jede s_k — fache Hauptgerade f_k^ι des Bündels (W_ι) zu einer $2s_k$ — fachen Erzeugende besitzt.

8. Eigenschaften der sechs Strahlenbündel. Betrachtet man sechs Strahlenbündel

$$(7)\quad (W_1)\varkappa(W_2)\varkappa(W_3)\varkappa(W_4)\varkappa(W_5),\qquad (W_0)\pi^n(W_\varepsilon)\qquad (\varepsilon=1,2,3,4,5)$$

welche den Relationen (1), (2) und (3) in Nr. 1 genügen und voneinander verschiedene Scheitelpunkte W_0, W_ε besitzen, so kann man fragen, wie oft sechs homologe Strahlen dieser Bündel je eine Gerade schneiden.

Gegeben sind solche Erzeugende $a, \ldots$ der in Nr. 6 betrachteten Regelfläche $4(2n+3)$. Grades Ω, welche sämtliche Quintupel $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4, \ldots$ der Bündel (W_0) und (W_ι), $\iota=1, 2, 3, 4$ schneiden. Da aber die Strahlen $a_\iota, \ldots$ des Bündels (W_ι) eine Kegelfläche Δ^ι (Nr. 7) erzeugen, so folgt unmittelbar aus der Kollineation $(W_\iota)\varkappa(W_5)$, dass die Strahlen $a_5, \ldots$ des Bündels (W_5) auch eine Kegelfläche Δ^5 von $2(n+4)$. Ordnung und vom $4(4n+5)$. Geschlechts erzeugen. Jeder Erzeugende a der Fläche Ω ordnen wir — vermittelst des Quintupels $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ — eine einzige Erzeugende a_5 des Kegels Δ^5 zu, und jeder Geraden a_5 dieses Kegels ordnen wir eine einzige Gerade a der Fläche Ω zu. Aus der so konstruierten Korrespondenz (1,1) zwischen den Erzeugenden der Flächen Ω und Δ^5 folgt nach dem Grundsatze von Clebsch -- dass *die* in Nr. 6 untersuchte *Regelfläche Ω vom Geschlecht $4(4n+5)$ ist*, w. z. b. w.

In dieser (1,1) — deutigen Korrespondenz gibt es[15]) im Allgemeinen $4(2n+3)+2(n+4)=10(n+2)$ solche Paare homologer Strahlen c und $c_5, \ldots$, welche sich in je einem Punkte schneiden. Die Erzeugende c der Fläche Ω trifft also fünf homologe Geraden $c_0\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4$ und die Erzeugende c_5 des Kegels Δ^5. Es ergibt sich folgender Satz:

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W_0) und jedem von fünf kollinearen Strahlenbündeln (W_ι), $\iota=1, 2, 3, 4, 5$ — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n-ten Grades festgestellt, so gibt es im Allgemeinen $10(n+2)$ solche Geraden, dass jede von ihnen je sechs homologe Strahlen dieser Bündel schneidet.*

---

[15]) A. Plamitzer, l. c, [11]), Nr. 2.

Sur la fonction ordinaire de Green de l'espace à trois dimensions.

par

Alfred Rosenblatt

(Kraków).

J'ai étudié, dans une série de travaux publiés aux C. R., au Bulletin des Sciences Mathématiques, aux Rendiconti dei Lincei, aux Annali di Matematica, aux Annales de l'École Normale Supérieure, au Bulletin de la Société Mathématique de Grèce, l'application de la méthode des approximations successives de M. Emile Picard aux équations différentielles. J'ai donné, dans ces travaux, des généralisations des théorèmes classiques de M. Picard en envisageant les équations aux dérivées partielles du type elliptique du second ordre, les équations bi- et m-harmoniques, les équations de la propagation de la chaleur etc. Comme une partie importante de l'oeuvre mathématique de Léon Lichtenstein est consacrée à l'étude des équations du type elliptique et à la théorie du potentiel je publie, sur l'invitation aimable de M. S. Dickstein, volontiers les résultats de mes recherches récentes sur la fonction de Green ordinaire dans l'espace euclidien à trois dimensions dans le Volume des Prace matematyczno-fizyczne dédié à la mémoire de l'éminent géomètre.

