Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Fünfte Abhandlung.

Von

Arnold Walfisz (Radość).

Es sei

$$(1) \qquad Q = \sum_{g,\,h=1}^{4} a_{gh}\, n_g\, n_h \qquad (a_{gh} = a_{hg} \text{ rational})$$

eine positiv definite quadratische Form der Determinante D. Für $x > 0$ stellt dann

$$(2) \qquad A(x) = A_Q(x) = \sum_{1 \leqq Q \leqq x} 1$$

die Anzahl aller Gitterpunkte $\neq (0, 0, 0, 0)$ im abgeschlossenen Ellipsoid $Q \leqq x$ dar [1]). Dieser Ausdruck wird durch das Ellipsoidvolumen

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{D}}\, x^2$$

angenähert. Ich setze zur Abkürzung

$$(3) \qquad \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}_Q(x) = A(x) - \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}}\, x^2.$$

In der vierten gleichnamigen Abhandlung [2]) habe ich $\mathrm{P}(x)$ nach

---

[1]) Ich schliesse auch diesmal, weil es bequem ist, den Nullpunkt aus,

[2]) Mathematische Zeitschrift **35** (1932), S. 212-229; im folgenden kurz E_{IV} genannt.

oben abgeschätzt und

$$\mathrm{P}(x)=O\left(\frac{x\log x}{\log\log x}\right) \tag{4}$$

erhalten.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit besteht in dem Nachweis von

$$\int_0^x \mathrm{P}^2(u)\,du=\varkappa x^3+O\left(x^{\frac{5}{2}}\log^2 x\right), \tag{I}$$

wo $\varkappa=\varkappa_Q$ eine positive Konstante ist. Hierbei dürfen die Koeffizienten a_{gh} als ganzzahlig angenommen werden, weil man dies durch einen einfachen Übergang erreichen kann.

Wie schon beim Beweise von (4), stütze ich mich auf Heckesche Sätze über den Zusammenhang der quadratischen Formen (1) mit gewissen Modulformen [3]).

Es sei N eine, zunächst beliebige, natürliche Zahl. Ich führe die Teilerfunktionen

$$S(x;\alpha,\beta,N)=\sum_{\substack{mn\leqq x \\ m\equiv\alpha,\ n\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ N)}} m \tag{5}$$

ein (falls die unteren Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins). Eine elementare Abschätzung ergibt (der folgende Hilfssatz 1 leistet wesentlich mehr)

$$S(x;\alpha,\beta,N)=\frac{1}{2N}x^2\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ N)}}^{\infty}\frac{1}{n^2}+O(x\log x). \tag{6}$$

τ bezeichne eine komplexe Veränderliche mit positivem Imaginärteil (die aber keiner weiteren Beschränkung unterliegt).

$$F(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\frac{2\pi i n\tau}{N}} \tag{7}$$

3) E. Hecke „Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1927), S. 199-224]. Genauere Angaben über die aus dieser Arbeit benötigten Stellen findet man in der Einleitung und § 1 von E_{IV}

sei die Potenzreihenentwicklung nach $e^{\frac{2\pi i\tau}{N}}$ einer beliebigen ganzen Modulform $F(\tau)$ der Dimension -2 und der Stufe N, die in allen rationalen Spitzen ihres Fundamentalbereiches verschwindet.

$$C(x)=\sum_{n\leqq x}c_n \tag{8}$$

bedeute die zugehörige Koeffizientensumme.

Nach Hecke gibt es zu jedem Q ein $N=N(Q)$, eine geeignete lineare Verbindung

$$L(x)=L_Q(x)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}f(\alpha,\beta)\,S(x;\alpha,\beta,N) \tag{9}$$

der Funktionen (5) und eine geeignete Modulform $F(\tau)=F_Q(\tau)$, so dass

$$A(x)=L(Nx)+C(Nx) \tag{10}$$

ist. Setzt man

$$T(x;\alpha,\beta,N)=S(x;\alpha,\beta,N)-\frac{1}{2N}x^2\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ N)}}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{11}$$

$$H(x)=H_Q(x)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}f(\alpha,\beta)\,T(x;\alpha,\beta,N), \tag{12}$$

so folgt aus (10), (3), (9), (6), $C(x)=o(x^2)$ (Hecke, l. c. [3])) und $\mathrm{P}(x)=o(x^2)$

$$\mathrm{P}(x)=H(Nx)+C(Nx), \tag{13}$$

und somit

$$\int_0^x \mathrm{P}^2(u)\,du=\int_0^x H^2(Nu)\,du+2\int_0^x H(Nu)\,C(Nu)\,du+\int_0^x C^2(Nu)\,du$$

$$=\frac{1}{N}\int_0^{Nx}H^2(u)\,du+\frac{2}{N}\int_0^{Nx}H(u)\,C(u)\,du+\frac{1}{N}\int_0^{Nx}C^2(u)\,du. \tag{14}$$

Es sind also die drei Glieder von (14) abzuschätzen. Für das dritte habe ich

$$\int_0^x |C(u)|^2\,du=\varphi x^{\frac{5}{2}}+O(x^2\log^2 x),$$

mit geeignetem $\varphi = \varphi(F) > 0$, bei einer beliebigen Modulform (7) erhalten[4], also reichlich

$$\int_0^x C^2(u)\,du = O\left(x^{\frac{5}{2}}\right). \tag{15}$$

Das erste Glied von (14) führt mittels (12) auf die Integrale

$$V(x) = V(x; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, N) = \int_0^x T(u; \alpha_1, \beta_1, N)\, T(u; \alpha_2, \beta_2, N)\,du, \tag{16}$$

die ich mit einem bei verwandten Teilerproblemen benutzten Verfahren behandle[5]). In § 1 führe ich dies durch und bekomme, unter der Annahme $1 \leqq \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \leqq N$,

$$V(x) = \left\{\frac{1}{3N^2}\left(\frac{\alpha_1}{N} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha_2}{N} - \frac{1}{2}\right) + \lambda\right\} x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}} \log x\right), \tag{II}$$

wobei

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; N) \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 d \equiv \beta_1,\ \nu_2 d \equiv \beta_2 \pmod N \\ (\nu_1, \nu_2) = 1}}^{\infty} \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \cos\left\{\frac{2\pi\mu}{N}(\alpha_1 \nu_1 - \alpha_2 \nu_2)\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

ist.

Das zweite Integral von (14) führt mittels (12) auf die Funktionen

$$\begin{aligned} U(x) = U(x; \alpha, \beta, F) &= -\int_1^x T(u; \alpha, \beta, N)\, C(u)\,du \\ &= -\int_0^x T(u; \alpha, \beta, N)\, C(u)\,du, \end{aligned} \tag{18}$$

die in § 2 abgeschätzt werden. Es ergibt sich

$$U(x) = O\left(x^{\frac{5}{2}} \log^2 x\right) \tag{III}$$

[4]) „Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen" [Mathematische Annalen 108 (1933), S. 75-90; im folgenden kurz M genannt.

[5]) „Teilerprobleme. Zweite Abhandlung." [Mathematische Zeitschrift 34 (1931), S. 448-472]; im folgenden kurz T_{II} genannt.

(I) mit $\varkappa \geqq 0$ folgt aus (14), (12), (16), (17), (18), (II), (III) und (15). Es bleibt noch der Nachweis, dass stets $\varkappa > 0$ sein muss. Dies erledige ich in § 3, indem ich an eine in der dritten gleichnamigen Abhandlung[6]) mit ganz anderen Hilfsmitteln bewiesene Formel anknüpfe.

Im gleichen § 3 spezialisiere ich (II) auf die Teilerfunktionen

$$S(x) = S(x; 1, 1, 1) = \sum_{mn \leqq x} m, \tag{19}$$

$$T(x) = T(x; 1, 1, 1) = S(x) - \frac{\pi^2}{12} x^2; \tag{20}$$

desgl. auf die einfachste quaternäre Form

$$Q_0 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2, \tag{21}$$

mit dem zugehörigen Gitterrest $P_0(x)$. Es ergeben sich so die schon in T_{II} (dortige Formeln (II) und (III)) bewiesenen Abschätzungen

$$\int_0^x T^2(u)\,du = \frac{36 + 5\pi^2}{432} x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}} \log x\right), \tag{IV}$$

$$\int_0^x P_0^2(u)\,du = \frac{2}{3}\pi^2 x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}} \log x\right). \tag{V}$$

In § 4 betrachte ich, als Vorbereitung auf den § 5, die Integrale

$$V_\nu(x) = \int_0^x T(2^\nu u)\, T(u)\,du \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \tag{22}$$

und bekomme

$$V_\nu(x) = \left(\frac{2^\nu}{12} + \frac{(5 + 3\nu)\pi^2}{432}\right) x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}} \log x\right). \tag{VI}$$

Hierin ist neben (IV) der in T_{II} behandelte Fall $\nu = 2$:

$$\int_0^x T(4u)\, T(u)\,du = \frac{144 + 11\pi^2}{432} x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}} \log x\right) \tag{23}$$

[6]) Mathematische Zeitschrift 27 (1927), S. 245-268; im folgenden kurz E_{III} genannt.

(vgl. T_{II}, Formel (152)) enthalten. Dar Beweis von (VI) ist denen von (IV) und (23) in T_{II}, sowie dem von (I) in der vorliegenden Arbeit, weitgehend ähnlich, so dass ich mich wesentlich kürzer fassen kann.

In § 5 betrachte ich noch drei weitere quaternäre Formen, nämlich

$$Q_1 = n_1^2 + n_2^2 + 2n_3^2 + 2n_4^2, \tag{24}$$

$$Q_2 = n_1^2 + 2n_2^2 + 2n_3^2 + 4n_4^2, \tag{25}$$

$$Q_3 = n_1^2 + 2n_2^2 + 4n_3^2 + 8n_4^2 \tag{26}$$

und erhalte für die zugehörigen Gitterreste $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$

$$\int_0^x P_1^2(u)\,du = \frac{\pi^2}{6}x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}}\log x\right), \tag{VII}$$

$$\int_0^x P_2^2(u)\,du = \frac{\pi^2}{24}x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}}\log x\right), \tag{VIII}$$

$$\int_0^x P_3^2(u)\,du = \frac{\pi^2}{96}x^3 + O\left(x^{\frac{5}{2}}\log^2 x\right). \tag{IX}$$

Die Beweise von (VII), (VIII) und (IX) verlaufen ähnlich wie der von (V) in T_{II}. Dort hatte ich (V) auf (IV) und (23) zurückgeführt, hier benutze ich gleicherweise die Abschätzungen (VI). Ich habe nichteinmal versucht, von (II) Gebrauch zu machen, denn die Zerlegung (9) (oder (12)) liefert hier recht viele Glieder, und in allen ist der Ausdruck (17) für λ recht unangenehm, während die Rechnungen beim Gebrauch von (VI) ganz erträglich werden.

In den Restgliedern von (V), (VII) und (VIII) tritt nur $\log x$ auf, weil sich das zugehörige P auf reine Teilerfunktionen zurückführen lässt, d. h. das C in (13) identisch verschwindet. Bei Q_3 ist das nicht mehr der Fall.

Folgende Festsetzungen mögen für die ganze vorliegende Arbeit gelten: Mit B bezeichne ich unterschiedslos Zahlen, die von allem Möglichen abhängen dürfen, absolut genommen jedoch unterhalb numerischer Schranken liegen (§§ 4—5) oder unterhalb von Schranken, die von N (§ 1), F (§ 2), Q (§ 3) abhängen dürfen.

α und β sind ganze Zahlen, die den Ungleichungen

$$1 \leqq \alpha \leqq N, \quad 1 \leqq \beta \leqq N \tag{27}$$

genügen; ebenso auch α_1, β_1, α_2, β_2.

Der Strich bei Summen, die über m oder n oder m und n laufen, heisst: es sei überdies $m \equiv \alpha$, $n \equiv \beta \pmod N$. Die Formeln (5) und (11) lauten z. B. in dieser Schreibweise:

$$S(x;\,\alpha,\,\beta,\,N) = \sum_{m\,n \leqq x}' m, \tag{5}$$

$$T(x;\,\alpha,\,\beta,\,N) = S(x;\,\alpha,\,\beta,\,N) - \frac{1}{2N}x^2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2}. \tag{11}$$

Summen wie

$$\sum_{n < m \leqq x}'$$

laufen bald über n und m, bald nur über m. Jedesmal ergibt sich aber sofort aus dem Zusammenhang, was gemeint ist.

Die nicht kleinere der beiden Zahlen u und v heisse Max $(u;\,v)$, die nicht grössere Min $(u;\,v)$; dagegen bedeutet $(u,\,v)$ den grössten gemeinsamen Teiler der beiden ganzen Zahlen u und v.

Es sei stets

$$\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

Weitere Bezeichnungen werden noch eingeführt, sie gelten meistens nur für den jeweiligen Paragraphen.

§ 1.

Hilfssatz 1:

$$-T(x;\,\alpha,\,\beta,\,N) = \left(\frac{\alpha}{N} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{N}x + \sum_{m \leqq \sqrt{x}}' m\,\psi\left\{\left(\frac{x}{m} - \beta\right)\frac{1}{N}\right\} \tag{29}$$
$$+ x\sum_{n \leqq \sqrt{x}}' \frac{1}{n}\,\psi\left\{\left(\frac{x}{n} - \alpha\right)\frac{1}{N}\right\} + B\sqrt{x} \qquad (x \geqq 1).$$

Beweis:

$$S(x;\ \alpha,\ \beta,\ N)=\sum_{\substack{m<n\leqq x\\ m\,n\leqq x}}' m+\sum_{\substack{n<m\leqq x\\ m\,n\leqq x}}' m+\sum_{\substack{m=n\leqq x\\ m\,n\leqq x}}' m \qquad (5)$$

(30) $$=S_1+S_2+S_3.$$

(31) $$S_1=\sum_{\substack{m<n\leqq x\\ m\,n\leqq x}}' m=\sum_{m<\sqrt{x}}' m\sum_{m<n\leqq\frac{x}{m}}' 1 \qquad (30).$$

$$\sum_{m<n\leqq\frac{x}{m}}' 1=\sum_{\substack{\nu\\ m<\nu N+\beta\leqq\frac{x}{m}}} 1=\sum_{\frac{m-\beta}{N}<\nu\leqq\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}} 1$$

$$=\left[\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right]-\left[\frac{m-\beta}{N}\right]$$

$$=\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}-\psi\left\{\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\}-\frac{1}{2}-\frac{m-\beta}{N}+\psi\left(\frac{m-\beta}{N}\right)+\frac{1}{2} \qquad (28)$$

(32) $$=\left(\frac{x}{m}-m\right)\frac{1}{N}-\psi\left\{\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\}+\psi\left(\frac{m-\beta}{N}\right).$$

$$S_1=\sum_{m<\sqrt{x}}' m\left(\frac{x}{m}-m\right)\frac{1}{N}-\sum_{m<\sqrt{x}}' m\,\psi\left\{\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\}$$

$$+\sum_{m<\sqrt{x}}' m\,\psi\left(\frac{m-\beta}{N}\right) \qquad (31,\ 32)$$

(33) $$=\frac{1}{N}\sum_{m<\sqrt{x}}'(x-m^2)-\sum_{m<\sqrt{x}}' m\,\psi\left\{\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\}$$

$$+\psi\left(\frac{\alpha-\beta}{N}\right)\sum_{m<\sqrt{x}}' m \qquad (28).$$

$$\sum_{m<\sqrt{x}}'(x-m^2)=\sum_{m\leqq\sqrt{x}}'(x-m^2)=\sum_{m\leqq\sqrt{x}}'\int_{m^2}^{x}du=\int_1^x du\sum_{m\leqq\sqrt{u}}' 1$$

$$=\int_1^x\left\{\left[\frac{\sqrt{u}-\alpha}{N}\right]+1\right\}du=\int_1^x\left[\frac{\sqrt{u}-\alpha}{N}\right]du+x+B$$

$$=2\int_1^{\sqrt{x}}\left[\frac{v-\alpha}{N}\right]v\,dv+x+B=2\int_1^{\sqrt{x}}\left\{\frac{v-\alpha}{N}-\psi\left(\frac{v-\alpha}{N}\right)-\frac{1}{2}\right\}v\,dv$$

$$+x+B \qquad (28)$$

(34) $$=\frac{2}{N}\int_1^{\sqrt{x}}v^2\,dv-\left(\frac{2\alpha}{N}+1\right)\int_1^{\sqrt{x}}v\,dv+x-2\int_1^{\sqrt{x}}\psi\left(\frac{v-\alpha}{N}\right)v\,dv+B.$$

(35) $$\int_1^{\sqrt{x}}\psi\left(\frac{v-\alpha}{N}\right)v\,dv=B\sqrt{x} \qquad (28,\ \text{II Mittelwertsatz}).$$

(36) $$\sum_{m<\sqrt{x}}'(x-m^2)=\frac{2}{3N}x^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{N}\right)x+B\sqrt{x} \qquad (34,\ 35).$$

$$\sum_{m<\sqrt{x}}' m=\sum_{m<\sqrt{x}}'\int_0^m du=\int_0^{\sqrt{x}}du\sum_{u\leqq m<\sqrt{x}}' 1=\int_0^{\sqrt{x}}du\left(\frac{\sqrt{x}-u}{N}+B\right)$$

(37) $$=\frac{1}{2N}x+B\sqrt{x}.$$

(38) $$S_1=-\sum_{m<\sqrt{x}}' m\,\psi\left\{\left(\frac{x}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\}+\frac{2}{3N^2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$+\left\{1-\frac{2\alpha}{N}+\psi\left(\frac{\alpha-\beta}{N}\right)\right\}\frac{x}{2N}+B\sqrt{x} \qquad (33,\ 36,\ 37).$$

