6. S. C. Mitra, Table of complex multiplication moduli of elliptic functions for some new cases. *Bulletin Calcutta Math. Soc.*, 19 (1928), 83-86.
7. — Table of complex multiplication moduli. *Bulletin Calcutta Math. Soc.*, 21 (1929), 91-92.
8. — Table of complex multiplication moduli of elliptic functions for some new cases. *Indian Phys.-Math. J.*, 2 (1931), 7—10.
9. R. Russell, On modular equations. *Proc. London Math. Soc.* (1), 21, (1891), 351-395.
10. G. N. Watson, Singular moduli (1). *Quart. J. of Math.*, 3 (1932), 81-98.
11. — Some singular moduli (2). *Quart. J. of Math.*, 3 (1932), 189-212.
12. — Singular moduli (3). *Proc. London Math. Soc.* (2), 40 (1936), 83-142.
13. H. Weber, Zur Theorie der elliptischen Funktionen. *Acta Math.*, 11 (1888), 333-390.
14. — Zur komplexen Multiplication elliptischer Funktionen. *Math. Ann.*, 33 (1889), 390-410.
15. — *Lehrbuch der Algebra*, 3 (Braunschweig, 1908).

(Received 19 September, 1935.)

Ein einfacher Beweis des Hauptsatzes über Cantorsche Mannigfaltigkeiten

Von Witold Hurewicz (Amsterdam)

Einer der wichtigsten Sätze der Dimensionstheorie besagt:

I. *Jeder kompakte n-dimensionale Raum*[0]) *enthält eine Cantorsche Mannigfaltigkeit als Teilmenge.*[1])

(Es sei daran erinnert, dass ein n-dimensionaler kompakter Raum eine *Cantorsche Mannigfaltigkeit* genannt wird, wenn in ihm das Komplement jeder höchstens $(n-2)$-dimensionalen abgeschlossenen Teilmenge zusammenhängend ist). Die bekannten Beweise [1]) des angeführten Theorems sind nicht ganz einfach. Im Folgenden wird unter Zuhilfenahme der neueren Methoden der Dimensionstheorie ein ganz kurzer Beweis für I gegeben. Von den Ergebnissen der Dimensionstheorie werden wir nur die folgenden zwei Sätze verwenden, die sich auf die *Erweiterungen von stetigen Abbildungen* beziehen.[2])

1) It Sei R ein separabler Raum, M — eine abgeschlossene Teilmenge von R, und es liege eine stetige Abbildung f *von M in die n-dimensionale Sphäre S_n* vor. Ist dim $(R-M) \leqq n$, so lässt sich f zu einer Abbildung *des vollen Raumes* R in die S_n erweitern.

2) Ist R ein kompakter n-dimensionaler Raum, so gibt es eine abgeschlossene Teilmenge M von R und eine stetige Abbildung von M in S_{n-1}, die man *nicht fortsetzen kann* zu einer stetigen Abbildung von R in S_{n-1}.

Aus 1) schliessen wir

[0]) Im folgenden werden ausschliesslich metrisierbare Räume betrachtet.

[1]) Der Satz wurde zuerst von Menger und mir bewiesen, vgl. Menger, Dimensionstheorie, S. 214, ff., vgl. auch, Tumarkin, Comptes Rendus 186. Später gab Alexandroff einen auf den Methoden der kombinatorischen Topologie beruhenden Beweis, vgl. Math. Ann. 106, S. 224, wo übrigens eine schärfere Aussage bewiesen wird.

[2]) Die Sätze 1) bzw. 2) sind eine Verschärfung bzw. Umformulierung von zwei Sätzen von Alexandroff, vgl. meine Arbeit in Fund. Math. 24, S. 144.

3) Zwei Abbildungen [3]) f_1 und f_2 eines separablen Raumes R in die n-Sphäre S_n, die sich *nur auf einer höchstens (n—1)-dimensionalen Teilmenge M von R unterscheiden*, gehören derselben Klasse an, d. h. lassen sich durch stetige Abänderung ineinander überführen.