Je remarque de suite que les résultats que je vais présenter ici sont loin d'être satisfaisants et je me réserve d'y revenir ailleurs en les précisant, développant et simplifiant et en les appliquant aux équations differentielles du type elliptique du second ordre à trois variables indépendantes.

1. Je rappelle tout d'abord que dans une Note des C. R. du 5/11.34 „Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude des équations du second ordre elliptiques et non linéaires à trois variables indépendantes" dont les résultats for-

ment l'objet d'un travail à paraitre dans le Bulletin des Sciences Mathématiques de M. Emile Picard j'ai obtenu des inégalités remplies par la fonction $G(P, P')$ de Green de le sphère Σ de rayon R (P' pôle) et par ses dérivées. Notamment j'ai obtenu l'inégalité

$$J = \int G(P, P') \frac{1}{\delta'^{1+m}} d\xi\, d\eta\, d\zeta \leqq \frac{4\pi\, \delta^{1-m}}{m(1-m)}, \tag{1}$$

où δ, δ' sont les distances de P, P' de la circonférence C du cercle et où l'on a $0 < m < 1$, l'intégration étant effectuée par rapport à P'. Si l'on ne connaissait pas la fonction de Green de la sphère explicitement, on pourrait parvenir à une inégalite de la forme

$$J \leqq C\delta^{1-m} \tag{2}$$

où C est une constante positive en se servant de l'inégalité

$$G \leqq \frac{2\delta\delta'}{r^3} \tag{3}$$

où l'on a $r = PP'$.

Or le but du présent travail dont les résultats ont été communiqués dans une Note des C. R. consiste précisément à établir l'inégalité

$$G \leqq K \frac{\delta\, \delta'}{r^3}, \tag{4}$$

K constante positive, valable dans un domaine D général, K ne dépend que de D.

2. Le domaine D que nous envisagerons sera supposé *borné* d'un seul tenant, limité par une surface S de Jordan à plan tangent et à courbure partout existants et continus. On supposera que la propriété suivante est remplie: Il existe un nombre fixe $A > 0$ tel qu'en chaque point M de la surface S la sphère Σ_i de rayon A tangente *intérieurement* reste, à l'exception de M, toute entière à l'intérieur de S. On suppose de même que la sphère Σ_e du même rayon A tangente *extérieurement* à S reste, à l'exception de M, toute entière à l'extérieur de S. Soient O, $\overline{O}$ les centres de ces deux sphères.

Nous envisagerons en outre la sphère Σ de rayon a tangente extérieurement à S en M et nous supposerons remplie la relation.

$$m\, a = A, \tag{5}$$

où m sera un nombre > 1 que nous préciserons dans la suite.

Envisageons maintenant deux points P, P' arbitraires tous les deux intérieurs à S et soient δ, δ' les distances de ces points de S. Nous aurons *trois cas* à distinguer:

1. δ et δ' sont plus grands que $\frac{a}{2}$,
2. Un seul de ces nombres est $> \frac{a}{2}$,
3. Ancun n'est $> \frac{a}{2}$.

3. Il est bien facile d'établir l'inégalité (4) dans les deux premiers cas. En effet, dans le *premier* cas on a en désignant par D le diamètre de D

$$\frac{1}{r} \leqq \frac{D^2}{r^3} \cdot \frac{2\delta}{a} \cdot \frac{2\delta'}{a},$$

donc il vient

$$G \leqq \frac{4\delta\, \delta' D^2}{r^3 a^2}. \tag{5}$$

Dans le *second* cas supposons $\delta \leqq \frac{a}{2}$ et soit M le point le plus voisin de P. Envisageons la sphère Σ de rayon a tangente extérieurement à S au point M. Le fonction G_Σ de Green de l'extérieur de Σ qui majore la fonction G de Green du domaine D est

$$G_\Sigma = \frac{1}{r} - \frac{a}{dr'}. \tag{6}$$

d est ici la distance de P du centre A de la sphère Σ, et r' est la distance $P'\overline{P}$, où $\overline{P}$ est l'image du point P par rapport à Σ.