(39) $$S_2=\sum_{\substack{n<m\leqq x\\ m\,n\leqq x}}' m=\sum_{n<\sqrt{x}}'\sum_{n<m\leqq\frac{x}{n}}' m \qquad (30).$$

$$\sum_{n<m\leqq\frac{x}{n}}' m=\sum_{n<m\leqq\frac{x}{n}}'\int_0^m du=\int_0^{\frac{x}{n}}du\sum_{\mathrm{Max}\,(n;\,u)<m\leqq\frac{x}{n}}' 1$$

$$= \int_0^{\frac{x}{n}} \left\{ \left[\left(\frac{x}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right] - \left[\left(\mathrm{Max}\,(n;\,u)-\alpha\right)\frac{1}{N}\right]\right\} d\,u$$

$$= \frac{1}{N}\int_0^{\frac{x}{n}}\left\{\frac{x}{n} - \mathrm{Max}\,(n;\,u)\right\}d\,u - \int_0^{\frac{x}{n}}\psi\left\{\left(\frac{x}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\}d\,u$$

$$+ \int_0^{\frac{x}{n}}\psi\left\{\left(\mathrm{Max}\,(n;\,u)-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\}d\,u$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - \frac{x}{n}\,\psi\left\{\left(\frac{x}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\} - \frac{1}{N}\int_0^{\frac{x}{n}}\mathrm{Max}\,(n;\,u)\;d\,u \tag{40}$$

$$+ \int_0^{\frac{x}{n}}\psi\left\{\left(\mathrm{Max}\,(n;\,u)-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\}d\,u.$$

$$\left(n<\frac{x}{n}\right) \int_0^{\frac{x}{n}}\mathrm{Max}\,(n;\,u)\;d\,u = \int_0^{n} n\,d\,u + \int_n^{\frac{x}{n}} u\,d\,u = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{n^2}+n^2\right). \tag{41}$$

$$\left(n<\frac{x}{n},\, n\equiv\beta\,(\mathrm{mod}\,N)\right) \int_0^{\frac{x}{n}}\psi\left\{\left(\mathrm{Max}\,(n;\,u)-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\}d\,u$$

$$= \int_0^{n}\psi\left(\frac{n-\alpha}{N}\right)d\,u + \int_n^{\frac{x}{n}}\psi\left(\frac{u-\alpha}{N}\right)d\,u = \psi\left(\frac{\beta-\alpha}{N}\right)n + B \qquad (28). \tag{42}$$

$$\sum_{n<m\leqq\frac{x}{n}}{}' m = -\frac{x}{n}\,\psi\left\{\left(\frac{x}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\} + \frac{1}{2N}\left(\frac{x^2}{n^2}-n^2\right) \tag{43}$$

$$+\psi\left(\frac{\beta-\alpha}{N}\right)n + B \qquad (39\text{-}42).$$

$$\sum_{n>\sqrt{x}}{}' \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n>\sqrt{x}}{}' \int_n^{\infty}\frac{d\,u}{u^3} = 2\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\frac{d\,u}{u^3}\sum_{\sqrt{x}<n\leqq u}{}' 1$$

$$= 2\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\frac{d\,u}{u^3}\left\{\left[\frac{u-\beta}{N}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right]\right\}$$

$$= 2\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\frac{d\,u}{u^3}\left\{\frac{u-\sqrt{x}}{N} - \psi\left(\frac{u-\beta}{N}\right) + \psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{N\sqrt{x}} + \left\{\psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right) - \frac{\sqrt{x}}{N}\right\}\frac{1}{x} - 2\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\psi\left(\frac{u-\beta}{N}\right)\frac{d\,u}{u^3}$$

$$= \frac{1}{N\sqrt{x}} + \psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right)\frac{1}{x} + B\,x^{-\frac{3}{2}} \qquad (28). \tag{44}$$

$$\sum_{n<\sqrt{x}}{}' 1 = \sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}' 1 - \sum_{n=\sqrt{x}}{}' 1 = \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right] + 1 - \sum_{n=\sqrt{x}}{}' 1$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\beta}{N} - \psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right) + \frac{1}{2} - \sum_{n=\sqrt{x}}{}' 1. \tag{45}$$

$$-\sum_{n<\sqrt{x}}{}' n^2 = \sum_{n<\sqrt{x}}{}' (x-n^2) - x\sum_{n<\sqrt{x}}{}' 1$$

$$= \frac{2}{3N}x^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{N}\right)x + B\sqrt{x} - \frac{1}{N}x^{\frac{3}{2}} + \left\{\frac{\beta}{N} + \psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right) - \frac{1}{2}\right\}x$$

$$+ x\sum_{n=\sqrt{x}}{}' 1 \qquad (36 \text{ mit } \beta \text{ statt } \alpha,\ 45)$$

$$= -\frac{1}{3N}x^{\frac{3}{2}} + \psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right)x + x\sum_{n=\sqrt{x}}{}' 1 + B\sqrt{x}. \tag{46}$$

$$\sum_{n<\sqrt{x}}' n = \frac{1}{2N}x + B\sqrt{x} \qquad (37 \text{ mit } \beta \text{ statt } \alpha). \tag{47}$$

$$S_2 + x\sum_{n<\sqrt{x}}' \frac{1}{n}\psi\left\{\left(\frac{x}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\} - \frac{x^2}{2N}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2} = -\frac{x^2}{2N}\sum_{n=\sqrt{x}}' \frac{1}{n^2}$$

$$-\frac{x^2}{2N}\sum_{n>\sqrt{x}}' \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2N}\sum_{n<\sqrt{x}}' n^2 + \psi\left(\frac{\beta-\alpha}{N}\right)\sum_{n<\sqrt{x}}' n + B\sqrt{x} \qquad (39,\ 43)$$

$$= -\frac{x^2}{2N}\sum_{n=\sqrt{x}}' \frac{1}{n^2} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2N^2} - \psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right)\frac{x}{2N} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6N^2} + \psi\left(\frac{\sqrt{x}-\beta}{N}\right)\frac{x}{2N}$$

$$+\frac{x}{2N}\sum_{n=\sqrt{x}}' 1 + \psi\left(\frac{\beta-\alpha}{N}\right)\frac{x}{2N} + B\sqrt{x} \qquad (44,\ 46,\ 47)$$

$$= -\frac{2}{3N^2}x^{\frac{3}{2}} + \psi\left(\frac{\beta-\alpha}{N}\right)\frac{x}{2N} + B\sqrt{x} \tag{48}$$

(man beachte, dass

$$-\frac{x^2}{2N}\sum_{n=\sqrt{x}}' \frac{1}{n^2} + \frac{x}{2N}\sum_{n=\sqrt{x}}' 1 = 0$$

ist).

Für $\alpha \neq \beta$ ist $S_3 = 0$ (30). Für $\alpha = \beta$ ist

$$S_3 = \sum_{m=\sqrt{x}}' m = \frac{1}{2N}x + B\sqrt{x} \qquad (30,\ 37).$$

Stets is also

$$S_3 = -\left\{\psi\left(\frac{\alpha-\beta}{N}\right) + \psi\left(\frac{\beta-\alpha}{N}\right)\right\}\frac{x}{2N} + B\sqrt{x} \qquad (28,\ 27). \tag{49}$$

(29) folgt aus (30), (38), (48), (49), (11) und (28).

In der Folge sei bis zum Schluss dieser Arbeit $x \geqq 2$. Der Strich bei Summen, die über m_1, n_1, m_2, n_2 laufen, bedeutet: überdies sei $m_1 \equiv \alpha_1,\ n_1 \equiv \beta_1,\ m_2 \equiv \alpha_2,\ n_2 \equiv \beta_2 \pmod N$.

Hilfssatz 2: *Mit*

$$r_1 = \operatorname{Max}(n_1^2;\ n_2^2), \qquad r_2 = \operatorname{Max}(m_1^2;\ n_2^2),$$
$$r_3 = \operatorname{Max}(m_2^2;\ n_1^2), \qquad r_4 = \operatorname{Max}(m_1^2;\ m_2^2) \tag{50}$$

ist

$$V(x) = \frac{1}{3N_2}\left(\frac{\alpha_1}{N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha_2}{N}-\frac{1}{2}\right)x^3 \tag{51}$$

$$+\sum_{n_1,\,n_2 \leqq \sqrt{x}}' \frac{1}{n_1 n_2}\int_{r_1}^{x} u^2\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\sum_{m_1,\,n_2 \leqq \sqrt{x}}' \frac{m_1}{n_2}\int_{r_2}^{x} u\,\psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\sum_{m_2,\,n_1 \leqq \sqrt{x}}' \frac{m_2}{n_1}\int_{r_3}^{x} u\,\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\sum_{m_1,\,m_2 \leqq \sqrt{x}}' m_1 m_2\int_{r_4}^{x} \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}du + Bx^{\frac{5}{2}}\log x.$$

Beweis:

$$V(x) = \int_{1}^{x} T(u;\alpha_1,\beta_1,N)\,T(u;\alpha_2,\beta_2,N)\,du + B \qquad (16)$$

$$= \frac{1}{3N^2}\left(\frac{\alpha_1}{N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha_2}{N}-\frac{1}{2}\right)x^3 + B$$

$$+\int_{1}^{x} u^2 \sum_{n_1 \leqq \sqrt{u}}' \frac{1}{n_1}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}\sum_{n_2 \leqq \sqrt{u}}' \frac{1}{n_2}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\int_{1}^{x} u \sum_{m_1 \leqq \sqrt{u}}' m_1\psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\sum_{n_2 \leqq \sqrt{u}}' \frac{1}{n_2}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\int_{1}^{x} u \sum_{m_2 \leqq \sqrt{u}}' m_2\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}\sum_{n_1 \leqq \sqrt{u}}' \frac{1}{n_1}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\int_{1}^{x} \sum_{m_1 \leqq \sqrt{u}}' m_1\psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\sum_{m_2 \leqq \sqrt{u}}' m_2\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+B\int_1^x u^2 \sum_{n_1\leqq\sqrt{u}}' \frac{1}{n_1}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}du+B\int_1^x u^2 \sum_{n_2\leqq\sqrt{u}}' \frac{1}{n_2}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+B\int_1^x u \sum_{m_1\leqq\sqrt{u}}' m_1\psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}du+B\int_1^x u \sum_{m_2\leqq\sqrt{u}}' m_2\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+B\int_1^x u^{\frac{1}{2}}\left(u+u\sum_{n\leqq\sqrt{u}}\frac{1}{n}+\sum_{m\leqq\sqrt{u}} m+u^{\frac{1}{2}}\right)du \qquad (29)$$

$$=\frac{1}{3N^2}\left(\frac{\alpha_1}{N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha_2}{N}-\frac{1}{2}\right)x^3$$

$$+\sum_{n_1,\,n_2\leqq\sqrt{x}}'\frac{1}{n_1 n_2}\int_{r_1}^x u^2\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\sum_{m_1,\,n_2\leqq\sqrt{x}}'\frac{m_1}{n_2}\int_{r_2}^x u\,\psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\sum_{m_2,\,n_1\leqq\sqrt{x}}'\frac{m_2}{n_1}\int_{r_3}^x u\,\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+\sum_{m_1,\,m_2\leqq\sqrt{x}}' m_1 m_2\int_{r_4}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+B\sum_{n_1\leqq\sqrt{x}}'\frac{1}{n_1}\int_{n_1^2}^x u^2\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}du+B\sum_{n_2\leqq\sqrt{x}}'\frac{1}{n_2}\int_{n_2^2}^x u^2\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+B\sum_{m_1\leqq\sqrt{x}}' m_1\int_{m_1^2}^x u\,\psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}du$$

$$+B\sum_{m_2\leqq\sqrt{x}}' m_2\int_{m_2^2}^x u\,\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}du+Bx^{\frac{5}{2}}\log x \ (50),$$

und hierin sind die 4 letzten Summen, wenn über geeignete Strecken integriert wird,

$$Bx^2\sum_{n_1\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n_1}\left|\int\psi\left\{\left(\frac{u}{n_1}-\alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}du\right|$$

$$+Bx^2\sum_{n_2\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n_2}\left|\int\psi\left\{\left(\frac{u}{n_2}-\alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}du\right|$$

$$+Bx\sum_{m_1\leqq\sqrt{x}} m_1\left|\int\psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}du\right|$$

$$+Bx\sum_{m_2\leqq\sqrt{x}} m_2\left|\int\psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}du\right|$$

$$=Bx^2\sum_{n_1\leqq\sqrt{x}}\left|\int\psi(u)\,du\right|+Bx^2\sum_{n_2\leqq\sqrt{x}}\left|\int\psi(u)\,du\right|$$

$$+Bx\sum_{m_1\leqq\sqrt{x}} m_1^2\left|\int\psi(u)\,du\right|+Bx\sum_{m_2\leqq\sqrt{x}} m_2^2\left|\int\psi(u)\,du\right|$$

$$=Bx^{\frac{5}{2}}\log x \qquad \text{(28, II Mittelwertsatz),}$$

wie es sich gehört.

Hilfssatz 3: *Sind in dem Intervall* $u_1\leqq u\leqq u_2$ *die quadratisch integrierbaren Funktionen* $g(u)$, $h(u)$, $s_k(u)$, $t_k(u)$ $(k\geqq 1)$ *gegeben, für die bei wachsendem* k

$$\int_{u_1}^{u_2} s_k^2(u)\,du\,,\quad \int_{u_1}^{u_2} t_k^2(u)\,du \qquad \textit{beschränkt,}$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\{g(u)-s_k(u)\}^2du\to 0\,,\quad \int_{u_1}^{u_2}\{h(u)-t_k(u)\}^2du\to 0\,,$$

so ist

$$(52)\qquad \int_{u_1}^{u_2} g(u)\,h(u)\,du=\lim_{k=\infty}\int_{u_1}^{u_2} s_k(u)\,t_k(u)\,du\,.$$

Das ist Hilfssatz 10 von T_{II}.

Hilfssatz 4:

$$\sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{1}{n_1\, n_2} \int_{r_1}^{x} u^2\, \psi\left\{\left(\frac{u}{n_1} - \alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}\, \psi\left\{\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\} du \tag{53}$$

$$= \lim_{k=\infty} \frac{1}{2\,\pi^2} \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{1}{n_1\, n_2} \left(\sum_{\substack{b_1,\, b_2 = 1 \\ b_1 n_2 = b_2 n_1}}^{k} \frac{1}{b_1\, b_2} \cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)\right\} \int_{r_1}^{x} u^2\, du \right.$$

$$+ \sum_{\substack{b_1,\, b_2 = 1 \\ b_1 n_2 \neq b_2 n_1}}^{k} \frac{1}{b_1\, b_2} \int_{r_1}^{x} u^2 \cos\left\{\frac{2\pi u}{N}\left(\frac{b_1}{n_1} - \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)\right\} du$$

$$\left. - \sum_{b_1,\, b_2 = 1}^{k} \frac{1}{b_1\, b_2} \int_{r_1}^{x} u^2 \cos\left\{\frac{2\pi u}{N}\left(\frac{b_1}{n_1} + \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)\right\} du \right).$$

Beweis: Mit $u_1 = r_1$, $u_2 = x$, $g(u) = u\, \psi\left\{\left(\frac{u}{n_1} - \alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\}$, $h(u) = u\, \psi\left\{\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}$,

$$s_k(u) = -\frac{u}{\pi} \sum_{b_1=1}^{k} \frac{1}{b_1} \sin\left\{\frac{2\pi b_1}{N}\left(\frac{u}{n_1} - \alpha_1\right)\right\},$$

$$t_k(u) = -\frac{u}{\pi} \sum_{b_2=1}^{k} \frac{1}{b_2} \sin\left\{\frac{2\pi b_2}{N}\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\right\}$$

sind die Bedingungen von Hilfssatz 3 erfüllt. Daher liefert (52) für die linke Seite von (53)

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{\pi^2} \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{1}{n_1\, n_2} \sum_{b_1,\, b_2=1}^{k} \frac{1}{b_1\, b_2} \int_{r_1}^{x} u^2 \sin\left\{\frac{2\pi b_1}{N}\left(\frac{u}{n_1} - \alpha_1\right)\right\}$$

$$\times \sin\left\{\frac{2\pi b_2}{N}\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\right\} du.$$

Das ist aber der rechten Seite von (53) gleich.

