que le segment CD soit situé du côté convenable de AB. Or, il est aisé de voir que si l'extérieur de D_0 ou (dans le cas où la coupure de longueur finie existe) Ω est un angle d'ouverture $\geqslant \frac{\pi}{2}$ (évent. un demi-plan ou deux demi-plans) le domaine D_0 ainsi varié reste l. a. Il n'en est pas de même si l'extérieur de D_0 où Ω est un angle d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{2}$. Désignons, dans ce cas, le sommet de l'angle par S, ses côtés par SC_1 et SC_2. Supposons, par exemple, que AB soit situé sur SC_1, le point A étant plus près que B du sommet S. Si la partie réelle du crochet de (15) est négative pour les valeurs de z qui correspondent au segment AB, nous remplacerons AB par la ligne brisée $ACDB$ située à l'extérieur de D_0, de manière que AC soit parallèle à SC_2, CD parallèle et DB perpendiculaire à SC_1. Si la partie réelle du crochet de (15) est positive pour les valeurs de z qui correspondent au segment AB on remplacera AB par la ligne brisée $ACDB$ située à l'intérieur de D_0 de manière que AC soit perpendiculaire et CD parallèle à SC_1 et DB parallèle à SC_2. Il est aisé de vérifier que dans les deux cas le domaine varié reste l. a. [13]), nous aboutissons donc encore à une contradiction.

En résumé D_0 *est le plan entier muni d'une seule coupure qui est une demi-droite.* Appelons pour abréger par D_1 des plans coupés sui-

[12]) On vérifie aisément que l'intégrale de (15) reste finie dans le cas où la coupure est une d. d.

[13]) On peut supposer p. ex. que les d. d. du système S sont parallèles à SC_2

vant une seule demi-droite ou des demi-plans (un demi-plan peut être considéré comme limite des plans coupés suivant une d. d.). Chaque point de la frontière de Δ_x^n est donc (§ 4) limite de points dont les affixes sont égaux à $\frac{x}{f(x)}$, où $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ représente le cercle unité sur un domaine D_1. La famille de $f(z)$ étant normale et limite de domaines D_1 étant encore un domaine D_1 on voit que *chaque* point de la frontière de Δ_x^n a pour affixe $\frac{x}{f(x)}$, où $f(z)$ représente le cercle unité sur un domaine D_1.

Considérons maintenant une fonction $f(z)$ *quelconque* de la classe L; d'après le lemme I du § 1 elle est limite uniforme pour $k\to\infty$ d'une suite de fonctions $f_k(z)$ qui représentent le cercle unité sur des domaines polygonaux l. a. Le point d'affixe $\frac{xf_k'(0)}{f_k(x)}$ tend vers $\frac{x}{f(x)}$, car $f_k'(0)\to 1$ lorsque $k\to\infty$. On voit donc, en posant $|x|=r$, que tout point de la frontière du domaine fermé Δ_r [14]) du théorème I de l'Introduction est limite des points des frontières des Δ_x^n pour $n\to\infty$ et a pour affixe $\frac{x}{f(x)}$ où $f(z)$ représente le cercle $|z|<1$ sur un domaine D_1. *La frontière du domaine Δ_r fait donc partie de la frontière du domaine Δ_r^* décrit par $u=\frac{x}{f(x)}$ lorsque $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ parcourt l'ensemble des fonctions qui représentent le cercle unité sur le plan coupé suivant une seule d. d. ou sur un demi-plan.*

6. Nous allons déterminer directement le domaine Δ_r^* en utilisant la formule de Schwarz:

$$f(z)=\int_0^z\frac{1+\beta z}{(1+\alpha z)^3}\,dz \tag{18}$$

qui donne l'expression la plus générale des fonctions dont il s'agit ($|\alpha|=|\beta|=1$, si $\alpha=\beta$ $f(z)$ représente le cercle $|z|<1$ sur un demi-plan). De (18) on tire en intégrant:

$$\frac{x}{f(x)}=\frac{(1+\alpha x)^2}{1+\frac{\alpha+\beta}{2}x}$$

[14]) Il est évident que Δ_r ne dépend que du module r de x: il suffit de remplacer $f(x)$ par $e^{-i\vartheta}f(e^{i\vartheta}x)$. Δ_r est fermé d'après le lemme III du § 1.