Posons

$$r_1 = \frac{d r'}{a},$$

on aura

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{r_1^2 - r^2}{r\, r_1 (r + r_1)} \leqq \frac{r_1^2 - r^2}{2 r^3}.$$

En désignant par φ l'angle PAP' on a

$$r^2 = d^2 + d'^2 - 2\, d\, d' \cos\varphi$$

où l'on a $d' = AP'$. D'autre part on a

$$r'^2 = \overline{d}^2 + d'^2 - 2\, \overline{d}\, d' \cos\varphi.$$

On a

$$\bar{d} = A\,\bar{P} = \frac{a^2}{d}.$$

Donc il vient

$$\cos\varphi = \frac{d^2 + d'^2 - r^2}{2\,d\,d'}.$$

$$r'^2 = \frac{1}{d^2}(a^4 + d'^2 - a^2 d^2 - a^2 d'^2 + a^2 r^2) = \frac{a^2 r^2}{d^2} + \frac{1}{d^2}(d^2 - a^2)(d'^2 - a^2),$$

donc

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{a^2}(d^2 - a^2)(d'^2 - a^2).$$

Il vient

$$G_\Sigma \leqq \frac{1}{2\,a^2 r^3}(d^2 - a^2)(d'^2 - a^2). \tag{7}$$

Posant

$$D' = D + 2\,a$$

on a

$$d'^2 - a^2 \leqq D'^2.$$

Il vient donc

$$G_\Sigma \leqq \frac{\delta\,D'^3}{2\,a^2 r^3} \leqq \frac{\delta\,D'^3}{2\,a^2 r^3} \cdot \frac{2\,\delta'}{a} = \frac{\delta\,\delta'\,D'^3}{r^3 a^3}$$

donc

$$G \leqq K\,\frac{\delta\,\delta'}{r^3}. \tag{8}$$

4. Etudions maintenant le *troisième* cas. Pour établir notre inégalité (4) nous aurons à nous servir d'un procédé imaginé, il y a longtemps, par M. S. Zaremba auquel nous devons cette suggestion et qui consiste à majorer la fonction de Green du domaine D par la fonction de Green G qui appartient à l'extérieur des deux sphères Σ, Σ' tangentes extérieurement à la surface S de même rayon a. Nous aurons 4 cas à distinguer 1) Σ, Σ' extérieures l'une à l'autre, 2) Σ, Σ' tangentes extérieurement, 3) Σ, Σ' se coupent, 4) Σ, Σ' coïncident.

Nous pouvons tout de suite écarter le dernier cas. En effet dans ce cas l'inegalité (7) donne tout de suite l'inégalité (8), car on a

$$d - a = \delta, \qquad d' - a = \delta',$$

il vient donc

$$G_\Sigma \leqq \frac{1}{2\,a^2 r^3}\,\delta\,\delta' \cdot D'^2.$$

Remarquons que l'on obtient le même résultat toutes les fois que l'on a une inégalité

$$d' - a \leqq K\,\delta'$$

où $K > 0$ est un nombre fixe.

5. Nous présenterons maintenant quelques remarques géométriques simples qui nous seront utiles et que nous avons fait en collaboration avec M. St. Turski. Envisageons la figure géométrique composée des deux sphères Σ, Σ' de centres A, A' de rayon a tangentes extérieurement à S. Soit d la distance $A\,A'$. Envisageons en outre les 4 sphères Σ_i, Σ_i', Σ_e, Σ_e' de rayon $A = ma$ tangentes les 2 premières intérieurement en M et en M' à S, les 2 dernières tangentes extérieurement à S en ces deux points. Soient O_i, O_i' les centres des deux sphères premières et O_e, O_e' ceux des deux sphères dernières.