Hilfssatz 5:

$$\sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{m_1}{n_2} \int_{r_2}^{x} u\, \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1} - \beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\, \psi\left\{\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\} du \tag{54}$$

$$= \lim_{k=\infty} \frac{1}{2\,\pi^2} \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{m_1}{n_2} \left(\sum_{\substack{a_1,\, b_2 = 1 \\ a_1 n_2 = b_2 m_1}}^{k} \frac{1}{a_1\, b_2} \cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 - \alpha_2 b_2)\right\} \int_{r_2}^{x} u\, du \right.$$

$$+ \sum_{\substack{a_1,\, b_2 = 1 \\ a_1 n_2 \neq b_2 m_1}}^{k} \frac{1}{a_1\, b_2} \int_{r_2}^{x} u \cos\left\{\frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_1} - \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 - \alpha_2 b_2)\right\} du$$

$$\left. - \sum_{a_1,\, b_2=1}^{k} \frac{1}{a_1\, b_2} \int_{r_2}^{x} u \cos\left\{\frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_1} + \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 + \alpha_2 b_2)\right\} du \right).$$

Beweis: Mit $u_1 = r_2$, $u_2 = x$, $g(u) = \sqrt{u}\, \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1} - \beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}$, $h(u) = \sqrt{u}\, \psi\left\{\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\}$,

$$s_k(u) = -\frac{\sqrt{u}}{\pi} \sum_{a_1=1}^{\infty} \frac{1}{a_1} \sin\left\{\frac{2\pi a_1}{N}\left(\frac{u}{m_1} - \beta_1\right)\right\},$$

$$t_k(u) = -\frac{\sqrt{u}}{\pi} \sum_{b_2=1}^{k} \frac{1}{b_2} \sin\left\{\frac{2\pi b_2}{N}\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\right\}$$

sind die Bedingungen von Hilfssatz 3 erfüllt. Daher liefert (52) für die linke Seite von (54)

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{\pi^2} \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{m_1}{n_2} \sum_{a_1,\, b_2=1}^{k} \frac{1}{a_1\, b_2} \int_{r_2}^{x} u \sin\left\{\frac{2\pi a_1}{N}\left(\frac{u}{m_1} - \beta_1\right)\right\}$$

$$\times \sin\left\{\frac{2\pi b_2}{N}\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\right\} du,$$

was der rechten Seite von (54) gleich ist.

Hilfssatz 6:

$$\sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}}{}' m_1\, m_2 \int_{r_4}^{x} \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1} - \beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}\, \psi\left\{\left(\frac{u}{m_2} - \beta_2\right)\frac{1}{N}\right\} du \tag{55}$$

$$= \lim_{k=\infty} \frac{1}{2\,\pi^2} \sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}}{}' m_1\, m_2 \left(\sum_{\substack{a_1,\, a_2 = 1 \\ a_1 m_2 = a_2 m_1}}^{k} \frac{1}{a_1\, a_2} \cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 - \beta_2 a_2)\right\} \int_{r_4}^{x} du \right.$$

$$+\sum_{\substack{a_1,\, a_2=1\\ a_1 m_2 \neq a_2 m_1}}^{k} \frac{1}{a_1 a_2} \int_{r_4}^{x} \cos\left\{\frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_1}-\frac{a_2}{m_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 - \beta_2 a_2)\right\} du$$

$$-\sum_{a_1,\, a_2=1}^{k} \frac{1}{a_1 a_2}\int_{r_4}^{x} \cos\left\{\frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}\right)-\frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1+\beta_2 a_2)\right\} du\Bigg).$$

Beweis: Mit $u_1 = r_4$, $u_2 = x$, $g(u) = \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\frac{1}{N}\right\}$, $h(u) = \psi\left\{\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\frac{1}{N}\right\}$,

$$s_k(u) = -\frac{1}{\pi}\sum_{a_1=1}^{k}\frac{1}{a_1}\sin\left\{\frac{2\pi a_1}{N}\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\right\},$$

$$t_k(u) = -\frac{1}{\pi}\sum_{a_2=1}^{k}\frac{1}{a_2}\sin\left\{\frac{2\pi a_2}{N}\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\right\}$$

sind die Bedingungen von Hilfssatz 3 erfüllt. Daher liefert (52) für die linke Seite von (55)

$$\lim_{k=\infty}\frac{1}{\pi^2}\sum_{m_1,\, m_2\le\sqrt{x}}{}' m_1 m_2 \sum_{a_1,\, a_2=1}^{k}\frac{1}{a_1a_2}\int_{r_4}^{x}\sin\left\{\frac{2\pi a_1}{N}\left(\frac{u}{m_1}-\beta_1\right)\right\}$$

$$\times\sin\left\{\frac{2\pi a_2}{N}\left(\frac{u}{m_2}-\beta_2\right)\right\} du\,,$$

also die rechte Seite von (55).

Hilfssatz 7:

(56) $$S_4 = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n_1,\, n_2\le\sqrt x}{}'\frac{1}{n_1n_2}\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1b_2}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\alpha_1b_1-\alpha_2b_2)\right\}\int_{r_1}^{x}u^2\,du$$

(57) $$=\lambda x^3 + Bx^{\frac{5}{2}}\log x.$$

Beweis:

(58) $$b_1n_2=b_2n_1 \to b_1\frac{n_2}{(n_1,n_2)} = b_2\frac{n_1}{(n_1,n_2)}\to b_1=\mu\frac{n_1}{(n_1,n_2)},\quad b_2=\mu\frac{n_2}{(n_1,n_2)}.$$

(59) $$\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n_1}}^\infty \frac{1}{b_1b_2} = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{(n_1,n_2)^2}{n_1n_2}\qquad (58).$$

(60) $$S_4 = \frac{x^3}{6\pi^2}\sum_{n_1,\, n_2\le\sqrt x}{}'\frac{1}{n_1n_2}\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1b_2}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\alpha_1b_1-\alpha_2b_2)\right\}$$

$$+B\sum_{n_1,\, n_2\le\sqrt x}\frac{r_1^3}{n_1n_2}\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1b_2}\qquad (56).$$

$$\sum_{n_1,\, n_2\le\sqrt x}\frac{r_1^3}{n_1n_2}\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n}}^{\infty}\frac{1}{b_1b_2} = B\sum_{n_1,\, n_2\le\sqrt x}\frac{\mathrm{Max}\,(n_1^6;\, n_2^6)}{n_1^2\, n_2^2}(n_1,\, n_2)^2\qquad (50,\ 59)$$

$$=B\sum_{n_1\le n_2\le\sqrt x}\frac{n_2^4}{n_1^2}(n_1,\, n_2)^2 = B\sum_{d\le\sqrt x}d^2\sum_{\nu_1\le\nu_2\le\frac{\sqrt x}{d}}\frac{(\nu_2 d)^4}{(\nu_1 d)^2}$$

$$=B\sum_{d\le\sqrt x}d^4\sum_{\nu_2\le\frac{\sqrt x}{d}}\nu_2^4\sum_{\nu_1\le\nu_2}\frac{1}{\nu_1^2} = B\sum_{d\le\sqrt x}d^4\sum_{\nu_2\le\frac{\sqrt x}{d}}\nu_2^4$$

(61) $$=Bx^{\frac{5}{2}}\sum_{d\le\sqrt x}d^{4-5} = Bx^{\frac{5}{2}}\log x.$$

(62) $$S_4 = \frac{x^3}{6\pi^2}\sum_{n_1,\, n_2\le\sqrt x}{}'\frac{1}{n_1n_2}\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1b_2}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\alpha_1b_1-\alpha_2b_2)\right\}$$

$$+Bx^{\frac{5}{2}}\log x\qquad (60,\ 61).$$

$$\sum_{n_1=1}^\infty\sum_{n_2>\sqrt x}\frac{1}{n_1\, n_2}\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1b_2} = \sum_{n_2=1}^\infty\sum_{n_1>\sqrt x}\frac1{n_1\, n_2}\sum_{\substack{b_1,\, b_2=1\\ b_1n_2=b_2n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1b_2}$$

$$=B\sum_{n_2=1}^\infty\sum_{n_1>\sqrt x}\frac{(n_1,\, n_2)^2}{n_1^2\, n_2^2} = B\sum_{d=1}^\infty d^2\sum_{\nu_2=1}^\infty\frac{1}{(\nu_2 d)^2}\sum_{\nu_1>\frac{\sqrt x}{d}}\frac{1}{(\nu_1 d)^2}\qquad (59)$$

$$= B\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^2}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_2^2}\sum_{\nu_1>\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{\nu_1^2} = B\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^2}\sum_{\nu_1>\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{\nu_1^2}$$

$$= B\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\sum_{\nu_1>\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{\nu_1^2} + B\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_1^2}$$

(63) $$= B x^{-\frac{1}{2}}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{d} + B x^{-\frac{1}{2}} = B x^{-\frac{1}{2}}\log x.$$

$$S_4 = \frac{x^3}{6\pi^2}\sideset{}{'}\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty}\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{\substack{b_1, b_2=1\\ b_1 n_2 = b_2 n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1 b_2}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)\right\}$$

$$+ B x^3\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2>\sqrt{x}}\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{\substack{b_1, b_2=1\\ b_1 n_2 = b_2 n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1 b_2} + B x^3\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1>\sqrt{x}}\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{\substack{b_1, b_2=1\\ b_1 n_2 = b_2 n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1 b_2}$$

$$+ B x^{\frac{5}{2}}\log x \qquad \textbf{(62)}$$

(64) $$= \frac{x^3}{6\pi^2}\sideset{}{'}\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty}\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{\substack{b_1, b_2=1\\ b_1 n_2 = b_2 n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1 b_2}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)\right\}$$

$$+ B x^{\frac{5}{2}}\log x \qquad \textbf{(63).}$$

(65) $$\sum_{\substack{b_1, b_2=1\\ b_1 n_2 = b_2 n_1}}^{\infty}\frac{1}{b_1 b_2}\cos\left\{\frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)\right\}$$

$$= \frac{(n_1, n_2)^2}{n_1 n_2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\cos\left\{\frac{2\pi\mu}{N(n_1, n_2)}(\alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2)\right\} \qquad \textbf{(58).}$$

$$S_4 = \frac{x^3}{6\pi^2}\sideset{}{'}\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty}\frac{(n_1, n_2)^2}{n_1^2 n_2^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\cos\left\{\frac{2\pi\mu}{N(n_1, n_2)}(\alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2)\right\}$$

$$+ B x^{\frac{5}{2}}\log x \qquad \textbf{(64, 65)}$$

$$= \frac{x^3}{6\pi^2}\sum_{d=1}^{\infty} d^2 \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2=1\\ \nu_1 d\equiv\beta_1,\ \nu_2 d\equiv\beta_2 \pmod N\\ (\nu_1, \nu_2)=1}}^{\infty}\frac{1}{(\nu_1 d)^2(\nu_2 d)^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\cos\left\{\frac{2\pi\mu}{N d}(\alpha_1\nu_1 d - \alpha_2\nu_2 d)\right\}$$

$$+ B x^{\frac{5}{2}}\log x$$

(57) $$= \lambda x^3 + B x^{\frac{5}{2}}\log x \qquad \textbf{(17).}$$

Hilfssatz 8:

(66) $$S_5 = \sideset{}{'}\sum_{m_1, n_2\leqq\sqrt{x}}\frac{m_1}{n_2}\sum_{\substack{a_1, b_2=1\\ a_1 n_2 = b_2 m_1}}^{\infty}\frac{1}{a_1 b_2}\int_{r_2}^{x} u\,du = B x^{\frac{5}{2}}\log x,$$

(67) $$S_6 = \sideset{}{'}\sum_{m_1, m_2\leqq\sqrt{x}} m_1 m_2\sum_{\substack{a_1, a_2=1\\ a_1 m_2 = a_2 m_1}}^{\infty}\frac{1}{a_1 a_2}\int_{r_4}^{x} du = B x^{\frac{5}{2}}\log x.$$

Beweis:

$$S_5 = B x^2\sum_{m_1, n_2\leqq\sqrt{x}}\frac{m_1}{n_2}\frac{(m_1, n_2)^2}{m_1 n_2} = B x^2\sum_{m_1, n_2\leqq\sqrt{x}}\frac{(m_1, n_2)^2}{n_2^2} \qquad \textbf{(50, 59)}$$

$$= B x^2\sum_{d\leqq\sqrt{x}} d^2\sum_{\mu_1, \nu_2\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{(\nu_2 d)^2} = B x^2\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\sum_{\mu_1\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}} 1$$

$$= B x^{\frac{5}{2}}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{d} = B x^{\frac{5}{2}}\log x,$$

$$S_6 = B x\sum_{m_1, m_2\leqq\sqrt{x}} m_1 m_2\frac{(m_1, m_2)^2}{m_1 m_2} = B x\sum_{m_1, m_2\leqq\sqrt{x}}(m_1, m_2)^2 \qquad \textbf{(50, 59)}$$

$$= B x\sum_{d\leqq\sqrt{x}} d^2\sum_{\mu_1, \mu_2\leqq\frac{\sqrt{x}}{d}} 1 = B x^2\sum_{d\leqq\sqrt{x}} 1 = B x^{\frac{5}{2}}.$$

Hilfssatz 9:

$$S_7 = \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}' \frac{1}{n_1\, n_2} \sum_{\substack{b_1,\, b_2 = 1 \\ b_1 n_2 \neq b_2 n_1}}^{\infty} \frac{1}{b_1\, b_2} \left| \int_{r_1}^{x} u^2 \cos\left\{ \frac{2\pi u}{N}\left(\frac{b_1}{n_1} - \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2) \right\} du \right|$$

$$= B\, x^{\frac{5}{2}} \log x, \tag{68}$$

$$S_8 = \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}' \frac{m_1}{n_2} \sum_{\substack{a_1,\, b_2 = 1 \\ a_1 n_2 \neq b_2 m_1}}^{\infty} \frac{1}{a_1\, b_2} \left| \int_{r_2}^{x} u \cos\left\{ \frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_1} - \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 - \alpha_2 b_2) \right\} du \right|$$

$$= B\, x^{\frac{5}{2}} \log x, \tag{69}$$

$$S_9 = \sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}}' m_1\, m_2 \sum_{\substack{a_1,\, a_2 = 1 \\ a_1 m_2 \neq a_2 m_1}}^{\infty} \frac{1}{a_1\, a_2} \left| \int_{r_4}^{x} \cos\left\{ \frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_2} - \frac{a_2}{m_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 - \beta_2 a_2) \right\} du \right|$$

$$= B\, x^{\frac{5}{2}} \log x. \tag{70}$$

Beweis:

$$\sum_{m \leqq n \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{a,\, b = 1 \\ a n \neq b m}}^{\infty} \frac{1}{a b \,|\, a n - b m \,|} = B\, x^{\frac{1}{2}} \log x \tag{71}$$

(das ist Hilfssatz 6 von T_{II}),

$$\sum_{n \leqq m \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{a,\, b = 1 \\ a n \neq b m}}^{\infty} \frac{1}{a b \,|\, a n - b m \,|} = B\, x^{\frac{1}{2}} \log x \tag{72}$$

(ich habe in (71) ersetzt: m, n, a, b durch n, m, b, a),

$$\sum_{m,\, n \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{a,\, b = 1 \\ a n \neq b m}}^{\infty} \frac{1}{a b \,|\, a n - b m \,|} = B\, x^{\frac{1}{2}} \log x \qquad \textbf{(71, 72)}. \tag{73}$$

$$S_7 = B \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n_1\, n_2} \sum_{\substack{b_1,\, b_2 = 1 \\ b_1 n_2 \neq b_2 n_1}}^{\infty} \frac{1}{b_1\, b_2}\, x^2 \left| \frac{b_1}{n_1} - \frac{b_2}{n_2} \right|^{-1}$$

$$= B x^2 \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{b_1,\, b_2 = 1 \\ b_1 n_2 \neq b_2 n_1}}^{\infty} \frac{1}{b_1 b_2 \,|\, b_1 n_2 - b_2 n_1 \,|} = B\, x^{\frac{5}{2}} \log x \qquad \textbf{(73)},$$

$$S_8 = B \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{m_1}{n_2} \sum_{\substack{a_1,\, b_2 = 1 \\ a_1 n_2 \neq b_2 m_1}}^{\infty} \frac{1}{a_1\, b_2}\, x \left| \frac{a_1}{m_1} - \frac{b_2}{n_2} \right|^{-1}$$

$$= B\, x^2 \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{a_1,\, b_2 = 1 \\ a_1 n_2 \neq b_2 m_1}}^{\infty} \frac{1}{a_1 b_2 \,|\, a_1 n_2 - b_2 m_1 \,|} = B\, x^{\frac{5}{2}} \log x \qquad \textbf{(73)},$$

$$S_9 = B \sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}} m_1\, m_2 \sum_{\substack{a_1,\, a_2 = 1 \\ a_1 m_2 \neq a_2 m_1}}^{\infty} \frac{1}{a_1\, a_2} \left| \frac{a_1}{m_1} - \frac{a_2}{m_2} \right|^{-1}$$

$$= B\, x^2 \sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}} \sum_{\substack{a_1,\, a_2 = 1 \\ a_1 m_2 \neq a_2 m_1}}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \,|\, a_1 m_2 - a_2 m_1 \,|} = B\, x^{\frac{5}{2}} \log x \qquad \textbf{(73)}.$$

Hilfssatz 10:

$$S_{10} = \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}' \frac{1}{n_1\, n_2} \sum_{b_1,\, b_2 = 1}^{\infty} \frac{1}{b_1\, b_2} \left| \int_{r_1}^{x} u^2 \cos\left\{ \frac{2\pi u}{N}\left(\frac{b_1}{n_1} + \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \right\} du \right|$$

$$= B\, x^{\frac{5}{2}} \log x, \tag{74}$$

$$S_{11} = \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}}' \frac{m_1}{n_2} \sum_{a_1,\, b_2 = 1}^{\infty} \frac{1}{a_1\, b_2} \left| \int_{r_2}^{x} u \cos\left\{ \frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_1} + \frac{b_2}{n_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 + \alpha_2 b_2) \right\} du \right|$$

$$= B\, x^{\frac{5}{2}} \log x, \tag{75}$$

$$S_{12} = \sum'_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}} m_1 m_2 \sum_{a_1,\, a_2=1}^{\infty} \frac{1}{a_1\, a_2} \left| \int_{r_4}^{x} \cos\left\{\frac{2\pi u}{N}\left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}\right) - \frac{2\pi}{N}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2)\right\} du \right|$$