En posant $\alpha x=s$, $\beta x=t$ on voit donc que *Δ_r^* est le domaine couvert par la variable*

$$u=\frac{(1+s)^2}{1+\frac{s+t}{2}}$$

lorsque les variables complexes s et t décrivent les circonférences $|s|=|t|=r=|x|$.

En posant $t=s$ il vient $u=1+s$, et si s décrit la circonférence $|s|=r$, u décrit donc la circonférence C dont le centre a pour affixe 1 et dont le rayon est r. *L'intérieur de C n'appartient pas* à Δ_r^*. En effet, si s est fixe et si t décrit la circonférence $|t|=r$, u décrit une circonférence Γ_s, au cercle $|t|<r$ correspond d'ailleurs l'intérieur de Γ_s. Or on trouve que $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=s}=-\frac{1}{2}$, donc les circonférences Γ_s et C se touchent extérieurement au point d'affixe $1+s$. En posant $s=re^{i\varphi}$ on trouve pour le rayon ρ du cercle limité par Γ_s l'expression

$$\rho(\varphi)=\frac{r(1+r^2+2r\cos\varphi)}{2(1+r\cos\varphi)} \tag{19}$$

qui montre que $\rho(\varphi)$ décroît si φ croît de 0 à π. Cette variation monotone de $\rho(\varphi)$ prouve que si Γ_s ne coupe pour aucune valeur de φ l'axe réel négatif — et cela a bien lieu si r est assez petit — le domaine Δ_r^* est limité par C et par une frontière extérieure F, il est donc *doublement connexe*. On s'assure cependant aisément que si r est assez voisin de 1 et φ convenablement choisi Γ_s coupe l'axe réel négatif. En tenant compte de la variation monotone de $\rho(\varphi)$ et du fait connu que pour *toute* fonction univalente $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, $|u|\geq(1-r)^2$ on voit que Δ_r^* est alors *triplement connexe* [15]): il est limité par la circonférence C, par une autre courbe fermée C_0 qui entoure l'origine et par la frontière extérieure F. Dans tous les cas Δ_r^* découpe sur l'axe réel positif les segments: $(1-r)^2\leq u\leq 1-r$ et $1+r\leq u\leq(1+r)^2$. Δ_r^* est borné, car $|u|\leq(1+r)^2$. Passons à la détermination du domaine Δ_r en se rappelant (§ 5) que sa frontière fait partie de la frontière de Δ_r^*. *La circonférence C n'est pas frontière de Δ_r*, car aux points de C correspondent des fonctions qui représentent le cercle unité sur un demi-plan. Or le raisonnement des §§ 4 et 5 s'applique ici, l'ensemble E du § 4 est ici identique avec C et en posant $u_0=1$ on aboutit à une contradi-

[15]) On utilise aussi le fait facile à vérifier que lorsque φ croit de 0 à π, Γ_s n'est tangente à l'axe réel que 3 fois au plus.

ction en supposant qu'un point de C appartient à la frontière de Δ_r [16]. Au contraire, *la courbe* C_0 *fait partie de la frontière de* Δ_r car Δ_r ne contient pas le cercle $|u| \leqslant (1-r)^2$. Donc Δ_r *est la somme de* Δ_r^* *et de l'intérieur du cercle* C. Δ_r est donc simplement connexe pour les petites valeurs de r et doublement connexe pour les valeurs de r assez voisines de 1. *On voit aisément que* Δ_r *est identique avec le domaine* D_r *décrit par la variable*

$$u = \frac{(1+s)^2}{1+\frac{s+t}{2}}$$

lorsque s *et* t *décrivent des cercles* $|s| \leqslant r$ *et* $|t| \leqslant r$. On voit, en effet, immédiatement que $\Delta_r^* \subset D_r$ et qu'un point de la frontière de D, fait partie de la frontière de Δ_r^*. En posant $s=t$ il vient $u=1+s$, donc l'intérieur du cercle C appartient à D_r. Le domaine limité par la courbe fermée C_0 (qui n'existe que si r est assez grand) n'appartient pas à D_r, car l'origine ne lui appartient pas. Nous obtenons ainsi le théorème *I* de l'Introduction.