Nous avons

$$O_i\,A = (m+1)\,a, \qquad O_i'\,A' = (m+1)\,a,$$

$$O_e\,A = (m-1)\,a, \qquad O_e'\,A' = (m-1)\,a.$$

Evidemment les inégalités

$$O_i\,M' > O_i\,M, \qquad O_i'\,M > O_i'\,M'$$

$$O_e\,M' > O_e\,M, \qquad O_e'\,M > O_e'\,M'$$

sont remplies. On a aussi

$$O_i\,O_e' > O_i\,O_e, \qquad O_i'\,O_e > O_i'\,O_e'.$$

Désignons par $\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}'$ les angles

$$\zeta = \sphericalangle\,A'\,A\,M, \qquad \zeta = \sphericalangle\,A'\,A\,M', \qquad \bar{\zeta} = \pi - \zeta,\ \bar{\zeta}' = \pi - \zeta'.$$

et par 6, $6'$, $\bar{6}$, $\bar{6}'$ les angles

$$6 = \sphericalangle\,O_i\,M\,M', \qquad 6' = \sphericalangle\,O_i'\,M'\,M, \qquad \bar{6} = \pi - 6,\ \bar{6}' = \pi - 6'.$$

Nous avons les formules

$$\cos\bar{\zeta} = \frac{O_e\,A^2 - O_e\,A'^2 + d^2}{2\,d \cdot O_e\,A}, \qquad \cos\bar{\zeta}' = \frac{O_e'\,A'^2 - O_e'\,A^2 + d^2}{2\,d \cdot O_e'\,A'} \tag{9}$$

Or on a

$$O_e A' > O_e M' - a > O_e M - a = O_e A,$$

$$O_e' A > O_e' M - a > O_e' M' - a = O_e' A',$$

donc on a les inégalités

(10) $$\cos \bar{\zeta} < \frac{d}{2(m-1)\,a}, \quad \cos \bar{\zeta}' < \frac{d}{2(m-1)\,a}.$$

6. Nous avons ensuite les inégalités

(11) $$\cos \vartheta = \frac{O_i M^2 - O_i M'^2 + p^2}{2p \cdot O_i M}, \quad \cos \vartheta' = \frac{O_i' M'^2 - O_i' M^2 + p^2}{2p \cdot O_i' M'},$$

$$\cos \bar{\vartheta} = \frac{O_e M^2 - O_e M'^2 + p^2}{2p \cdot O_e M}, \quad \cos \bar{\vartheta}' = \frac{O_e' M'^2 - O_e' M^2 + p^2}{2p \cdot O_e' M'},$$

où nous avons posé

$$M M' = p.$$

On a donc les inégalités

(12) $$\cos \vartheta < \frac{p}{2 \cdot O_i M}, \quad \cos \vartheta' < \frac{p}{2 \cdot O_i' M'}$$

$$\cos \bar{\vartheta} < \frac{p}{2 \cdot O_e M}, \quad \cos \bar{\vartheta}' < \frac{p}{2 \cdot O_e' M'}.$$

On a les relations

$$A' M^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\zeta = a^2 + p^2 - 2ap\cos\bar{\vartheta}',$$

$$A M'^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\zeta' = a^2 + p^2 - 2ap\cos\bar{\vartheta},$$