Betrachten wir zum Beweis das Cartesische Produkt P aus R und der Einheitsstrecke I. Die Elemente von P sind Paare (x, t) wo $x \varepsilon R$, $0 \leqq t \leqq 1$. Durch die folgenden Formeln definieren wir eine Abbildung F einer abgeschlossenen Teilmenge von P in S_n:

$$\left.\begin{aligned} F(x,0) &= f_0\,(x) \\ F(x,1) &= f_1\,(x) \end{aligned}\right\} x \varepsilon R$$

$$F(x,t) = f_0\,(x) = f_1\,(x) \quad (x \varepsilon R - M,\ 0 \leqq t \leqq 1)$$

Die Punkte von P, in denen F noch nicht definiert ist, bilden eine Teilmenge des Cartesischen Produktes $M \times I$ also eine *höchstens n-dimensionale Menge*. Nach 1) lässt sich F in den ganzen Raum P fortsetzen. Für jeden einzelnen Parameterwert t liefert dann die Funktion $F(x, t)$ eine Abbildung von R in S_n, und diese Abbildungen ergeben eine stetige Schar, die f_0 mit f_1 verbindet.

Eine Folgerung aus 3) ist

4) Sei R ein separabler Raum, $M \subset R$ eine abgeschlossene Menge und f eine Abbildung von M in S_n. Gibt es eine Abbildung F von R in S_n, die in allen Punkten von M, *eine höchstens (n—1)-dimensionale Menge ausgenommen*, mit f übereinstimmt, so gibt es auch eine Abbildung von R in S_n die auf M *restlos* mit f übereinstimmt.

Nach Satz 4) gehören nämlich die Abbildungen f und F als Abbildungen von M in S_n betrachtet, in dieselbe Klasse, und nach Borsuk[4]) folgt daher aus der Forsetzbarkeit der einen (nämlich der Abbildung F) auf R die Fortsetzbarkeit der anderen.

Sei nun R ein kompakter n-dimensionaler Raum, und sei gemäss dem Satz 2) eine abgeschlossene Menge $M \subset R$ und eine Abbildung f von M in S_{n-1} gegeben, die sich nicht auf R fortsetzen lässt. Nennen wir zur Abkürzung eine abgeschlossene Menge $A \subset R$ ein *Hindernis für f*, falls es keine Fortsetzung von f in $M + A$ gibt, und machen wir Gebrauch von der Tatsache, dass eine Abbildung einer abgeschlossenen Menge $N \subset R$ in S_{n-1} sich stets in eine gewisse Umgebung U von N fortsetzen lässt [5]), so sehen

[3]) Das Prädikat „stetig" lassen wir als selbstverständlich weg.

[4]) Vgl. Borsuk, Monatshefte für Math. u. Phys. 38, p. 382, § 4.

[5]) Vgl. Borsuk, Fund. Math. 19, p. 214, § 6.

wir leicht: Ist in der absteigenden Folge $A_1, A_2, A_3 \ldots$ von abgeschlossenen Mengen jedes A_i ein Hindernis für f, so hat diese Eigenschaft auch der *Durchschnitt*:

$$Q = A_1 . A_2 . A_3 \ldots$$

Sonst liesse sich nämlich f in $Q + M$ und somit auch in eine gewisse Umgebung U von $Q + M$ fortsetzen. Für hinreichend grosses m hat man aber $A_m \subset U$ (wäre nämlich für jedes n $A_n . (R - U) \neq 0$, so hätte man nach dem Cantorschen Durchschnitsatz $Q . (R - U) \neq 0$, während doch Q eine Teilmenge ist von U), also liesse sich f auch auf $A_m + M$ fortsetzen im Widerspruch mit der Annahme. Da nun der volle Raum R ein Hindernis ist, können wir den Brouwerschen Reduktionssatz anwenden und kommen zum Ergebnis: Es gibt *ein Hindernis H, dessen keine echte abgeschlossene Teilmenge ein Hindernis ist.*

Ich behaupte, dass eine derartige Menge H *eine n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit ist.* Sonst könnte man nämlich H als Summe zweier echten abgeschlossenen Mengen H_1 und H_2 darstellen, wo

$$\dim\ (H_1 . H_2) < n-2 .$$

Da weder H_1 noch H_2 ein Hindernis ist, gibt es eine Abbildung F_1 von $H_1 + M$ in S_{n-1} und eine Abbildung F_2 von $H_2 + M$ in S_{n-1}, so dass ür $x \varepsilon M$