(76) $$= B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Beweis:

$$S_{10} = B \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n_1\, n_2} \sum_{b_1,\, b_2=1}^{\infty} \frac{1}{b_1\, b_2}\, x^2 \left(\frac{b_1}{n_1}+\frac{b_2}{n_2}\right)^{-1}$$

$$= B x^2 \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n_1\, n_2} \sum_{b_1,\, b_2=1}^{\infty} \frac{1}{b_1\, b_2} \left(\frac{n_1\, n_2}{b_1\, b_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= B x^2 \sum_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} (n_1 n_2)^{-\frac{1}{2}} = B x^{\frac{5}{2}},$$

$$S_{11} = B \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{m_1}{n_2} \sum_{a_1,\, b_2=1}^{\infty} \frac{1}{a_1\, b_2}\, x \left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{b_2}{n_2}\right)^{-1}$$

$$= B x \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{m_1}{n_2} \sum_{a_1,\, b_2=1}^{\infty} \frac{1}{a_1\, b_2} \left(\frac{m_1\, n_2}{a_1\, b_2}\right)^{\frac{1}{2}} = B x \sum_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} m_1^{\frac{3}{2}}\, n_2^{-\frac{1}{2}} = B x^{\frac{5}{2}},$$

$$S_{12} = B \sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}} m_1 m_2 \sum_{a_1,\, a_2=1}^{\infty} \frac{1}{a_1\, a_2} \left(\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}\right)^{-1}$$

$$= B \sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}} m_1 m_2 \sum_{a_1,\, a_2=1}^{\infty} \frac{1}{a_1\, a_2} \left(\frac{m_1\, m_2}{a_1\, a_2}\right)^{\frac{1}{2}} = B \sum_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}} (m_1 m_2)^{\frac{3}{2}} = B x^{\frac{5}{2}}.$$

Hilfssatz 11:

(77) $$\sum'_{n_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n_1\, n_2} \int_{r_1}^{x} u^2\, \psi\left\{\left(\frac{u}{n_1} - \alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\} \psi\left\{\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\} du$$

$$= \lambda x^3 + B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

(78) $$\sum'_{m_1,\, n_2 \leqq \sqrt{x}} \frac{m_1}{n_2} \int_{r_2}^{x} u\, \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1} - \beta_1\right)\frac{1}{N}\right\} \psi\left\{\left(\frac{u}{n_2} - \alpha_2\right)\frac{1}{N}\right\} du$$

$$= B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

(79) $$\sum'_{m_2,\, n_1 \leqq \sqrt{x}} \frac{m_2}{n_1} \int_{r_3}^{x} u\, \psi\left\{\left(\frac{u}{m_2} - \beta_2\right)\frac{1}{N}\right\} \psi\left\{\left(\frac{u}{n_1} - \alpha_1\right)\frac{1}{N}\right\} du$$

$$= B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

(80) $$\sum'_{m_1,\, m_2 \leqq \sqrt{x}} m_1 m_2 \int_{r_4}^{x} \psi\left\{\left(\frac{u}{m_1} - \beta_1\right)\frac{1}{N}\right\} \psi\left\{\left(\frac{u}{m_2} - \beta_2\right)\frac{1}{N}\right\} du$$

$$= B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Beweis; 1) (53), (57), (68), (74); 2) (54), (66), (69), (75); 3) (79) folgt aus (78), indem man m_1, n_2, α_1, β_2, β_1, α_2, r_2 durch m_2, n_1, α_2, β_1, β_2, α_1, r_3 ersetzt (50); 4) (55), (67), (70), (76).

Beweis von (II): (51), (77) — (80).

§ 2.

Ich stelle mir zunächst die aus M benötigten Hilfsmittel zusammen und führe einige Bezeichnungen ein.

Sind F, c_n und C durch (7) und (8) definiert, so gilt nach Hecke (l. c.[3]), vgl. auch M, S. 75 — 77)

(81) $$C(x) = B x \log x,$$

(82) $$\sum_{n \leqq x} |\, c_n \,| = B x^{\frac{3}{2}},$$

$$\tau^2 F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{2\pi i n}{N\tau}}, \text{ wo}$$

(83) $$\sum_{n \leqq x} | b_n | = B x^{\frac{3}{2}}.$$

Für

(84) $$C_1(u) = \int_1^u C(v)\, dv = \sum_{n \leqq u} c_n (u - n) \qquad (8)$$

gilt (M (24))

(85) $$C_1(u) = -\frac{N}{2\pi} u^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-\frac{3}{2}} J_3 \left(\frac{4\pi}{N} \sqrt{nu} \right),$$

wo J die Besselsche Funktion erster Art bedeutet.

Es sei stets $E = 0$ oder 1.

(86) $\Delta f(u) = f(u+1) - f(u)$, wenn die rechte Seite einen Sinn hat.

Wird

(87) $$\Phi(u) = u^{\frac{5}{4}} \sum_{s=1}^{\infty} b_s s^{-\frac{7}{4}} \Delta \cos \left(\frac{4\pi}{N} \sqrt{su} + \frac{\pi}{4} \right)$$

gesetzt (M (39); das dortige α wird mit Rücksicht auf M (60) gleich $\frac{\pi}{4}$ angenommen), so gilt (M (68) uud (72))

(88) $$\Delta C_1(u) = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{N}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \Phi(u) + B u^{\frac{1}{4}} \quad (u \geqq 1).$$

Weitere Bezeichnungen werden noch eingeführt.

Hilfssatz 12: *Mit*

(89) $$U_1 = \sum_{m \leqq \sqrt{x}}{}' m \int_{m^2}^{x} \psi \left\{ \left(\frac{u}{m} - \beta \right) \frac{1}{N} \right\} C(u)\, du,$$

(90) $$U_2 = \sum_{n \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{1}{n} \int_{n^2}^{x} \psi \left\{ \left(\frac{u}{n} - \alpha \right) \frac{1}{N} \right\} u\, C(u)\, du$$

ist

(91) $$U(x) = U_1 + U_2 + B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Beweis:

$$U(x) = \left(\frac{\alpha}{N} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{N} \int_1^x u\, C(u)\, du + \int_1^x \sum_{m \leqq \sqrt{u}}{}' m \psi \left\{ \left(\frac{u}{m} - \beta \right) \frac{1}{N} \right\} C(u)\, du$$

$$+ \int_1^x u \sum_{n \leqq \sqrt{u}}{}' \frac{1}{n} \psi \left\{ \left(\frac{u}{n} - \alpha \right) \frac{1}{N} \right\} C(u)\, du + B \int_1^x \sqrt{u}\, | C(u) |\, du \qquad (18,\ 29)$$

(92) $$= B \int_1^x u\, C(u)\, du + U_1 + U_2 + B x^{\frac{5}{2}} \log x \qquad (89, 90, 81).$$

(93) $$C_1(u) = B u^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} | b_n | n^{-\frac{3}{2}} (nu)^{-\frac{1}{4}} = B u^{\frac{5}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} | b_n | n^{-\frac{7}{4}} = B u^{\frac{5}{4}} \qquad (85, 83),$$

(94) $$\int_1^x u\, C(u)\, du = x\, C_1(x) - \int_1^x C_1(u)\, du = B x^{\frac{9}{4}} \qquad (84, 93).$$

(91) folgt aus (92) und (94).

Hilfssatz 13: *Mit*

(95) $$U_{11} = \sum_{m \leqq \sqrt{x}}{}' m \int_{m^2}^{x} \psi \left\{ \left(\frac{u}{m} - \beta \right) \frac{1}{N} \right\} \Delta C_1(u)\, du,$$

(96) $$U_{21} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{1}{n} \int_{n^2}^{x} \psi \left\{ \left(\frac{u}{n} - \alpha \right) \frac{1}{N} \right\} u\, \Delta C_1(u)\, du$$

ist

(97) $$U_1 = U_{11} + B x^{\frac{5}{2}} \log x, \qquad U_2 = U_{21} + B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Beweis:

$$| \Delta C_1(u) - C(u) | = \left| \int_u^{u+1} \{ C(v) - C(u) \}\, dv \right| = \left| \int_u^{u+1} dv \sum_{u < n \leqq v} c_n \right| \qquad (86, 84, 8)$$

$$(98)\qquad \leqq \sum_{u<n\leqq u+1} |c_n|,$$

$$(99)\qquad \int_1^x |\Delta C_1(u)-C(u)|\,du \leqq \sum_{n\leqq x+1} |c_n| \int_{n-1}^{n} du = B x^{\frac{3}{2}} \qquad (98, 82).$$

$$U_1-U_{11}=B\sum_{m\leqq\sqrt{x}} m\int_{m^2}^x |\Delta C_1(u)-C(u)|\,du \qquad (28, 89, 95)$$

$$=Bx\,.\int_1^x |\Delta C_1(u)-C(u)|\,du=Bx^{\frac{5}{2}} \qquad (99).$$

$$U_2-U_{21}=B\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\int_{n^2}^x u\,|\Delta C_1(u)-C(u)|\,du \qquad (28, 90, 96)$$

$$=Bx\log x\,.\int_1^x |\Delta C_1(u)-C(u)|\,du=Bx^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (99).$$

Hilfssatz 14: *Mit*

$$(100)\qquad U_{12}=\sum_{m\leqq\sqrt{x}}{}' m\sum_{s=1}^{\infty} b_s s^{-\frac{7}{4}}\int_{m^2}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\} u^{\frac{5}{4}}\,\Delta\cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right)du,$$

$$(101)\qquad U_{22}=\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}'\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{\infty} b_s s^{-\frac{7}{4}}\int_{n^2}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\} u^{\frac{9}{4}}\,\Delta\cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right)du$$

ist

$$(102)\qquad U_{11}=B\,U_{12}+Bx^{\frac{5}{2}}\log x,\quad U_{21}=B\,U_{22}+Bx^{\frac{5}{2}}\log x.$$

Beweis:

$$U_{11}=B\sum_{m\leqq\sqrt{x}}{}' m\int_{m^2}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\}\Phi(u)\,du+B\sum_{m\leqq\sqrt{x}} m\,x^{\frac{5}{4}} \qquad (95, 88)$$

$$(103)\qquad =B\sum_{m\leqq\sqrt{x}}{}' m\int_{m^2}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\} u^{\frac{5}{4}}\sum_{s=1}^{\infty} b_s s^{-\frac{7}{4}}\,\Delta\cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right)du+ Bx^{\frac{9}{4}} \qquad (87)$$

$$(104)\qquad =B\sum_{m\leqq\sqrt{x}}{}' m\sum_{s=1}^{\infty} b_s s^{-\frac{7}{4}}\int_{m^2}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{m}-\beta\right)\frac{1}{N}\right\} u^{\frac{5}{4}}\,\Delta\cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right)du+ Bx^{\frac{9}{4}}$$

$$=B\,U_{12}+Bx^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (100).$$

Die Vertauschung der Integration mit der Summation beim Übergang von (103) zu (104) ist erlaubt, weil die s-Reihe wegen (83) absolut und gleichmässig in u konvergiert. Ebenso wird diese Vertauschung in (105) gerechtfertigt.

$$U_{21}=B\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}'\frac{1}{n}\int_{n^2}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\} u\,\Phi(u)\,du+B\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n}x^{\frac{9}{4}} \qquad (96, 88)$$

$$(105)\qquad =B\sum_{n\leqq\sqrt{x}}{}'\frac{1}{n}\int_{n^2}^x \psi\left\{\left(\frac{u}{n}-\alpha\right)\frac{1}{N}\right\} u^{\frac{9}{4}}\sum_{s=1}^{\infty} b_s s^{-\frac{7}{4}}\,\Delta\cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right)du+ Bx^{\frac{9}{4}}\log x \qquad (87)$$

$$=B\,U_{22}+Bx^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (101).$$

Ich setze jetzt zur Abkürzung

$$(106)\qquad \rho=\frac{2\pi r}{Nn},\quad \sigma=\frac{4\pi}{N}\sqrt{s},$$

$$(107)\qquad \omega=\frac{\sigma}{2\rho}=\frac{n\sqrt{s}}{r},$$

$$I = I_E^{\pm} = \int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E}\, e^{i\rho u}\, \Delta\, e^{\pm i\sigma\sqrt{u}}\, du \qquad (n \leqq \sqrt{x}) \,. \tag{108}$$

Hierbei sind n, r und s natürliche Zahlen, während sich in (108), wie auch in allen späteren Formeln mit $\pm$, die oberen und unteren Vorzeichen entsprechen.

Hilfssatz 15: *Mit*

$$U_{13} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |\, b_s \,|\, s^{-\frac{7}{4}} \,|\, I_0^{+} \,| \,, \tag{109}$$

$$U_{14} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |\, b_s \,|\, s^{-\frac{7}{4}} \,|\, I_0^{-} \,| \,, \tag{110}$$

$$U_{23} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |\, b_s \,|\, s^{-\frac{7}{4}} \,|\, I_1^{+} \,| \,, \tag{111}$$

$$U_{24} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |\, b_s \,|\, s^{-\frac{7}{4}} \,|\, I_1^{-} \,| \tag{112}$$

ist

$$U(x) = B\, U_{13} + B\, U_{14} + B\, U_{23} + B\, U_{24} + B\, x^{\frac{5}{2}} \log x. \tag{113}$$

Beweis: Auf die in (100) auftretenden Integrale wende ich Hilfssatz 3 an mit: $u_1 = m^2$, $u_2 = x$, $g(u) = \psi\left\{\left(\frac{u}{m} - \beta\right)\frac{1}{N}\right\}$,

$$h(u) = u^{\frac{5}{4}}\, \Delta \cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{s\,u} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$s_k(u) = -\frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r} \sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{m} - \beta\right)\right\}, \quad t_k(u) = h(u) \,. \tag{114}$$

Ebenso wende ich auf die in (101) autretenden Integrale Hilfssatz 3 an mit: $u_1 = n^2$, $u_2 = x$, $g(u) = \psi\left\{\left(\frac{u}{n} - \alpha\right)\frac{1}{N}\right\}$,

$$h(u) = u^{\frac{9}{4}}\, \Delta \cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{s\,u} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$s_k(u) = -\frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r} \sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{n} - \alpha\right)\right\}, \quad t_k(u) = h(u) \,. \tag{115}$$

$$U_{12} = -\frac{1}{\pi} \sum_{m \leqq \sqrt{x}}{}' \, m \sum_{s=1}^{\infty} b_s\, s^{-\frac{7}{4}} \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r}$$

$$\times \int_{m^2}^{x} u^{\frac{5}{4}} \sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{m} - \beta\right)\right\} \Delta \cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{s\,u} + \frac{\pi}{4}\right) du \qquad (100,\ 52,\ 114)$$

$$= B \sum_{m \leqq \sqrt{x}} m \sum_{s=1}^{\infty} |\, b_s \,|\, s^{-\frac{7}{4}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$$

$$\times \left| \int_{m^2}^{x} u^{\frac{5}{4}} \sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{m} - \beta\right)\right\} \Delta \cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{s\,u} + \frac{\pi}{4}\right) du \right|$$

$$= B \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |\, b_s \,|\, s^{-\frac{7}{4}} \tag{116}$$

$$\times \left| \int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}} \sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{n} - \beta\right)\right\} \Delta \cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{s\,u} + \frac{\pi}{4}\right) du \right| .$$

$$U_{22} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leqq \sqrt{x}}{}' \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\infty} b_s\, s^{-\frac{7}{4}} \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r}$$

$$\times \int_{n^2}^{x} u^{\frac{9}{4}} \sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{n} - \alpha\right)\right\} \Delta \cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{s\,u} + \frac{\pi}{4}\right) du \qquad (101,\ 52,\ 115)$$

$$= B \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |\, b_s \,|\, s^{-\frac{7}{4}} \tag{117}$$

$$\times \left| \int_{n^2}^{x} u^{\frac{9}{4}} \sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{n}-\alpha\right)\right\} \Delta \cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right) du \right| .$$

(86) $$2\sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)\right\}\Delta\cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)\right\}-\exp\left\{-\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)\right\}\right)$$

$$\times\left(\Delta\exp\left\{\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi i}{4}\right\}+\Delta\exp\left\{-\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}-\frac{\pi i}{4}\right\}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)\right\}-\exp\left\{-\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{N}-\beta\right)\right\}\right)$$

$$\times\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\Delta\exp\left\{\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}+e^{-\frac{\pi i}{4}}\Delta\exp\left\{-\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)+\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}\right.$$

$$-\exp\left\{-\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)-\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{-\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}$$

$$+\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)-\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{-\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)+\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}\right)$$

(118) $$=\Im\left(\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)+\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}\right)$$

$$+\Im\left(\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)-\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{-\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}\right),$$

$$\left|\int_{n^3}^{x} u^{\frac{5}{4}+E}\sin\left\{\frac{2\pi r}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)\right\}\Delta\cos\left(\frac{4\pi}{N}\sqrt{su}+\frac{\pi}{4}\right)du\right|$$

$$\leqq\left|\int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E}\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)+\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}du\right|$$

$$+\left|\int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E}\exp\left\{\frac{2\pi ri}{N}\left(\frac{u}{n}-\beta\right)-\frac{\pi i}{4}\right\}\Delta\exp\left\{-\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}du\right| \qquad (118)$$

$$=\left|\int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E}\exp\left\{\frac{2\pi ri}{Nn}u\right\}\Delta\exp\left\{\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}du\right|$$

$$+\left|\int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E}\exp\left\{\frac{2\pi ri}{Nn}u\right\}\Delta\exp\left\{-\frac{4\pi i}{N}\sqrt{su}\right\}du\right|$$

(119) $$=\left|\int_{n^2}^{x} {}^{\frac{5}{4}+E}e^{i\rho u}\Delta e^{i\sigma\sqrt{u}}du\right|=\left|\int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E}e^{i\rho u}\Delta e^{-i\sigma\sqrt{u}}du\right|$$

$$=|I_E^+|+|I_E^-| \qquad \textbf{(106, 108)}.$$

(120) $U_{12}=BU_{13}+BU_{14}$, $U_{22}=BU_{23}+BU_{24}$ **(116, 117, 119, 109—112).**

(113) folgt aus (91), (97), (102) und (120).