donc

$$d(d - 2a\cos\zeta) = p(p - 2a\cos\bar{\vartheta}'),$$

$$d(d - 2a\cos\zeta') = p(p - 2a\cos\bar{\vartheta}).$$

Or on a

$$-2a\cos\zeta = 2a\cos\bar{\zeta} < \frac{d}{m-1},$$

$$-2a\cos\zeta' = 2a\cos\bar{\zeta}' < \frac{d}{m-1},$$

$$-2a\cos\bar{\vartheta}' > -\frac{p}{m},$$

$$-2a\cos\bar{\vartheta} > -\frac{p}{m},$$

donc

$$\frac{m d^2}{m-1} > \frac{(m-1)p^2}{m}.$$

Donc on a l'inégalité

(13) $$p < \frac{m}{m-1} d.$$

7. Maintenant on a la formule connue

(14) $$4p^2 = O_i O_e'^2 + O_e O_i'^2 - O_i O_e^2 - O_i' O_e'^2 + h_i^2 + h_e^2,$$

où l'on a

$$h_i = O_i O_i', \quad h_e = O_e O_e'.$$

Il vient

$$4p^2 > h_i^2 + h_e^2,$$

donc on a

(15) $$h_i < \frac{2m}{m-1} d, \qquad h_e < \frac{2m}{m-1} d.$$

Soit maintenant Θ l'angle des normales $n = AM$, $n' = A'M'$. On a d'après une formule connue

(16) $$\cos\Theta = \pm \frac{O_e' O^2 + O_e O'^2 - h_i^2 - h_e^2}{2\,O_i O_e \cdot O_i' O_e'}.$$

Or on a

$$O_e' O_i^2 + O_i' O_e^2 = O_i O_e^2 + O_i' O_e' + 4p^2 - h_i^2 - h_e^2,$$

donc

$$O_e' O^2 + O_e O'^2 - h_i^2 - h_e^2 = O_i O_e^2 + O_i' O_e'^2 + 4p^2 - 2h_i^2 - 2h_e^2$$

$$> 8m^2 a^2 - 4p^2 > 8m^2 a^2 - \frac{4m^2}{(m-1)^2} d^2.$$

Si l'on suppose

(17) $$d < \sqrt{2}\,(m-1)\,a$$

on a $$|\cos\Theta| > 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2 a^2} > 0.$$

Le signe $+$ convient ici donc on a

(18) $$\cos\Theta > 1 - \frac{d'^2}{2(m-1)^2 a^2}.$$

8. Enfin nous majorerons $\cos\zeta$, $\cos\zeta'$. A cette fin notons que l'on a

(19) $$\cos\Theta = -\cos\zeta\cos\zeta' + \sin\zeta\sin\zeta'\cos v,$$

où v est l'angle entre les plans $A'AM$ et $AA'M'$. Si $\cos\zeta$, $\cos\zeta'$ sont négatifs on a

$$|\cos\zeta| = \cos\bar\zeta < \frac{d}{2(m-1)a}, \quad |\cos\zeta'| = \cos\bar\zeta' < \frac{d}{2(m-1)a}.$$

Si $\cos\zeta$, $\cos\zeta'$ sont positifs on a

$$\sin\zeta\sin\zeta'\cos v > \cos\Theta > 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2a^2},$$

donc

$$\sin\zeta,\ \sin\zeta' > 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2a^2},$$

donc

$$\cos\zeta < \sqrt{1 - \left(1 - \frac{d^2}{(2m-1)^2a^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{(m-1)^2a^2} - \frac{d^4}{4(m-1)^4a^4}}$$
$$< \frac{d}{(m-1)a}.$$

On a de même

$$\cos\zeta' < \frac{d}{(m-1)a}.$$

Enfin, si l'on a $\cos\zeta > 0$, $\cos\zeta' < 0$, on aura

$$\sin\zeta\sin\zeta'\cos v > 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2a^2} - \cos\zeta\cos\bar\zeta'$$
$$> 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2a^2} - \cos\zeta\cdot\frac{d}{2(m-1)a},$$

donc

$$\sin\zeta > 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2a^2} - \cos\zeta\,\frac{d}{2(m-1)a},$$

$$\sqrt{1-\cos^2\zeta} > 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2a^2} - \cos\zeta\,\frac{d}{2(m-1)a},$$