§ 7. En posant $s+t=0$ l'on a $u=(1+s)^2$, Δ_r contient donc (ce qui est évident a priori) la région M_r qui correspond aux domaines étoilés par rapport à l'origine et qui a été déterminée par A. Marx (cf. Introduction). Le segment de l'axe réel positif qui appartient à Δ_r:

$$(1-r)^2 \leqslant u \leqslant (1+r)^2$$

coïncide avec le segment intercepté sur cet axe par M_r (il coïncide d'ailleurs avec le segment couvert par u lorsque $f(z)$ parcourt l'ensemble de *toutes* les fonctions univalentes de la classe E). Cependant Δ_r *contient, pour toute valeur de* r, *des points qui n'appartiennent pas à* M_r. En effet, si $|s| \leqslant r$ on voit que $|\arg(1+s)^2|$ atteint sa plus grande valeur pour $s_1 = -r^2 + ir\sqrt{1-r^2}$ et $s_2 = -r^2 - ir\sqrt{1-r^2}$. Posons $u_1 = (1+s_1)^2$ et considérons la fonction

$$u(t) = \frac{u_1}{1+\frac{s_1+t}{2}}$$

Si t décrit le cercle $|t| \leqslant r$, $u(t)$ décrit l'intérieur et la périphérie d'un cercle qui appartient à Δ_r. La circonférence Γ_{s_1} qui limite ce cercle passe par le point d'affixe u_1 qui correspond à la valeur $t=-s_1$.

[16]) Il est d'ailleurs évident que Δ_r contient des points dans le voisinage du point d'affixe 1.

Or $u'(-s_1) = -\frac{1}{2}u_1$ et s_1 n'est pas une imaginaire pure, donc la tangente à Γ_{s_1} au point u_1 ne coïncide pas avec le rayon qui joint u_1 à l'origine et on peut choisir t ($|t| \leqslant r$) de manière que $|\arg u(t)| > |\arg u_1|$.

§ 8. On peut considérer la somme des domaines Δ_r pour toutes les valeurs de $r<1$. Il est évident que $\Delta_r \subset \Delta_r'$ si $r<r'$. Si $s=re^{i\varphi}$, si φ est fixe mais différent de π et $r \to 1$, le rayon du cercle limité par Γ_s, qui est fourni par la formule (19) du § 6, et qui est plus petit que r, tend vers un. Or Δ_r est (§ 6) la somme du cercle C: $|u-1| \leqslant r$ et de la région décrite par Γ_s qui roule extérieurement autour de C lorsque φ varie de 0 à 2π. En faisant tendre r vers 1 on voit donc que la somme des Δ_r coïncide avec l'intérieur (mais non pas la périphérie) du cercle $|u-1|<3$, l'origine étant cependant exceptée. Nous obtenons ainsi le corollaire de l'Introduction.

§ 9. Considérons une valeur fixe x, $|x|=r<1$. Si $f(z)$ est univalente pour $|z|<1$ et si $f(0)=0$, $f'(0)=1$ la fonction

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+x}{1+\bar{x}\zeta}\right)-f(x)}{f'(x)\,(1-r^2)} \tag{20}$$

est univalente dans le cercle $|\zeta|<1$ et l'on a $g(0)=0$, $g'(0)=1$ [17]. Il est d'ailleurs clair que si $f(z)$ appartient à la classe L, il en est de même avec $g(\zeta)$, car le domaine décrit par $g(\zeta)$ se déduit de celui décrit par $f(z)$ au moyen de déplacements et d'homothéties et ces opérations transforment un domaine l. a. en un domaine l. a. De (20) on déduit inversement:

$$f(z) = \frac{g\left(\frac{z-x}{1-\bar{z}x}\right)-g(-x)}{g'(-x)\,(1-r^2)}$$

Si donc $f(z)$ parcourt l'ensemble de fonctions de la classe L, $g(\zeta)$ parcourt aussi cet ensemble. En posant dans (20) $\zeta=-x$ il vient

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-r^2}\cdot\frac{-x}{g(-x)}$$

[17]) Cf. p. ex. P. Montel. Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes p. 51.