Hilfssatz 16: *Mit*

(121) $$U_3=\sum_{E=0}^{1}x^{1-E}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{s=1}^{\infty}|b_s|\,s^{-\frac{7}{4}}\,|I_E^+|,$$

(122) $$U_4=\sum_{E=0}^{1}x^{1-E}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{s=1}^{\infty}|b_s|\,s^{-\frac{7}{4}}\,|I_E^-|$$

ist

(123) $$U(x)=BU_3+BU_4+Bx^{\frac{5}{2}}\log x.$$

Beweis:

(124) $$U_{13}=Bx\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{s=1}^{\infty}|b_s|\,s^{-\frac{7}{4}}\,|I_0^+| \qquad \textbf{(109)},$$

$$U_{14} = B\,x \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}}\, |I_0| \tag{125}$$ (110).

(123) folgt aus (113), (124), (111), (121), (125), (112) und (122).

Hilfssatz 17:

$$I = B\,\mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{x}}{n};\, \frac{n}{r}\right) x^{\frac{5}{4}+E} \quad \text{für } \omega \leqq \frac{n}{2}, \tag{126}$$

$$I = B\,\mathrm{Min}\left(\sqrt{\frac{r}{n}};\, \sqrt{\frac{n}{r}}\right) \omega^{\frac{7}{2}} x^{E} + B\,x^{\frac{3}{2}+E} \quad \text{für } \frac{n}{2} < \omega < \sqrt{2x}, \tag{127}$$

$$I = B\,x^{\frac{5}{4}+E} \quad \text{für } \omega \geqq \sqrt{2x}. \tag{128}$$

Beweis:

$$I = \int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E} e^{i\rho u} \left(e^{\pm i\sigma\sqrt{u+1}} - e^{\pm i\sigma\sqrt{u}}\right) du \tag{129}$$ (108, 86).

$$\int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E} e^{i\rho u \pm i\sigma\sqrt{u+1}}\, du = \int_{n^2+1}^{x+1} (u-1)^{\frac{5}{4}+E} e^{i\rho(u-1) \pm i\sigma\sqrt{u}}\, du$$

$$= e^{-i\rho} \int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E} e^{i\rho u \pm i\sigma\sqrt{u}}\, du + B\,x^{\frac{5}{4}+E}. \tag{130}$$

$$\int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E} e^{i\rho u \pm i\sigma\sqrt{u}}\, du = \int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E} e^{i\rho\left(u \pm 2\omega\sqrt{u}\right)}\, du$$ (107)

$$= B \int_{n}^{\sqrt{x}} u^{\frac{7}{2}+2E} e^{i\rho(u \pm \omega)^2}\, du, \tag{131}$$

$$I = (e^{-i\rho} - 1) \int_{n^2}^{x} u^{\frac{5}{4}+E} e^{i\rho u \pm i\sigma\sqrt{u}}\, du + B\,x^{\frac{5}{4}+E}$$ (129, 130)

$$= B\,\mathrm{Min}(\rho;\, 1) \int_{n}^{\sqrt{x}} u^{\frac{7}{2}+2E} e^{i\rho(u \pm \omega)^2}\, du + B\,x^{\frac{5}{4}+E} \tag{132}$$ (131).

1) Es sei $\omega \leqq \frac{n}{2}$.

$$I = B\,\rho \int_{n}^{\sqrt{x}} \frac{u^{\frac{7}{2}+2E}}{\rho\,(u \pm \omega)}\, d\,e^{i\rho(u \pm \omega)^2} + B\,x^{\frac{5}{4}+E}$$ (132)

$$= B\,x^{\frac{7}{4}+E} n^{-1} + B\,x^{\frac{5}{4}+E} = B\,x^{\frac{7}{4}+E} n^{-1}. \tag{133}$$

$$I = \int_{n^2}^{x} \frac{u^{\frac{5}{4}+E}}{i\left(\rho \pm \frac{\sigma}{2\sqrt{u+1}}\right)}\, d\,e^{i\rho u \pm i\sigma\sqrt{u+1}} - \int_{n^2}^{x} \frac{u^{\frac{5}{4}+E}}{i\left(\rho \pm \frac{\sigma}{2\sqrt{u}}\right)}\, d\,e^{i\rho u \pm i\sigma\sqrt{u}}$$ (129)

$$= B\,\frac{x^{\frac{5}{4}+E}}{\left(\rho - \frac{\sigma}{2n}\right)} = B\,\frac{x^{\frac{5}{4}+E}}{\rho\left(1 - \frac{\omega}{n}\right)} = B\,x^{\frac{5}{4}+E} \rho^{-1}$$ (107)

$$= B\,x^{\frac{5}{4}+E}\, n\, r^{-1} \tag{134}$$ (106).

(126) folgt aus (133) und (134).

2) Es sei $\frac{n}{2} < \omega < \sqrt{2x}$.

$$\int_{n}^{\sqrt{x}} u^{\frac{7}{2}+2E} e^{i\rho(u \pm \omega)^2}\, du = \int_{\substack{n \\ |u \pm \omega| \leqq \sqrt[4]{x}}}^{\sqrt{x}} + \int_{\substack{n \\ |u \pm \omega| > \sqrt[4]{x}}}^{\sqrt{x}} = I_1 + I_2. \tag{135}$$

$$I_1 = B\left(\omega^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{7}{8}}\right) x^{E} \left\{ \left| \int \cos(\rho u^2)\, du \right| + \left| \int \sin(\rho u^2)\, du \right| \right\}$$ (135),

wo über je ein geeignetes Intervall integriert wird,

$$(136)\qquad = B\,\omega^{\frac{7}{2}} x^{E} \rho^{-\frac{1}{2}} + B\,x^{\frac{7}{8}+E} \rho^{-\frac{1}{2}}.$$

$$I_2 = \int\limits_{\substack{n \\ |u\pm\omega|>\sqrt[4]{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{u^{\frac{7}{2}+2E}}{2\,i\,\rho\,(u\pm\omega)}\, d\, e^{i\rho(u\pm\omega)^2} \qquad (135)$$

$$(137)\qquad = B\,x^{\frac{7}{4}+E} \rho^{-1} x^{-\frac{1}{4}} = B\,x^{\frac{3}{2}+E} \rho^{-1}.$$

$$(138)\quad \int_n^{\sqrt{x}} u^{\frac{7}{2}+2E} e^{i\rho(u\pm\omega)^2} du = B\,\omega^{\frac{7}{2}} x^{E} \rho^{-\frac{1}{2}} + B\,x^{\frac{7}{8}+E} \rho^{-\frac{1}{2}} + B\,x^{\frac{3}{2}+E} \rho^{-1}$$

(135-137).

$$I = B \operatorname{Min}\left(\rho^{\frac{1}{2}};\ \rho^{-\frac{1}{2}}\right) \omega^{\frac{7}{2}} x^{E} + B \operatorname{Min}\left(\rho^{\frac{1}{2}};\ \rho^{-\frac{1}{2}}\right) x^{\frac{7}{8}+E}$$

$$+ B \operatorname{Min}\left(1;\ \rho^{-1}\right) x^{\frac{3}{2}+E} + B\,x^{\frac{5}{4}+E} \qquad (132, 138)$$

$$= B \operatorname{Min}\left(\rho^{\frac{1}{2}};\ \rho^{-\frac{1}{2}}\right) \omega^{\frac{7}{2}} x^{E} + B\,x^{\frac{3}{2}+E}$$

$$(127)\qquad = B \operatorname{Min}\left(\sqrt{\frac{r}{n}};\sqrt{\frac{n}{r}}\right) \omega^{\frac{7}{2}} x^{E} + B\,x^{\frac{3}{2}+E} \qquad (106).$$

3) Es sei $\omega \geqq \sqrt{2\,x}$.

$$\int_n^{\sqrt{x}} u^{\frac{7}{2}+2E} e^{i\rho(u\pm\omega)^2} du = \int_n^{\sqrt{x}} \frac{u^{\frac{7}{2}+2E}}{2\,i\,\rho\,(u\pm\omega)}\, d\, e^{i\rho(u\pm\omega)^2}$$

$$(139)\qquad = B\,x^{\frac{7}{4}+E} \rho^{-1} x^{-\frac{1}{2}} = B\,x^{\frac{5}{4}+E} \rho^{-1},$$

$$I = B \operatorname{Min}\left(1;\ \rho^{-1}\right) x^{\frac{5}{4}+E} + B\,x^{\frac{5}{4}+E} = B\,x^{\frac{5}{4}+E} \qquad (132, 139).$$

Beweis von (III):

$$\sum_{E=0}^{1} x^{1-E} \sum_{n\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\substack{s=1 \\ \omega\leqq\frac{n}{2}}}^{\infty} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}} |I|$$

$$= B\,x^{\frac{9}{4}} \sum_{n\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \operatorname{Min}\left(\frac{\sqrt{x}}{n};\ \frac{n}{r}\right) \sum_{s=1}^{\infty} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}} \qquad (126)$$

$$= B\,x^{\frac{9}{4}} \sum_{n\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \operatorname{Min}\left(\frac{\sqrt{x}}{n};\ \frac{n}{r}\right) \qquad (83)$$

$$= B\,x^{\frac{9}{4}} \sum_{n\leqq\sqrt[4]{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{n}{r} + B\,x^{\frac{9}{4}} \sum_{n>\sqrt[4]{x}} \frac{1}{n} \sum_{r\leqq x} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{x}}{n} +$$

$$+ B\,x^{\frac{9}{4}} \sum_{\sqrt[4]{x}<n\leqq x} \frac{1}{n} \sum_{r>x} \frac{1}{r} \frac{n}{r}$$

$$(140)\qquad = B\,x^{\frac{5}{2}} + B\,x^{\frac{5}{2}} \log x + B\,x^{\frac{7}{4}} = B\,x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

$$\sum_{E=0}^{1} x^{1-E} \sum_{n\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\substack{s=1 \\ \frac{n}{2}<\omega<\sqrt{2x}}}^{\infty} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}} |I|$$

$$= B\,x \sum_{n\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\frac{r^2}{4}<s<\frac{2xr^2}{n^2}} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}} \left\{ \operatorname{Min}\left(\sqrt{\frac{r}{n}};\sqrt{\frac{n}{r}}\right) n^{\frac{7}{2}} s^{\frac{7}{4}} r^{-\frac{7}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right\}$$

(127, 107)

$$= B\,x \sum_{n\leqq\sqrt{x}} n^{\frac{5}{2}} \sum_{r=1}^{\infty} r^{-\frac{9}{2}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{\frac{r}{n}};\ \sqrt{\frac{n}{r}}\right) \sum_{s<\frac{2xr^2}{n^2}} |b_s| +$$

$$+ B\,x^{\frac{5}{2}} \log x \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s>\frac{r^2}{4}} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}}$$

$$= B x \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n^{\frac{5}{2}} \sum_{r=1}^{\infty} r^{-\frac{9}{2}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{\frac{r}{n}};\sqrt{\frac{n}{r}}\right) x^{\frac{3}{2}} r^3 n^{-3} + B x^{\frac{5}{2}} \log x \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{-\frac{3}{2}}$$ (83)

$$= B x^{\frac{5}{2}} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{\infty} r^{-\frac{3}{2}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{\frac{r}{n}};\sqrt{\frac{n}{r}}\right) + B x^{\frac{5}{2}} \log x$$

$$= B x^{\frac{5}{2}} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \sum_{r \leqq n} \frac{1}{r\sqrt{n}} + \sum_{r > n} \frac{\sqrt{n}}{r^2} \right\} + B x^{\frac{5}{2}} \log x$$

(141) $$= B x^{\frac{5}{2}} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{\log n}{n} + B x^{\frac{5}{2}} \log x = B x^{\frac{5}{2}} \log^2 x.$$

$$\sum_{E=0}^{1} x^{1-E} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\substack{s=1 \\ \omega \geqq \sqrt{2x}}}^{\infty} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}} |I|$$

$$= B x^{\frac{9}{4}} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s \geqq \frac{2xr^2}{n^2}} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}}$$ (128, 107)

$$= B x^{\frac{9}{4}} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} x^{-\frac{1}{4}} r^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} =$$

142) $$= B x^2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{\infty} r^{-\frac{3}{2}} = B x^{\frac{9}{4}}$$ (83).

(143) $$\sum_{E=0}^{1} x^{1-E} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{\infty} |b_s|\, s^{-\frac{7}{4}} |I| = B x^{\frac{5}{2}} \log^2 x$$ (140—142).

(144) $$U_3 = B x^{\frac{5}{2}} \log^2 x, \quad U_4 = B x^{\frac{5}{2}} \log^2 x$$ (121, 122, 143).

(III) folgt aus (123) und (144).

§ 3.

Ich habe nachzuweisen, dass die Konstante $\varkappa$ in (I) stets positiv sein muss. Hierzu ist es nötig, Formen in mehr als vier Veränderlichen zu betrachten. Es sei $k \geqq 4$,

(145) $$Q = \sum_{g,h=1}^{k} a_{gh} n_g n_h \qquad (a_{gh} = a_{hg} \text{ ganzzahlig})$$

eine positiv definite quadratische Form der Determinante D. Die Anzahl $A(x)$ der Gitterpunkte $\neq (0, \ldots, 0)$ im abgeschlossenen Ellipsoid $Q \leqq u$ ist dann wieder durch (2), mit u statt x, gegeben. Das Ellipsoidvolumen ist diesmal

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} u^{\frac{k}{2}},$$

also der Gitterrest

(146) $$P(u) = \sum_{Q \leqq u} 1 - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} u^{\frac{k}{2}} \quad (u > 0).$$

Hilfssatz 18: *Zu jedem Q mit $k \geqq 12$ gibt es eine positive Zahl $p = p_Q$, so dass*

(147) $$\int_0^x P^2(u)\, du \geqq p\, x^{k-1} + B x^{k-2}.$$

Beweis: Es sei n eine natürliche Zahl. Wegen $k \geqq 12$ gilt dann nach Formel (27) von E_{III} für $n < u < n+1$ mit einem geeigneten reellen $e_n = B$

$$P(u) = -\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{\frac{k}{2}-1} \psi(u) + e_n u^{\frac{k}{2}-1} + B u^{\frac{k}{2}-2}.$$

$$\int_n^{n+1} P^2(u)\, du = \frac{\pi^k}{D\,\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \int_n^{n+1} u^{k-2} \psi^2(u)\, du + B \int_n^{n+1} u^{k-2} \psi(u)\, du$$

$$+ e_n^2 \int_n^{n+1} u^{k-2}\, du + B \int_n^{n+1} u^{k-3}\, du$$

(148) $$\geqq \frac{\pi^k}{D\,\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \int_n^{n+1} u^{k-2} \psi^2(u)\, du + B \int_n^{n+1} u^{k-2} \psi(u)\, du + B\, n^{k-3}.$$

(149) $$\int_n^{n+1} u^{k-2} \psi(u)\, du = \int_n^{n+1} (u^{k-2} - n^{k-2})\, \psi(u)\, du = B\, n^{k-3} \qquad (28),$$

$$\int_n^{n+1} \mathrm{P}^2(u)\, du \geqq \frac{\pi^k}{D\,\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \int_n^{n+1} u^{k-2} \psi^2(u)\, du + B\, n^{k-3} \qquad (149, 150),$$

$$\int_0^x \mathrm{P}^2(u)\, du \geqq \int_0^{[x]} \mathrm{P}^2(u)\, du \geqq \frac{\pi^k}{D\,\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{[x]} u^{k-2} \psi^2(u)\, du + B\, x^{k-2}$$

$$= \frac{\pi^k}{12\, D\,\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{[x]} u^{k-2}\, du + B \int_0^{[x]} u^{k-2} \left\{ \psi^2(u) - \frac{1}{12} \right\} du + B\, x^{k-2}$$

$$= \frac{\pi^k}{12\, D\,\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)(k-1)}\, x^{k-1} + B\, x^{k-2} \qquad (28).$$

Hilfssatz 19: *Es sei* $k \geqq 4$, Q *durch* (145) *gegeben,*

(150) $$Q_I = Q + n_{k+1}^2,$$

P_I *der zu* Q_I *gehörige Gitterrest,* $D_I = D$ *die Determinante von* Q_I. *Dann ist*

(151) $$\int_0^x \mathrm{P}_I^2(u)\, du = B\, x \int_0^x \mathrm{P}^2(u)\, du + B\, x^{\frac{k}{2}} \left\{ \int_0^x \mathrm{P}^2(u)\, du \right\}^{\frac{1}{2}} + B\, x^{k-1}.$$

Beweis:

$$\sum_{Q_I \leqq x} 1 = \sum_{0 \leqq Q_I \leqq x} 1 + B = \sum_{0 \leqq Q + n_{k+1}^2 \leqq x} 1 + B \qquad (150)$$

$$= \sum_{0 \leqq n^2 \leqq x}\ \sum_{0 \leqq Q \leqq x - n^2} 1 + B$$

$$= \sum_{0 \leqq n^2 \leqq x} \left\{ \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} (x - n^2)^{\frac{k}{2}} + \mathrm{P}(x - n^2) + B \right\} + B \qquad (146)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)^{\frac{k}{2}} + \sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{x}} \mathrm{P}(x - n^2) + B \sqrt{x}\,.$$

$$\sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{x}} (x - n^2)^{\frac{k}{2}} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x - u^2)^{\frac{k}{2}}\, du + B\, x^{\frac{k}{2}-1}$$