$$1 - \frac{\cos^2\zeta}{2} > 1 - \frac{d^2}{2(m-1)^2a^2} - \cos\zeta\,\frac{d}{2(m-1)a},$$

$$\cos^2\zeta - \cos\zeta\,\frac{d}{(m-1)a} - \frac{d^2}{(m-1)^2a^2} < 0,$$

$$\left[\cos\zeta - \frac{d}{2(m-1)a}\right]^2 < \frac{d^2}{(m-1)^2a^2} + \frac{d^2}{4(m-1)^2a^2},$$

$$\left|\cos\zeta - \frac{d}{2(m-1)a}\right| < \frac{\sqrt{5}\,d}{2(m-1)a},$$

$$\cos\zeta = \frac{d}{2(m-1)a} + \Theta\,\frac{\sqrt{5}\,d}{2(m-1)a},$$

$0 \leq |\Theta| < 1$. Donc on a puisque $\cos\zeta > 0$ l'inégalité

$$|\cos\zeta| < \frac{d(1+\sqrt{5})}{2(m-1)a} \quad \frac{1\cdot 7\,d}{(m-1)a}.$$

Nous obtenons donc finalement les inégalités toujours valables

(20) $$|\cos\zeta|,\ |\cos\zeta'| < \frac{2d}{(m-1)a}.$$

9. Étudions maintenant le *troisième cas*, celui où les 2 sphères Σ, Σ' se coupent. Nous distinguerons deux cas selon que l'on a les inégalités

$$1)\ \ \delta \geqq kd,\ \delta' \geqq kd, \qquad 2)\ \ \delta \text{ ou } \delta' < kd,$$

où k est un nombre positif que nous pouvons prendre égal à 10.

Étudions d'abord le premier cas. Envisageons la sphère Σ de rayon a tangente en M extérieurement à S. Soit G la fonction de Green de l'extérieur de Σ. On a la formule (7). Maintenant $d < 2a$, donc

$$d^2 - a^2 < 3a\delta.$$

On peut supposer que le point P' est en dehors de la sphère Σ_δ de rayon δ tangente au point M intérieurement à la surface S. En effet, si les deux points P et P' étaient à l'intérieur des sphères Σ_δ', Σ_δ de centres P' et P et de rayons δ', δ, on aurait les inégalités

$$\delta \geqq r, \qquad \delta' \geqq r,$$

donc on aurait de suite

$$G \leqq \frac{1}{r} \leqq \frac{\delta\,\delta'}{r^3}.$$

Envisageons un système rectangulaire d'axes cartésiens dont l'axe des z coincide avec l'axe $A'A$, dont le plan xz passe par les points M, P et dont l'origine S est au milieu du segment $A'A$. Les coordonnées du point P' sont

$$x = (a+\delta')\sin\zeta'\cos v,\; y = (a+\delta')\sin\zeta'\sin v,\; z = -\frac{d}{2} + (a+\delta')\cos\zeta',$$

et celles du point A': $0, 0, -\dfrac{d}{2}$. On a donc

$$d'^2 - a^2 = (a+\delta')^2\sin^2\zeta' + [d-(a+\delta')\cos\zeta']^2 - a^2$$

$$= (a+\delta')^2 + d^2 - 2\,d\,(a+\delta')\cos\zeta' - a^2 \leqq (a+\delta')^2 + d^2 + 2\,d\,(a+\delta')$$

$$- a^2 = (a+\delta'+d)^2 - a^2 = (\delta'+d)\;(2\,a+\delta'+d)$$

$$\leqq (\delta'+d)\,\frac{9\,a}{2} \leqq \left(\delta' + \frac{\delta'}{k}\right)\frac{9\,a}{2} = \frac{9\,\delta'(k+1)\,a}{2\,k}.$$

On a donc encore l'inégalité voulue (4). Même résultat dans le cas de $\delta < k\,d$, $\delta' \geqq k\,d$.