Si $f(\dot z)$ parcourt l'ensemble de fonctions de la classe L, $\frac{-x}{g(-x)}$ décrit le domaine Δ_r. On en déduit de suite le théorème II de l'Introduction.

Streszczenie.

W pracy tej badam klasę L funkcyj $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorficznych w kole $|z| < 1$, przyjmujących w tem kole conajwyżej raz każdą wartość i odwzorowujących to koło na obszary linjowo osiągalne w znaczeniu węższem, t. j. takie że zbiór punktów nie należących do obszaru jest identyczny ze zbiorem punktów należących do pewnej rodziny domkniętych półprostych, przyczem dwie półproste należące do rodziny nie mogą się przecinać. Otrzymuję wyniki następujące:

I. Jeśli $\dot z$ ($|z| = r < 1$) jest ustalone a $f(z)$ przebiega wszystkie funkcje klasy L, to zmienna $u = \frac{z}{f(z)}$ zakreśla obszar domknięty Δ_r który jest obszarem zakreślonym przez zmienną

$$u = \frac{(1+s)^2}{1 + \frac{s+t}{2}},$$

gdy s i t przybierają wszelkie wartości z kół $|s| \leq r$ i $|t| \leq r$.

Wniosek. Jeśli $\dot z$ zakreśla koło $|\dot z| < 1$ a $f(z)$ przebiega wszystkie funkcje klasy L, to zmienna $u = \frac{\dot z}{f(z)}$ zakreśla wnętrze (ale nie brzeg) koła $|u - 1| < 3$, z wyłączeniem początku układu, przyczem jest $|\arg u| < 3 \cdot \frac{\pi}{2}$.

II. Jeśli z ($|z| = r < 1$) jest ustalone a $f(z)$ przebiega wszystkie funkcje klasy L, to zmienna $v = \frac{z f'(z)}{f(z)}$ zakreśla obszar Δ_r który jest z Δ_r jednokładny. Środek jednokładności leży w początku układu, a stosunek jednokładności ma wartość $\frac{1}{1 - r^2}$.

Krótki szkic dowodu twierdzenia I (bez wniosku) był odczytany przeze mnie na XIV Zjeździe Lekarzy i Przyrodników Polskich w Poznaniu (wrzesień 1933).

Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi.

par

M. Paul Montel.

1. Le présent travail concerne le théorème de Jacobi sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction analytique d'une variable possédant trois périodes indépendantes.

Je précise d'abord la notion de systèmes de périodes indépendantes en tenant compte de l'orientation des périodes infinitésimales. Cela permet une analyse du théorème de Jacobi.

Ce théorème exprime que les trois équations fonctionnelles obtenues en égalant à zéro les différences premières d'une fonction analytique pour trois valeurs de l'accroissement n'ont d'autre solution commune qu'une constante lorsque ces valeurs sont indépendantes. Si l'on remplace les différences premières par les différences d'ordre supérieur p, on obtient des équations fonctionnelles qui caractérisent les polynomes de degré $p-1$, ce qui constitue une extension du théorème de Jacobi.

Si l'on se borne aux fonctions d'une variable réelle, il suffit de deux équations fonctionnelles relatives à des accroissements indépendants.

Dans le cas des fonctions de k variables complexes ou réelles, les polynomes de k variables sont caractérisés respectivement par $2k+1$ ou $k+1$ équations fonctionnelles relatives à un nombre égal de systèmes de k périodes simultanées.

2. Soient ω_1, ω_2, ω_3 trois périodes dans le plan de la variable complexe z. Considérons le corps de périodes constitué par toutes les combinaisons linéaires $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$ à coefficients entiers. On dit que les périodes sont indépendantes ou dépendantes suivant que ce corps de périodes admet ou n'admet pas de périodes infiniment petites.