(Eulersche Summenformel)

$$= \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}\, x^{\frac{k+1}{2}} + B\, x^{\frac{k}{2}-1},$$

$$\sum_{Q_I \leqq x} 1 = \frac{\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}\, x^{\frac{k+1}{2}} + \sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{x}} \mathrm{P}(x - n^2) + B\, x^{\frac{k}{2}-1},$$

$$\sum_{Q_I \leqq x} 1 = \frac{\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}\, x^{\frac{k+1}{2}} + \mathrm{P}_I(x) \qquad (146 \text{ mit } k+1 \text{ statt } k),$$

$$\mathrm{P}_I(u) = \sum_{0 \leqq |n| \leqq \sqrt{u}} \mathrm{P}(u - n^2) + B\, u^{\frac{k}{2}-1} \quad (u > 0),$$

$$\int_0^x P_I^2(u)\,du = \int_0^x \Big\{ \sum_{\substack{0\le|n_1|\le\sqrt{u}\\ 0\le|n_2|\le\sqrt{u}}} P(u-n_1^2)\,P(u-n_2^2) +$$

$$+ B \sum_{0\le|n|\le\sqrt{u}} |P(u-n^2)|\, u^{\frac{k}{2}-1} + B u^{k-2} \Big\}\, du$$

$$= \sum_{\substack{0\le|n_1|\le\sqrt{x}\\ 0\le|n_2|\le\sqrt{x}}} \int_{\mathrm{Max}(n_1^2;\, n_2^2)}^x P(u-n_1^2)\,P(u-n_2^2)\,du +$$

$$+ B x^{\frac{k}{2}-1} \sum_{0\le|n|\le\sqrt{x}} \int_{n^2}^x |P(u-n^2)|\,du + B x^{k-1}$$

$$= B \sum_{\substack{0\le|n_1|\le\sqrt{x}\\ 0\le|n_2|\le\sqrt{x}}} \Big\{ \int_0^x P^2(u)\,du \int_0^x P^2(u)\,du \Big\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ B x^{\frac{k}{2}-1} \sum_{0\le|n|\le\sqrt{x}} \Big\{ \int_0^x P^2(u)\,du \int_0^x du \Big\}^{\frac{1}{2}} + B x^{k-1}$$

(151) $$= B x \int_0^x P^2(u)\,du + B x^{\frac{k}{2}} \Big\{ \int_0^x P^2(u)\,du \Big\}^{\frac{1}{2}} + B x^{k-1}.$$

Gesetzt nun, die Konstante $\varkappa$ in (I) würde für ein geeignetes Q der Gestalt (1) verschwinden. Das gäbe

$$\int_0^x P^2(u)\,du = B x^{\frac{5}{2}} \log^2 x = o(x^3).$$

Ich bilde nun zu diesem Q die Formen

$$Q_I = Q + n_5^2,\quad Q_{II} = Q_I + n_6^2,\ \dots,\ Q_{VIII} = Q_{VII} + n_{12}^2.$$

Durch mehrfache Anwendung von Hilfssatz 19 folgt dann für die zugehörigen Gitterreste $P_I, P_{II}, \dots, P_{VIII}$

$$\int_0^x P_I^2(u)\,du = o\big(x^{1+3}\big) + o\big(x^{2+\frac{3}{2}}\big) + o\big(x^4\big) = o\big(x^4\big),$$

$$\int_0^x P_{II}^2(u)\,du = o\big(x^{1+4}\big) + o\big(x^{\frac{5}{2}+\frac{4}{2}}\big) + o\big(x^5\big) = o\big(x^5\big), \dots,$$

$$\int_0^x P_{VIII}^2(u)\,du = o\big(x^{1+10}\big) + o\big(x^{\frac{11}{2}+\frac{10}{2}}\big) + o\big(x^{11}\big) = o\big(x^{11}\big),$$

während nach (147) mit $k=12$

$$\int_0^x P_{VIII}^2(u)\,du = \Omega\big(x^{11}\big)$$

sein muss.

Der Strich bei Summen, die über ν_1 und ν_2 laufen, soll andeuten dass überdies $(\nu_1, \nu_2) = 1$ verlangt wird.

Beweis von (IV):

(152) $$\sum_{\nu_1,\nu_2=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2\,\nu_2^2} = \frac{5}{2} \qquad \text{(das ist } T_{II}\ (39)\text{)},$$

(153) $$\lambda_0 = \lambda(1,1,1,1;1) = \frac{1}{6\pi^2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \sum_{\nu_1,\nu_2=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2\,\nu_2^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} =$$

$$= \frac{1}{6\pi^2}\,\frac{\pi^2}{6}\,\frac{5}{2}\,\frac{\pi^2}{6} \qquad (17,\ 152)$$

(154) $$= \frac{5\pi^2}{432},$$

$$\int_0^x T^2(u)\,du = \Big(\frac{1}{12} + \lambda_0\Big) x^3 + B x^{\frac{5}{2}} \log x \qquad (20,\ 16,\ \mathrm{II},\ 153)$$

(IV) $$= \frac{36 + 5\pi^2}{432} x^{3} + B x^{\frac{5}{2}} \log x \qquad (154).$$

Ich führe jetzt einige Bezeichnungen ein, die für den Rest dieses Paragraphen und für § 5 dienen sollen. Ich erinnere zunächst an die Definitionen (21) und (24)—(26) der vier Formen Q_m $(0 \leqq m \leqq 3)$, sowie an die zugehörigen Gitterpunktanzahlen $A_m(x)$ und Gitterreste $P_m(x)$. h, n, u mögen ganze Zahlen bezeichnen; hierbei sei $h \geqq 0$, $n > 0$, $u > 0$ und u überdies ungerade. Ich setze

(155) $$r_m(n) = \sum_{Q_m = n} 1 \qquad (0 \leqq m \leqq 3)$$

(die Darstellungsanzahl von n durch Q_m),

(156) $$\sigma(n) = \sum_{a\,b = n} a$$

(die Teilersumme von n). Alle Kongruenzen sind mod 2 gemeint.

Beweis von (V): Für $n = 2^h u$ ist nach Jacobi[7])

(157) $$r_0(n) = 8\,\sigma(n) \text{ für } h = 0, = 24\,\sigma(u) \text{ für } h > 0.$$

$$A_0(x) = \sum_{n \leqq x} r_0(n) \qquad (2, 155)$$

$$= 8 \sum_{\substack{ab \leqq x \\ a \equiv 1,\; b \equiv 1}} a + 24 \sum_{\substack{ab \leqq x \\ a \equiv 1,\; b \equiv 2}} a \qquad (157, 156)$$

$$= 8\, S(x; 1, 1, 2) + 24\, S(x; 1, 2, 2) \qquad (5),$$

$$P_0(x) = 8\, T(x; 1, 1, 2) + 24\, T(x; 1, 2, 2)$$

(vgl. den Übergang von (10) zu (13)),

(158) $$\int_0^x P_0^2(v)\, d\,v = 2^6 \int_0^x T^2(v; 1, 1, 2)\, d\,v + 2^6 \cdot 3^2 \int_0^x T^2(v; 1, 2, 2)\, d\,v$$

---

[7]) Vgl. z. B. P. Bachmann „Niedere Zahlentheorie. Zweiter Teil. Additive Zahlentheorie" (Leipzig 1910), S. 353—354.

$$+ 2^7 \cdot 3 \int_0^x T(v; 1, 1, 2)\, T(v; 1, 2, 2)\, d\,v + B.$$

(159) $$\sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv 1}}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} = 2 \qquad (\text{das ist } T_{II}(115)).$$

(160) $$\sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_2 \equiv 0}}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} = \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv 1,\; \nu_2 \equiv 0}}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv 1}}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} = \frac{1}{2} \qquad (159).$$

(161) $$\sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv 1,\; \nu_2 \equiv 1}}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} = \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv 1}}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} - \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv 1,\; \nu_2 \equiv 0}}^{\infty}{}' \frac{1}{\nu_1^2 \nu_2^2} = \frac{3}{2} \qquad (159, 160).$$

$$\lambda(1, 1, 1, 1; 2) = \frac{1}{6\,\pi^2} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 d \equiv 1,\; \nu_2 d \equiv 1}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2} \nu_2^{-2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{-2} \cos\{\pi \mu (\nu_1 - \nu_2)\} \qquad (17)$$

$$= \frac{1}{6\,\pi^2} \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1}}^{\infty} d^{-2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv 1,\; \nu_2 \equiv 1}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2} \nu_2^{-2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{-2}$$

(162) $$= \frac{1}{6\,\pi^2} \frac{\pi^2}{8} \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{192} \qquad (161).$$

$$\lambda(1, 2, 1, 2; 2) = \frac{1}{6\,\pi^2} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 d \equiv 0,\; \nu_2 d \equiv 0}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2} \nu_2^{-2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{-2} \cos\{\pi \mu (\nu_1 - \nu_2)\} \qquad (17)$$

$$= \frac{1}{6\,\pi^2} \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 0}}^{\infty} d^{-2} \sum_{\nu_1, \nu_2 = 1}^{\infty}{}' \nu_1^{-2} \nu_2^{-2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{-2} (-1)^{\mu(\nu_1 - \nu_2)}$$

$$= \frac{1}{144} \sum_{\nu_1, \nu_2 = 1}^{\infty}{}' \nu_1^{-2} \nu_2^{-2} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu(\nu_1 - \nu_2)} \mu^{-2}$$

$$= \frac{1}{144} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \equiv \nu_2}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2} \nu_2^{-2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{-2} + \frac{1}{144} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 = 1 \\ \nu_1 \not\equiv \nu_2}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2} \nu_2^{-2} \Bigl(\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \equiv 0}}^{\infty} \mu^{-2} - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \equiv 1}}^{\infty} \mu^{-2} \Bigr)$$

$$=\frac{\pi^2}{864}\sum_{\substack{\nu_1,\,\nu_2=1\\ \nu_1\equiv\nu_2}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2}\nu_2^{-2}-\frac{\pi^2}{1728}\sum_{\substack{\nu_1,\,\nu_2=1\\ \nu_1\not\equiv\nu_2}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2}\nu_2^{-2}$$

(163)
$$=\frac{\pi^2}{864}\left(\sum_{\substack{\nu_1,\,\nu_2=1\\ \nu_1\equiv 1,\,\nu_2\equiv 1}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2}\nu_2^{-2}-\sum_{\substack{\nu_1,\,\nu_2=1\\ \nu_2\equiv 1}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2}\nu_2^{-2}\right)=\frac{\pi^2}{864} \qquad (161, 160).$$

$$\lambda(1,1,1,2;2)=\frac{1}{6\pi^2}\sum_{d=1}^{\infty}d^{-2}\sum_{\substack{\nu_1,\,\nu_2=1\\ \nu_1 d\equiv 1,\,\nu_2 d\equiv 1}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2}\nu_2^{-2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{-2}\cos\{\pi\mu(\nu_1-\nu_2)\} \qquad (17)$$

$$=\frac{1}{6\pi^2}\sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 1}}^{\infty}d^{-2}\sum_{\substack{\nu_1,\,\nu_2=1\\ \nu_1\equiv 1,\,\nu_2\equiv 0}}^{\infty}{}' \nu_1^{-2}\nu_2^{-2}\left(\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\equiv 0}}^{\infty}\mu^{-2}-\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\equiv 1}}^{\infty}\mu^{-2}\right)$$

(164)
$$=-\frac{1}{6\pi^2}\,\frac{\pi^2}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{12}=-\frac{\pi^2}{1152} \qquad (160).$$

$$\int_0^x \mathrm{P}_0^2(v)\,dv=\{2^6\lambda(1,1,1,1;2)+2^6\cdot 3^2\lambda(1,2,1,2;2)+2^7\cdot 3\lambda(1,1,1,2;2)\}\,x^3$$
$$+Bx^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (158, 16, \mathrm{II})$$

(V)
$$=\frac{2}{3}\pi^2x^3+Bx^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (162\text{-}164).$$

§ 4.

Ich habe (VI) für das Integral (22) nachzuweisen. ν bedeute in diesem Paragraphen eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Hilfssatz 20: *Mit*

(165)
$$r_\nu=\mathrm{Max}\left(\frac{a^2}{2^\nu};\ b^2\right)$$

ist

(166)
$$V_\nu(x)=\frac{2^{\nu-2}}{3}x^3+2^\nu\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{2^\nu x}\\ b\leqq\sqrt{x}}}\frac{1}{ab}\int_{r_\nu}^{x}\psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)u^2\,du$$

$$+2^\nu\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{2^\nu x}\\ b\leqq\sqrt{x}}}\frac{b}{a}\int_{r_\nu}^{x}\psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)u\,du+\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{2^\nu x}\\ b\leqq\sqrt{x}}}\frac{a}{b}\int_{r_\nu}^{x}\psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)u\,du$$

$$+\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{2^\nu x}\\ b\leqq\sqrt{x}}}ab\int_{r_\nu}^{x}\psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du+Bx^{\frac{5}{2}}\log x.$$

Beweis: Genau wie der von Hilfssatz 2, unter Benutzung von

$$-T(u)=\frac{u}{2}+u\sum_{a\leqq\sqrt{u}}\frac{1}{a}\psi\left(\frac{u}{a}\right)+\sum_{b\leqq\sqrt{u}}b\,\psi\left(\frac{u}{b}\right)+Bu^{\frac{1}{2}}\ \text{für}\ u\geqq 1 \quad (29, 20, 28).$$

Ich setze zur Abkürzung

(167)
$$R_n=\sum_{d=1}^{\infty}d^2\sum_{\substack{a,\,b=1\\ (a,\,2^n b)=d}}^{\infty}\frac{1}{a^2b^2} \qquad (n\geqq 1).$$

Hilfssatz 21:

(168)
$$R_n=\frac{5\pi^2}{12}+\frac{n\pi^2}{4}.$$

Beweis: 1) Es sei $n=1$.

(169)
$$R_1=\sum_{d=1}^{\infty}d^2\sum_{\substack{a,\,b=1\\ (a,\,2b)=d}}^{\infty}\frac{1}{a^2b^2} \qquad (167)$$

(170)
$$=\sum_{d=1}^{\infty}d^2\left(\sum_{\substack{a,\,b=1\\ (a,\,2b)=d\\ a\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)}}^{\infty}+\sum_{\substack{a,\,b=1\\ (a,\,2b)=d\\ a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)}}^{\infty}\right)\frac{1}{a^2b^2}=R_1^{(1)}+R_1^{(2)}.$$

(171)
$$R_1^{(1)}=\sum_{d=1}^{\infty}4d^2\sum_{\substack{a,\,b=1\\ (a,\,b)=d}}^{\infty}\frac{1}{4a^2b^2}$$ (170; ich habe d, a durch $2d$, $2a$ ersetzt)

$$(172)\qquad = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, b)=1}}^{\infty} \frac{1}{a^2\, b^2} = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{5}{2} = \frac{5\,\pi^2}{12} \qquad (152).$$

$$R_1^{(2)} = \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} d^2 \sum_{\substack{a,\, b \\ (a,\, b) = d \\ a \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} \frac{1}{a^2\, b^2} \qquad (170)$$

$$(173)\qquad = \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, b) = 1 \\ a \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} \frac{1}{a^2\, b^2} = \frac{\pi^2}{8}\, 2 = \frac{\pi^2}{4} \qquad (159).$$

$$(174)\qquad R_1 = \frac{5\,\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\,\pi^2}{3} \qquad (170,\ 172,\ 173).$$

2) Es sei $n > 1$. Dann setze ich (168) voraus und wende Induktion $n \to n+1$ an.