10. Nous pouvons donc supposer $\delta < k\,d$, $\delta' < k\,d$.

Envisageons les plans passant par l'axe des z. Sur un demi-plan limité par l'axe des z on peut introduire des coordonnées bipolaires t, u. Soient B, B' les points d'intersection du plan passant par l'axe des z et du cercle fondamental du faisceau de sphères auquel appartiennent les sphères Σ, Σ'. Soient ξ, ζ les coordonnées sur le plan. On a alors les coordonnées $+c, -c$ des points B, B', et

(21) $$c = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Le paramètre t est donné per la relation

(22) $$e^{-t} = \frac{PB}{PB'}.$$

Il varie de $+\infty$ pour le point B jusqu'à 0 pour l'axe des $\zeta \equiv z$. Quant au paramètre u, il est l'angle BPB' pour le point P situé dans le plan ξ, ζ. Il est compté de 2π jusqu'à $2\pi + u_0$ pour la moitié positive du de-

miplan, c'est à dire pour $\zeta > 0$. u_0 est ici l'angle BPB' positif et moindre que $\dfrac{\pi}{2}$ appartenant à l'arc BB' du cercle K coupé sur Σ par le plan envisagé et situé dans la moitié positive ($\zeta > 0$). Quant à la moitié *negative* $\zeta > 0$ du demi-plan, u y est compté de $2\pi = u_0$ jusqu'a 2π de sorte que sur l'axe des x la continuité est conservée: on y a $u = 2\pi$.

Enfin v est l'angle du demi-plan mobile avec un demi-plan fixe.

Nous avons dès lors les formules suivantes

(23) $$x = \frac{c\,\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t - \cos u}\cos v,\; y = \frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t - \cos u}\sin v,\; z = \frac{c\sin u}{\mathrm{ch}\,t - \cos u}.$$

On a donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2\,\frac{\mathrm{ch}\,t + \cos u}{\mathrm{ch}\,t - \cos u},\; x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2\,\frac{\mathrm{ch}\,t' + \cos u}{\mathrm{ch}\,t' - \cos u}.$$

La distance r^2 s'exprime par la formule suivante

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\,x\,x' - 2\,y\,y' - 2\,z\,z' =$$

$$= 2\,c^2\,\frac{\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{ch}\,t' - \cos u\cos u' - \sin u\sin u' - \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{sh}\,t'\cos(v-v')}{(\mathrm{ch}\,t - \cos u)\;(\mathrm{ch}\,t' - \cos u')}.$$

On a

(24) $$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{\mathrm{ch}\,t - \cos u}\,.\,\sqrt{\mathrm{ch}\,t' - \cos u'}}{c\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{R - \cos(u-u')}},$$

où

(25) $$R = \mathrm{ch}\,t\,\mathrm{ch}\,t' - \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{sh}\,t'\cos(v-v').$$

Les points P et P' ont les coordonnées $z_{p'}$, $z_{p'}$, égaux à

$$z_p = \frac{d}{2} - (a+\delta)\cos\zeta,\quad z_{p'} = -\frac{d}{2} + (a+\delta')\cos\zeta'.$$

Mais nous avons montré que l'on a

$$|\cos\zeta| < \frac{2\,d}{(m-1)\,a},\; |\cos\zeta'| < \frac{2\,d}{(m-1)\,a},$$

donc on obtient les inégalités

$$z_p > \frac{d}{2} - \frac{3\,a}{2}\cdot\frac{2\,d}{(m-1)\,a},\; z_{p'} < -\frac{d}{2} + \frac{3\,a}{2}\cdot\frac{2\,d}{(m-1)\,a}.$$

On a donc $z_P > 0$, $z_{p'} < 0$ pourvu que l'on ait

(26) $$m > 6.$$

Nous avons donc les inégalités

(27) $$2\pi + u_0 > u_p > 2\pi, \qquad 2\pi - u_0 < u_{p'} < 2\pi,$$
$$\pi > 2u_0 > u - u' > 0.$$