$$F_1\,(x) = F_2\,(x) = f\,(x)$$

gilt. Auf der Menge $M + H_1\ H_2$ stimmen die Abbildungen F_1 und F_2 überall bis auf eine höchstens (n—2)-dimensionale Teilmenge überein. Nach Satz 4) (wo für R, bzw. M, die Mengen $H_2 + M$ und $H_1 H_2 + M$ zu nehmen sind, während die Rolle der Abbildungen f bzw. F durch F_1 bzw. F_2 übernommen wird) gibt es eine Abildung F'_2 von $M + H_2$ in S_{n-1}, die in sämtlichen Punkten von $M + H_1\ H_2$ mit F_2 übereinstimmt. Setzen wir $F\,(x) = F_1\,(x)$ für $x \varepsilon M + H_1$ und $F\,(x) = F'_2\,(x)$ für $x \varepsilon M + H_2$, so erhalten wir eine Abbildung von $M + H$, die Fortsetzung von f, ist im Widerspruch zur Annahme, H sei ein Hindernis. Damit ist I bewiesen.

Nennen wir mit Menger einen kompakten Raum *n-stufig zusammenhängend*,[6]) wenn er durch keine weniger als (n—1)-dimensionale Menge

[6]) Menger definiert den höherstufigen Zusammenhang anders (vgl. Fussnote), aber eine unmittelbare Folgerung von Satz I ist die Übereinstimmung der beiden Definitionem hinsichtlich kompakter Räume (vgl. Menger a. a. O/.).

zerlegt wird (so dass also Cantorsche Mannigfaltigkeiten Räume sind, deren Dimension mit der Zusammenhangsstufe übereinstimmt), so können wir das Bewiesene auch in der Form aussprechen:

I' Jeder mindestens n-dimensionale kompakte Raum enthält einen n-stufig zusammenhängenden Teil.

Bemerken wir, dass eine beinahe unmittelbare Folgerung aus I' der folgende dimensionstheoretische Satz ist: [7])

Ist ein mindestens n-dimensionaler kompakter Raum A stetig auf einen Raum B[8]) abgebildet, so dass die Urbildmenge jedes Punktes von B höchstens m—dimensional ist, so ist B mindestens $(n-m)$—dimensional.

Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n bei festem m. Für $m=n$ ist die Behauptung trivial; sei $m>n$ und die Behauptung sei richtig, wenn n durch eine kleinere Zahl ersetzt wird. Nach I' dürfen wir annehmen, A sei n-stufig zusammenhängend. Dann ist aber B $(n-m)$-stufig zusammenhängend (und a fortiori mindestens $(n-m)$-dimensional), denn würde eine höchstens $(n-m-2)$-dimensionale Menge C den Raum B zerlegen, so würde die Urbildmenge von C den Raum A zerlegen, und, da diese Urbildmenge nach der Induktionsvoraussetzung höchstens $(n-2)$-dimensional ist, kämen wir in Widerspruch zur Annahme, A sei n-stufig zusammenhängend.

[7]) Vgl. meine Note in Proc. Ac. Amst. 30, S. 164.

[8]) B ist der *gauze* Bildraum.

Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles

par

M. Biernacki.

Introduction.

On a étudié depuis longtemps la classe E de fonctions

$$f(z) = z + a_2 z^2 +$$

holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$ et la sous-classe G de fonctions de la classe E qui représentent le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport à l'origine (je ne considère dans ce travail que *les domaines qui ne se recouvrent pas)*. On peut dire qu'un domaine est étoilé par rapport à l'origine lorsque l'ensemble des points qui ne sont pas intérieurs au domaine est identique avec l'ensemble des points d'une famille de demi-droites fermées, dont les prolongements passent tous par l'origine. En supprimant dans cette définition les mots „dont les prolongements passent par l'origine" on obtient une classe de domaines plus étendue, on pourrait appeler de tels domaines *linéairement accessibles au sens large.* Par contre nous dirons qu'un domaine est *linéairement accessible au sens strict* si l'ensemble des points qui ne sont pas intérieurs au domaine est identique avec l'ensemble des points d'une famille de demi-droites fermées et *si deux demi-droites de la famille ne se coupent jamais* (cependant elles peuvent être parallèles et l'extrémité d'une demi-droite peut appartenir à une autre demi-droite). Un domaine étoilé est évidemment linéairement accessible au sens strict. Tout domaine borné, dont la frontière n'est coupée qu'en 2 points au plus par des parallèles à une direction fixe est linéairement accessible au sens strict.

Une valeur z ($|z| = r$) étant fixée, on peut se proposer de déterminer la région décrite par la variable