$$R_{n+1} = \sum_{d=1}^{\infty} d^2 \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, 2^{n+1} b) = d}}^{\infty} \frac{1}{a^2\, b^2} \qquad (167)$$

$$(175)\qquad = \sum_{d=1}^{\infty} d^2 \Biggl(\sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, 2^{n+1} b) = d \\ a \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2^{n+1})}}^{\infty} + \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, 2^{n+1} b) = d \\ a \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2^{n+1})}}^{\infty} \Biggr) \frac{1}{a^2\, b^2} = R_{n+1}^{(1)} + R_{n+1}^{(2)}\,.$$

$$R_{n+1}^{(1)} = \sum_{d=1}^{\infty} 2^{2n+2} d^2 \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, b) = d}}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}\, a^2\, b^2}$$ (175; ich habe d, a durch $2^{n+1} d$, $2^{n+1} a$ ersetzt)

$$(176)\qquad = R_1^{(1)} = \frac{5\,\pi^2}{12} \qquad (171,\ 172).$$

$$R_{n+1}^{(2)} = \sum_{d=1}^{\infty} d^2 \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, 2^n b) = d \\ a \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2^{n+1})}}^{\infty} \frac{1}{a^2\, b^2}$$

$$= R_n - \sum_{d=1}^{\infty} d^2 \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, 2^n b) = d \\ a \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2^{n+1})}}^{\infty} \frac{1}{a^2\, b^2} \qquad (175,\ 167)$$

$$= R_n - \sum_{d=1}^{\infty} 2^{2n} d^2 \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (2a,\, b) = d}}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}\, a^2\, b^2}$$ (ich habe d, a durch $2^n d$, $2^{n+1} a$ ersetzt)

$$(177)\qquad = R_n - \frac{1}{4} R_1 = \frac{(n+1)\,\pi^2}{4} \qquad (169,\ 168,\ 174).$$

$$R_{n+1} = \frac{5\,\pi^2}{12} + \frac{(n+1)\,\pi^2}{4} \qquad (175-177).$$

Hilfssatz 22:

$$(178)\qquad J_\nu = \frac{2^{\nu-1}}{3\pi^2} \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{x^3 - r_\nu^3}{a\, b} \sum_{\substack{m,\, n=1 \\ 2^\nu m\, b = n a}}^{\infty} \frac{1}{m\, n}$$

$$(179)\qquad = \frac{(5 + 3\,\nu)\,\pi^2}{432}\, x^3 + B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Beweis:

$$J_\nu = \frac{2^{\nu-2}}{9} \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{x^3 - r_\nu^3}{ab}\, \frac{(a,\, 2^\nu b)^2}{2^\nu\, a\, b} \qquad (178,\ 59)$$

$$(180)\qquad = \frac{1}{36}\, x^3 \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{(a,\, 2^\nu b)^2}{a^2\, b^2} - \frac{1}{36} \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{r_\nu^3\, (a,\, 2^\nu b)^2}{a^2\, b^2}.$$

$$(181)\qquad \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{(a,\, 2^\nu b)^2}{a^2\, b^2} = \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} d^2 \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x} \\ (a,\, 2^\nu b) = d}} \frac{1}{a^2\, b^2}\,.$$

$$\sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} d^2 \sum_{a \leqq \sqrt{2^\nu x}} \frac{1}{a^2} \sum_{\substack{b > \sqrt{x} \\ (a,\, 2^\nu b) = d}} \frac{1}{b^2} = B \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} d^2 \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{d^2\, a^2} \sum_{b > \frac{\sqrt{x}}{d}} \frac{1}{d^2\, b^2}$$

$$(182)\qquad = \frac{B}{\sqrt{x}} \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} \frac{1}{d} = B \frac{\log x}{\sqrt{x}}.$$

$$\sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} d^2 \sum_{a > \sqrt{2^\nu x}} \frac{1}{a^2} \sum_{\substack{b=1 \\ (a,\, 2^\nu b) = d}}^{\infty} \frac{1}{b^2} = B \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} d^2 \sum_{a > \frac{\sqrt{x}}{d}} \frac{1}{d^2 a^2} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{d^2 b^2}$$

$$(183)\qquad = \frac{B}{\sqrt{x}} \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} \frac{1}{d} = B \frac{\log x}{\sqrt{x}}.$$

$$\sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{(a, 2^\nu b)^2}{a^2 b^2} = \sum_{d=1}^{\infty} d^2 \sum_{\substack{a,\, b=1 \\ (a,\, 2^\nu b) = d}}^{\infty} \frac{1}{a^2 b^2} + B \sum_{d > \sqrt{2^\nu x}} d^2 \sum_{a,\, b=1}^{\infty} \frac{1}{(d\,a)^2 (d\,b)^2}$$

$$+ \frac{B \log x}{\sqrt{x}} \qquad (181-183)$$

$$(184)\qquad = R_\nu + \frac{B \log x}{\sqrt{x}} = \frac{5\pi^2}{12} + \frac{\nu \pi^2}{4} + \frac{B \log x}{\sqrt{x}} \qquad (167, 168).$$

$$\sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{r_\nu^3 (a, 2^\nu b)^2}{a^2 b^2} = B \sum_{a,\, b \leqq \sqrt{2^\nu x}} \frac{(a^6 + b^6)(a, b)^2}{a^2 b^2}$$

$$= B \sum_{a,\, b \leqq \sqrt{2^\nu x}} \frac{a^6 (a, b)^2}{a^2 b^2} \qquad (165)$$

$$= B \sum_{a,\, b \leqq \sqrt{2^\nu x}} \frac{a^4 (a, b)^2}{b^2} = B \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} d^2 \sum_{a,\, b \leqq \frac{\sqrt{2^\nu x}}{d}} \frac{d^4 a^4}{d^2 b^2}$$

$$(185)\qquad = B \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} d^4 \sum_{a \leqq \frac{\sqrt{2^\nu x}}{d}} a^4 = B x^{\frac{5}{2}} \sum_{d \leqq \sqrt{2^\nu x}} \frac{1}{d} = B x^{\frac{5}{2}} \log x .$$

$$J_\nu = \frac{x^3}{36} \left(\frac{5\pi^2}{12} + \frac{\nu \pi^2}{4} \right) + B x^{\frac{5}{2}} \log x \qquad (180, 184, 185)$$

$$(179)\qquad = \frac{(5 + 3\nu)\pi^2}{432} x^3 + B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Hilfssatz 23:

$$(186)\qquad \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{1}{a\,b} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{1}{m\,n} \left| \int_{r_\nu}^{x} \cos\left\{ 2\pi u \left(\frac{2^\nu m}{a} + \frac{n}{b} \right) \right\} u^2\, du \right| = B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

$$(187)\qquad \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{b}{a} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{1}{m\,n} \left| \int_{r_\nu}^{x} \cos\left\{ 2\pi u \left(\frac{2^\nu m}{a} + \frac{n}{b} \right) \right\} u\, du \right| = B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

$$(188)\qquad \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{a}{b} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{1}{m\,n} \left| \int_{r_\nu}^{x} \cos\left\{ 2\pi u \left(\frac{2^\nu m}{a} + \frac{n}{b} \right) \right\} u\, du \right| = B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

$$(189)\qquad \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} a\,b \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{1}{m\,n} \left| \int_{r_\nu}^{x} \cos\left\{ 2\pi u \left(\frac{2^\nu m}{a} + \frac{n}{b} \right) \right\} du \right| = B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Beweis: Genau wie der von Hilfssatz 10. Für die linken Seiten von (186) — (189) bekommt man ganz ähnliche Majoranten wie für die dortigen Summen $S_{10} - S_{12}$.

Hilfssatz 24:

$$(190)\qquad x^2 \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{b}{a} \sum_{\substack{m,\, n=1 \\ 2^\nu m\, b = n\, a}}^{\infty} \frac{1}{m\,n} = B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

$$(191)\qquad x^2 \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} \frac{a}{b} \sum_{\substack{m,\, n=1 \\ 2^\nu m\, b = n\, a}}^{\infty} \frac{1}{m\,n} = B x^{\frac{5}{2}} \log x,$$

$$(192)\qquad x \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{2^\nu x} \\ b \leqq \sqrt{x}}} a\,b \sum_{\substack{m,\, n=1 \\ 2^\nu m\, b = n\, a}}^{\infty} \frac{1}{m\,n} = B x^{\frac{5}{2}} \log x.$$

Beweis: Für die linken Seiten von (190) — (192) ergeben sich dieselben Majoranten wie bei den Summen $S_5 - S_6$ von Hilfssatz 8.

Hilfssatz 25:

(193)
$$\sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{1}{ab} \sum_{\substack{m,n=1\\ 2^\nu mb\neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\int_{r_\nu}^{x}\cos\left\{2\pi u\left(\frac{2^\nu m}{a}-\frac{n}{b}\right)\right\}u^2\,du\right| = Bx^{\frac52}\log x,$$

(194)
$$\sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{b}{a} \sum_{\substack{m,n=1\\ 2^\nu mb\neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\int_{r_\nu}^{x}\cos\left\{2\pi u\left(\frac{2^\nu m}{a}-\frac{n}{b}\right)\right\}u\,du\right| = Bx^{\frac52}\log x,$$

(195)
$$\sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{a}{b} \sum_{\substack{m,n=1\\ 2^\nu mb\neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\int_{r_\nu}^{x}\cos\left\{2\pi u\left(\frac{2^\nu m}{a}-\frac{n}{b}\right)\right\}u\,du\right| = Bx^{\frac52}\log x,$$

(196)
$$\sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} ab \sum_{\substack{m,n=1\\ 2^\nu mb\neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\int_{r_\nu}^{x}\cos\left\{2\pi u\left(\frac{2^\nu m}{a}-\frac{n}{b}\right)\right\}du\right| = Bx^{\frac52}\log x.$$

Beweis: Durch einen kleinen Kunstgriff lassen sich die Summen (193) — (196) auf ganz ähnliche Majoranten zurückführen wie $S_7 - S_9$ des Hilfssatzes 9. Z. B. ist die linke Seite von (193)

$$Bx^2 \sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{1}{ab} \sum_{\substack{m,n=1\\ 2^\nu mb\neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{2^\nu b}\right|^{-1}$$

$$= Bx^2 \sum_{a,\, b\le 2^\nu\sqrt{x}} \frac{1}{ab} \sum_{\substack{m,n=1\\ mb\neq na}}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right|^{-1} = Bx^{\frac52}\log x \qquad (73)$$

(ich habe $2^\nu b$ durch b' ersetzt, auf $b'\equiv 0 \pmod{2^\nu}$ verzichtet und dann wieder b für b' geschrieben).

Hilfssatz 26:

$$(197)\quad 2^\nu \sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{1}{ab}\int_{r_\nu}^{x} \psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)u^2\,du = \frac{(5+3\nu)\pi^2}{432}x^3 + Bx^{\frac52}\log x,$$

$$(198)\quad \sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{b}{a}\int_{r_\nu}^{x} \psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)u\,du = Bx^{\frac52}\log x,$$

$$(199)\quad \sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{a}{b}\int_{r_\nu}^{x} \psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)u\,du = Bx^{\frac52}\log x,$$

$$(200)\quad \sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}} ab\int_{r_\nu}^{x} \psi\left(\frac{2^\nu u}{a}\right)\psi\left(\frac{u}{b}\right)du = Bx^{\frac52}\log x.$$

Beweis: Genau wie der von Hilfssatz 11. Schreibt man zur Abkürzung

$$\textstyle\sum,\ \sum_1,\ \sum_2,\ \sum_3,\ \int,\ \overset{\pm}{w} \text{ für}$$

$$\sum_{\substack{a\le\sqrt{2^\nu x}\\ b\le\sqrt{x}}},\quad \sum_{\substack{m,n=1\\ 2^\nu mb=na}}^{\infty},\quad \sum_{\substack{m,n=1\\ 2^\nu mb\neq na}}^{\infty},\quad \sum_{m,n=1}^{\infty},\quad \int_{r_\nu}^{x},\quad 2\pi u\left(\frac{2^\nu m}{a}\pm\frac{n}{b}\right),$$

so lassen sich durch Anwendung der Hilfssätze 3 und 22 — 25 die linken Seiten von (197) — (200) in die Gestalt setzen

$$\frac{2^{\nu-1}}{\pi^2}\sum\frac{1}{ab}\left(\sum_1\frac{1}{mn}\int u^2\,du + \right.$$

$$\left. + \sum_2\frac{1}{mn}\int u^2\cos\overset{-}{w}\,du - \sum_3\frac{1}{mn}\int u^2\cos\overset{+}{w}\,du\right)$$

$$= \frac{(5+3\nu)\pi^2}{432}x^3 + Bx^{\frac52}\log x \qquad (179, 193, 186).$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum\frac{b}{a}\Big(\sum\nolimits_1\frac{1}{m\,n}\int u\,d\,u+$$

$$+\sum\nolimits_2\frac{1}{m\,n}\int u\cos\overset{-}{w}\,d\,u-\sum\nolimits_3\frac{1}{m\,n}\int u\cos\overset{+}{w}\,d\,u\Big)$$

$$=B\,x^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (\mathbf{190, 194, 187}),$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum\frac{a}{b}\Big(\sum\nolimits_1\frac{1}{m\,n}\int u\,d\,u+$$

$$+\sum\nolimits_2\frac{1}{m\,n}\int u\cos\overset{-}{w}\,d\,u-\sum\nolimits_3\frac{1}{m\,n}\int u\cos\overset{+}{w}\,d\,u\Big)$$

$$=B\,x^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (\mathbf{191, 195, 188}),$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum a\,b\Big(\sum\nolimits_1\frac{1}{m\,n}\int d\,u+\sum\nolimits_2\frac{1}{m\,n}\int\cos\overset{-}{w}\,d\,u-\sum\nolimits_3\frac{1}{m\,n}\int\cos\overset{+}{w}\,d\,u\Big)$$

$$=B\,x^{\frac{5}{2}}\log x \qquad (\mathbf{192, 196, 189}).$$

Beweis von (VI): (166), (197) — (200).

§ 5.

Es verbleiben (VII), (VIII) und (IX). Ich erinnere daran, dass jetzt u eine ungerade natürliche Zahl ist. Auch v sei eine ungerade natürliche Zahl. n, h, w bedeuten ganze Zahlen; hierbei sei $n>0$, $h\geqq 0$. Stetige Veränderliche bezeichne ich mit t, z, x, wobei nach wie vor $x\geqq 2$ ist. Ich setze zur Abkürzung

(201) $$M(x)=\sum_{u\leqq x}(-1)^{\frac{u^2-1}{8}}\sum_{u=v^2+4w^2}(-1)^{\frac{v-1}{2}}\,v=\sum_{u\leqq x}j(u).$$

Schliesslich erinnere ich an die Definitionen (155), (156) von $r_1(n)$, $r_2(n)$, $r_3(n)$ und $\sigma(n)$ und an die Definition (19) von $S(x)$.

Hilfssatz 27 (Liouville): *Für* $n=2^h u$ *ist*

(202) $r_1(n)=4\,\sigma(u)$ *für* $n=u$, $=8\,\sigma(u)$ *für* $n=2\,u$, $=24\,\sigma(u)$ *für* $h>1$;

(203) $r_2(n)=2\,\sigma(u)$ *für* $n=u$, $=4\,\sigma(u)$ *für* $n=2\,u$, $=8\,\sigma(u)$ *für* $n=4\,u$, $=24\,\sigma(u)$ *für* $h>2$;

(204) $$\begin{cases} r_3(n)=\sigma(u)+j(u) \text{ für } n=u,\ =2\,\sigma(u) \text{ für } n=2\,u,\ =4\,\sigma(u) \text{ für} \\ n=4\,u,\ =8\,\sigma(u) \text{ für } n=8\,u,\ =24\,\sigma(u) \text{ für } h>3. \end{cases}$$

Beweise: Bei Bachmann l. c. [7]), VIII Kap. „Untersuchungen von Liouville", §§ 20 — 22[8]).

Hilfssatz 28:

(205) $$A_1(x)=4\,S(x)-4\,S\Big(\frac{x}{2}\Big)+8\,S\Big(\frac{x}{4}\Big)-32\,S\Big(\frac{x}{8}\Big),$$

(206) $$A_2(x)=2\,S(x)-2\,S\Big(\frac{x}{2}\Big)+8\,S\Big(\frac{x}{8}\Big)-32\,S\Big(\frac{x}{16}\Big),$$

(207) $$A_3(x)=S(x)-S\Big(\frac{x}{2}\Big)+8\,S\Big(\frac{x}{16}\Big)-32\,S\Big(\frac{x}{32}\Big)+M(x).$$

Beweis: Es sei $n=2^h u$; alle Kongruenzen seien mod 2 gemeint. Der Strich bei a-Summen bedeutet, dass überdies $a\equiv 1$ sein soll.

$$A_1(x)=\sum_{n\leqq x}r_1(n)=4\sum_{\substack{n\leqq x\\ n=u}}\sigma(u)+8\sum_{\substack{n\leqq x\\ n=2u}}\sigma(u)+24\sum_{\substack{n\leqq x\\ h>1}}\sigma(u) \qquad (\mathbf{202})$$

$$=4\sum_{n\leqq x}\sigma(u)+4\sum_{2n\leqq x}\sigma(u)+16\sum_{4n\leqq x}\sigma(u)$$

$$=4\sum_{ab\leqq x}{}'\,a+4\sum_{2ab\leqq x}{}'\,a+16\sum_{4ab\leqq x}{}'\,a \qquad (\mathbf{156})$$

[8]) Die von Bachmann beim Beweise von (204) herangezogene Identität

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}\,i\,q^{i^2+4s^2}=\sum(-1)^z\,q^{i^2+4x^2+4y^2+4z^2}$$

($i>0$ ungerade; s, x, y, z beliebige ganze Zahlen)

läuft auf die bekannte Beziehung zwischen den Thetanullwerten

$$\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)=\frac{1}{\pi}\,\vartheta'_1(0),$$

in der Bezeichnungsweise von Tannery-Molk, hinaus.

$$= 4 \sum_{ab \leqq x}{}' a + 4 \sum_{ab \leqq \frac{x}{2}}{}' a + 16 \sum_{ab \leqq \frac{x}{4}}{}' a. \tag{208}$$

$$\sum_{\substack{ab \leqq z \\ a \equiv 0}} a = \sum_{2ab \leqq z} 2a = 2 \sum_{ab \leqq \frac{z}{2}} a = 2 S\left(\frac{z}{2}\right),$$

$$\sum_{ab \leqq z}{}' a = \sum_{ab \leqq z} a - \sum_{\substack{ab \leqq z \\ a \equiv 0}} a = S(z) - 2 S\left(\frac{z}{2}\right). \tag{209}$$

$$A_1(x) = 4 \left\{S(x) - 2 S\left(\frac{x}{2}\right)\right\} + 4 \left\{S\left(\frac{x}{2}\right) - 2 S\left(\frac{x}{4}\right)\right\} +$$

$$+ 16 \left\{S\left(\frac{x}{4}\right) - 2 S\left(\frac{x}{8}\right)\right\} \qquad \textbf{(208, 209)}$$

$$= 4 S(x) - 4 S\left(\frac{x}{2}\right) + 8 S\left(\frac{x}{4}\right) - 32 S\left(\frac{x}{8}\right). \tag{205}$$

$$A_2(x) = \sum_{n \leqq x} r_2(n) = 2 \sum_{\substack{n \leqq x \\ n = u}} \sigma(u) + 4 \sum_{\substack{n \leqq x \\ n = 2u}} \sigma(u) + 8 \sum_{\substack{n \leqq x \\ n = 4u}} \sigma(u) + 24 \sum_{\substack{n \leqq x \\ h > 2}} \sigma(u) \quad \textbf{(203)}$$

$$= 2 \sum_{n \leqq x} \sigma(u) + 2 \sum_{2n \leqq x} \sigma(u) + 4 \sum_{4n \leqq x} \sigma(u) + 16 \sum_{8n \leqq x} \sigma(u)$$

$$= 2 \sum_{ab \leqq x}{}' a + 2 \sum_{2ab \leqq x}{}' a + 4 \sum_{4ab \leqq x}{}' a + 16 \sum_{8ab \leqq x}{}' a \qquad \textbf{(156)}$$

$$= 2 \sum_{ab \leqq x}{}' a + 2 \sum_{ab \leqq \frac{x}{2}}{}' a + 4 \sum_{ab \leqq \frac{x}{4}}{}' a + 16 \sum_{ab \leqq \frac{x}{8}}{}' a$$

$$= 2 \left\{S(x) - 2 S\left(\frac{x}{2}\right)\right\} + 2 \left\{S\left(\frac{x}{2}\right) - 2 S\left(\frac{x}{4}\right)\right\} + 4 \left\{S\left(\frac{x}{4}\right) - 2 S\left(\frac{x}{8}\right)\right\} +$$

$$+ 16 \left\{S\left(\frac{x}{8}\right) - 2 S\left(\frac{x}{16}\right)\right\} \qquad \textbf{(209)}$$

$$= 2 S(x) - 2 S\left(\frac{x}{2}\right) + 8 S\left(\frac{x}{8}\right) - 32 S\left(\frac{x}{16}\right). \tag{206}$$

$$A_3(x) - M(x) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n = u}} \sigma(u) + 2 \sum_{\substack{n \leqq x \\ n = 2u}} \sigma(u) + 4 \sum_{\substack{n \leqq x \\ n = 4u}} \sigma(u) + 8 \sum_{\substack{n \leqq x \\ n = 8u}} \sigma(u) +$$

$$+ 24 \sum_{\substack{n \leqq x \\ h > 3}} \sigma(u) \qquad \textbf{(204, 201)}$$

$$= \sum_{n \leqq x} \sigma(u) + \sum_{2n \leqq x} \sigma(u) + 2 \sum_{4n \leqq x} \sigma(u) + 4 \sum_{8n \leqq x} \sigma(u) + 16 \sum_{16n \leqq x} \sigma(u)$$

$$= \sum_{ab \leqq x}{}' a + \sum_{2ab \leqq x}{}' a + 2 \sum_{4ab \leqq x}{}' a + 4 \sum_{8ab \leqq x}{}' a + 16 \sum_{16ab \leqq x}{}' a \qquad \textbf{(156)}$$

$$= \sum_{ab \leqq x}{}' a + \sum_{ab \leqq \frac{x}{2}}{}' a + 2 \sum_{ab \leqq \frac{x}{4}}{}' a + 4 \sum_{ab \leqq \frac{x}{8}}{}' a + 16 \sum_{ab \leqq \frac{x}{16}}{}' a$$

$$= S(x) - 2 S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x}{2}\right) - 2 S\left(\frac{x}{4}\right) + 2 \left\{S\left(\frac{x}{4}\right) - 2 S\left(\frac{x}{8}\right)\right\}$$

$$+ 4 \left\{S\left(\frac{x}{8}\right) - 2 S\left(\frac{x}{16}\right)\right\} + 16 \left\{S\left(\frac{x}{16}\right) - 2 S\left(\frac{x}{32}\right)\right\} \qquad \textbf{(209)}$$

$$= S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) + 8 S\left(\frac{x}{16}\right) - 32 S\left(\frac{x}{32}\right). \tag{207}$$

Hilfssatz 29:

$$M x = B x^{\frac{5}{6}}. \tag{210}$$

Beweis:

$$M(x) = \sum_{v^2 + 4w^2 \leqq x} (-1)^{\frac{1}{8}\left\{(v^2+4w^2)^2 - 1)\right\} + \frac{v-1}{2}} v \qquad \textbf{(201)}$$

$$= \sum_{v^2 + 4w^2 \leqq x} (-1)^{w + \frac{v-1}{2}} v = \sum_{v \leqq \sqrt{x}} (-1)^{\frac{v-1}{2}} v \sum_{0 \leqq |w| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{x - v^2}} (-1)^w$$

$$= \sum_{v \leqq \sqrt{x}} (-1)^{\frac{v-1}{2}} v \cdot (-1)^{\left[\frac{1}{2}\sqrt{x-v^2}\right]} = \sum_{v \leqq \sqrt{x}} (-1)^{\frac{v-1}{2} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{x-v^2}\right]} \int_0^v dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{x}} dt \sum_{t \leqq v \leqq \sqrt{x}} (-1)^{\frac{v-1}{2} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{x-v^2}\right]}$$

(211) $$= \sum_{\varepsilon = 1 \text{ und } 3} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \int_0^{\sqrt{x}} dt \sum_{\frac{t-\varepsilon}{4} \leqq m \leqq \frac{\sqrt{x}-\varepsilon}{4}} (-1)^{\left[\frac{1}{2}\sqrt{x-(4m+\varepsilon)^2}\right]}.$$

Um die m-Summe in (211) abzuschätzen, nehme ich

(212) $$11 \leqq t \leqq \sqrt{x}$$

an und benutze den folgenden van der Corputschen Satz[9]:

Es sei $a - \frac{1}{2}$ und $b - \frac{1}{2}$ ganz, $a < b$, $f(z)$ im Intervall $a \leqq z \leqq b$ zweimal differenzierbar, $f''(z)$ dort monoton und stets $\geqq r$ oder $\leqq -r$, wo r eine positive von z unabhängige Zahl bezeichnet.

Es habe die reelle Funktion $\chi(z)$ die Periode 1; es sei $\chi(z)$ absolut $\leqq 1$, im Intervall $0 < z < 1$ monoton, und

$$\int_0^1 \chi(z)\, dz = 0.$$

Dann gibt es eine absolute Konstante c mit der Eigenschaft

(213) $$\left| \sum_{a<m<b} \chi\{f(m)\} \right| < c \left(\int_a^b \sqrt[3]{|f''(z)|}\, dz + r^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Das wende ich an mit

(214) $$a = \left[\frac{t-\varepsilon}{4}\right] - \frac{3}{2}, \qquad b = \left[\frac{\sqrt{x}-\varepsilon}{4}\right] - \frac{1}{2};$$

(215) $$f(z) = \frac{1}{4}\sqrt{x-(4z+\varepsilon)^2}, \qquad r = x^{-\frac{1}{2}}; \qquad \chi(z) = (-1)^{[2z]}.$$

Dann ist alles in Ordnung, denn es gilt

[9]) J. G. van der Corput „Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme" [Mathematische Zeitschrift 17 (1923), S. 250—259]. Satz 5 mit $k = 2$.

$$a \geqq \left[\frac{11-3}{4}\right] - \frac{3}{2} < 0 \quad \textbf{(212)},$$

$$4b + \varepsilon \leqq 4\left(\frac{\sqrt{x}-\varepsilon}{4} - \frac{1}{2}\right) + \varepsilon = \sqrt{x} - 2 < \sqrt{x},$$

$$f''(z) = -4x\{x-(4z+\varepsilon)^2\}^{-\frac{3}{2}} \leqq -4x^{1-\frac{3}{2}} \leqq -x^{-\frac{1}{2}}.$$

Zugleich ergibt sich

$$\int_a^b \sqrt[3]{|f''(z)|}\, dz = B x^{\frac{1}{3}} \int_a^b \{x-(4z+\varepsilon)^2\}^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$= B x^{\frac{1}{3}} \int_{4a+\varepsilon}^{4b+\varepsilon} (x-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = B x^{\frac{1}{3}} \int_0^{\sqrt{x}} (x-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz$$

(216) $$= B x^{\frac{1}{3}} \int_0^1 (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = B x^{\frac{1}{3}},$$

(217) $$\sum_{a<m<b} \chi\{f(m)\} = B x^{\frac{1}{3}} + B x^{\frac{1}{4}} = B x^{\frac{1}{3}} \quad \textbf{(213, 216, 215)},$$

(218) $$\sum_{\frac{t-\varepsilon}{4} \leqq m \leqq \frac{\sqrt{x}-\varepsilon}{4}} (-1)^{\left[\frac{1}{2}\sqrt{x-(4m+\varepsilon)^2}\right]} = \sum_{a<m<b} \chi\{f(m)\} + B = B x^{\frac{1}{3}}$$

(214, 215, 217).

$$M(x) = \sum_{\varepsilon=1 \text{ und } 3} (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \int_{11}^{\sqrt{x}} dt \sum_{\frac{t-\varepsilon}{4} \leqq m \leqq \frac{\sqrt{x}-\varepsilon}{4}} + B\sqrt{x} \quad \textbf{(211)}$$

$$= B x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + B\sqrt{x} = B x^{\frac{5}{6}} \quad \textbf{(218)}.$$

Hilfssatz 30:

(219) $$P_1(x) = 4\,T(x) - 4\,T\left(\frac{x}{2}\right) + 8\,T\left(\frac{x}{4}\right) - 32\,T\left(\frac{x}{8}\right),$$

$$P_2(x) = 2\,T(x) - 2\,T\left(\frac{x}{2}\right) + 8\,T\left(\frac{x}{8}\right) - 32\,T\left(\frac{x}{16}\right), \tag{220}$$

$$P_3(x) = T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) + 8\,T\left(\frac{x}{16}\right) - 32\,T\left(\frac{x}{32}\right) + Bx^{\frac{5}{6}}. \tag{221}$$

Beweis: (205), (206), (207), (210).

Beweis von (VII):

$$2^{-7}\int_0^{8x} P_1^2(z)\,dz = 2^{-4}\int_0^{x} P_1^2(8z)\,dz =$$

$$= \int_0^x \{T(8z) - T(4z) + 2\,T(2z) - 2^3\,T(z)\}^2 dz + B \qquad (219)$$

$$= \int_0^x T^2(8z)\,dz + \int_0^x T^2(4z)\,dz + 2^2\int_0^x T^2(2z)\,dz + 2^6\int_0^x T^2(z)\,dz$$

$$-2\int_0^x T(8z)\,T(4z)\,dz + 2^2\int_0^x T(8z)\,T(2z)\,dz - 2^4\int_0^x T(8z)\,T(z)\,dz$$

$$-2^2\int_0^x T(4z)\,T(2z)\,dz + 2^4\int_0^x T(4z)\,T(z)\,dz - 2^5\int_0^x T(2z)\,T(z)\,dz + B$$

$$= 2^{-3}\,V_0(8x) + 2^{-2}\,V_0(4x) + 2\,V_0(2x) + 2^6\,V_0(x) - 2^{-1}\,V_1(4x)$$

$$+ 2\,V_2(2x) - 2^4\,V_3(x) - 2\,V_1(2x) + 2^4\,V_2(x) - 2^5\,V_1(x) + B \qquad (22)$$

$$= \frac{2\pi^2}{3}x^3 + Bx^{\frac{5}{2}}\log x \quad \text{(VI)},$$

$$\int_0^x P_1^2(z)\,dz = 2^7\,\frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{x}{8}\right)^3 + Bx^{\frac{5}{2}}\log x$$

$$= \frac{\pi^2}{6}x^3 + Bx^{\frac{5}{2}}\log x. \tag{VII}$$

Beweis von (VIII):

$$2^{-6}\int_0^{16x} P_2^2(z)\,dz = 2^{-2}\int_0^x P_2^2(16z)\,dz =$$

$$= \int_0^x \Big\{T(16z) - T(8z) + 4\,T(2z) - 16\,T(z)\Big\}^2 dz + B \qquad (220)$$

$$= \int_0^x T^2(16z)\,dz + \int_0^x T^2(8z)\,dz + 2^4\int_0^x T^2(2z)\,dz + 2^8\int_0^x T^2(z)\,dz$$

$$-2\int_0^x T(16z)\,T(8z)\,dz + 2^3\int_0^x T(16z)\,T(2z)\,dz - 2^5\int_0^x T(16z)\,T(z)\,dz$$

$$-2^3\int_0^x T(8z)\,T(2z)\,dz + 2^5\int_0^x T(8z)\,T(z)\,dz - 2^7\int_0^x T(2z)\,T(z)\,dz + B$$

$$= 2^{-4}\,V_0(16x) + 2^{-3}\,V_0(8x) + 2^3\,V_0(2x) + 2^8\,V_0(x) - 2^{-2}\,V_1(8x)$$

$$+ 2^2\,V_3(2x) - 2^5\,V_4(x) - 2^2\,V_2(2x) + 2^5\,V_3(x) - 2^7\,V_1(x) + B \qquad (22)$$

$$= \frac{2^3\pi^2}{3}x^2 + Bx^{\frac{5}{2}}\log x \qquad \text{(VI)},$$

$$\int_0^x P_2^2(z)\,dz = 2^6\,\frac{2^3\pi^2}{3}\left(\frac{x}{16}\right)^3 + Bx^{\frac{5}{2}}\log x$$

$$= \frac{\pi^2}{24}x^3 + Bx^{\frac{5}{2}}\log x. \tag{VIII}$$

Beweis von (IX):

$$(0 \leqq \nu \leqq 5) \quad \int_0^x \left|T\left(\frac{z}{2^\nu}\right)\right| z^{\frac{5}{6}}\,dz = B\left\{\int_0^x T^2(z)\,dz \cdot \int_0^x z^{\frac{5}{3}}\,dz\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= Bx^{\frac{1}{2}\left(3+\frac{8}{3}\right)} = Bx^{\frac{17}{6}} \qquad \text{(IV)}. \tag{222}$$

$$\int_0^x P_3^2(z)\,dz = \int_0^x \left\{ T(z) - T\left(\frac{z}{2}\right) + 8\,T\left(\frac{z}{16}\right) - 32\,T\left(\frac{z}{32}\right) \right\}^2 dz + Bx^{\frac{17}{6}}$$

(221, 222),

$$2^{-5}\int_0^{32x} P_3^2(z)\,dz = \int_0^x P_3^2(32z)\,dz = \int_0^x T^2(32z)\,dz$$

$$+\int_0^x T^2(16z)\,dz + 2^6\int_0^x T^2(2z)\,dz + 2^{10}\int_0^x T^2(z)\,dz$$

$$-2\int_0^x T(32z)\,T(16z)\,dz + 2^4\int_0^x T(32z)\,T(2z)\,dz$$

$$-2^6\int_0^x T(32z)\,T(z)\,dz - 2^4\int_0^x T(16z)\,T(2z)\,dz$$

$$+2^6\int_0^x T(16z)\,T(z)\,dz - 2^9\int_0^x T(2z)\,T(z)\,dz + Bx^{\frac{17}{6}}$$

$$= 2^{-5}V_0(32x) + 2^{-4}V_0(16x) + 2^5V_0(2x) + 2^{10}V_0(x) - 2^{-3}V_1(16x)$$

$$+2^3V_4(2x) - 2^6V_5(x) - 2^3V_3(2x) + 2^6V_4(x) - 2^9V_1(x) + Bx^{\frac{17}{6}} \quad (22)$$

$$= \frac{2^5\pi^2}{3}x^3 + Bx^{\frac{17}{6}} \quad \text{(VI)},$$

$$\int_0^x P_3^2(z)\,dz = 2^5\,\frac{2^5\pi^2}{3}\left(\frac{x}{32}\right)^3 + Bx^{\frac{17}{16}}$$

$$= \frac{\pi^2}{96}x^3 + Bx^{\frac{17}{16}}$$

(IX) $$= \frac{\pi^2}{96}x^3 + Bx^{\frac{5}{2}}\log^2 x \quad \text{(I)}.$$

Radość, den 11. August 1935.

(Eingegangen am 20. August 1935.)

Singular moduli (4).

By

G. N. Watson (Birmingham).

In this paper I give some arithmetical developments of the theoretical researches on singular moduli and class-invariants due to Kronecker and Dedekind. A full account of these researches is to be found in Weber's *Algebra* **[15]**. [1])

In the ordinary notation of elliptic functions write

$$q = e^{i\pi\tau}, \qquad [I(\tau) > 0, \ |q| < 1]$$

$$f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1}), \quad f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1}),$$

$$f_2(\tau) = 2^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{12}}\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m}) = 2^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{12}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{4m-2})^{-1},$$

so that

$$f^8(\tau) = f_1^8(\tau) + f_2^8(\tau),$$

$$f(\tau)f_1(\tau)f_2(\tau) = \sqrt{2};$$

and let $j(\tau)$ be Dedekind's invariant such that $f^{24}(\tau)$, $-f_1^{24}(\tau)$, $-f_2^{24}(\tau)$ are the roots of the equation

$$(x-16)^3 - x\,j(\tau) = 0.$$

Let n be an integer of the form $8m-1$; and let the number of genera of classes of quadratic forms of negative determinant $-n$ be N, the number of classes in each genus being k; and let $Nk = h$. In the

[1]) Numbers following authors' names refer to the bibliography at the end of the paper.