12. Nous représentons maintenant $\frac{1}{r}$ par une intégrale définie au moyen des fonctions coniques ou de Mehler. On a la représentation connue

(28) $$\frac{1}{\sqrt{R - \cos(u-u')}} = \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\varphi - \pi)\mu}{\operatorname{ch}\pi\mu} k^{(\mu)}(R)\,d\mu,$$

qui est valable pour $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi = u - u'$. On a

$$\pi > u - u' - \pi > -\pi,$$

et nous avons la formule

(29) $$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\mu(u - u' - \pi)}{\operatorname{ch}\pi\mu} k^{(\mu)}(R)\,d\mu.$$

$k^{(\mu)}(R)$ est ici la fonction de Mehler donnée par l'intégrale

(30) $$k^{(\mu)}(ch\,\Theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\Theta \frac{\cos\alpha\mu\,d\alpha}{\sqrt{ch\,\Theta - ch\,\alpha}}.$$

On a ici

$$R \geqq \frac{e^t + e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{t'} + e^{-t'}}{2} - \frac{e^t - e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{t'} - e^{-t'}}{2} = \frac{e^{t-t'} + e^{t'-t}}{2} \geqq 1.$$

13. Nous écrirons maintenant la fonction de Green de l'espace extérieur aux deux sphères Σ, Σ'. La fonction V harmonique égale à $\frac{1}{r}$ sur les surfaces des deux sphères est donnée par l'expression

(31) $$V = -i\,\frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\int_0^\infty \frac{k^{(\mu)}(R)\,w(\mu)\,d\mu}{\operatorname{ch}\mu\pi.\operatorname{sh}2\mu u_0},$$

où $w(\mu)$ est la fonction

(32) $$w(\mu) = i\operatorname{sh}(2\pi + u_0 - u)\mu.\operatorname{ch}(3\pi - u_0 - u')\mu + i\operatorname{sh}(u + u_0 - 2\pi)\mu . \operatorname{ch}(\pi + u_0 - u')\mu.$$

On obtient donc la formule suivante

(33) $$G = \frac{1}{r} - V = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\int_0^\infty \frac{k^{(\mu)}(R)\,d\mu}{\operatorname{ch}\mu\pi.\operatorname{sh}2\mu u_0}.$$
$$.\{\operatorname{ch}\mu(u - u' - \pi)\operatorname{sh}2\mu u_0 - \operatorname{sh}\mu(2\pi + u_0 - u)\operatorname{ch}\mu(3\pi - u_0 - u') - \operatorname{sh}\mu(u + u_0 - 2\pi).\operatorname{ch}\mu(\pi + u_0 - u')\}.$$

Calculons l'expression entre parenthèses. Elle est égale à $\frac{1}{4}$ multiplié par

$$(e^{2\mu u_0} - e^{-2\mu u_0})(e^{\mu(u-u'-\pi)} - e^{-\mu(u-u'-\pi)}) - (e^{\mu(2\pi+u_0-u)}$$
$$- e^{-\mu(2\pi+u_0-u)})(e^{\mu(3\pi-u_0-u')} + e^{-\mu(3\pi-u_0-u')}) - (e^{\mu(u+u_0-2\pi)}$$
$$- e^{-\mu(u+u_0-2\pi)})(e^{\mu(\pi+u_0-u')} + e^{-\mu(\pi+u_0-u')}) = e^{\mu(2u_0-u+u'+\pi)}$$
$$- e^{-\mu(2u_0-u+u'+\pi)} + e^{\mu(3\pi-u-u')} - e^{-\mu(3\pi-u-u')} + e^{\mu(\pi-2u_0+u-u')}$$
$$- e^{-\mu(\pi-2u_0+u-u')} + e^{\mu(-5\pi+u+u')} - e^{-\mu(5\pi+u+u')}$$

Posons

(34) $$\Delta = 2\pi + u_0 - u, \qquad \Delta' = u' - (2\pi - u_0),$$

on aura

$$e^{\mu\pi}\{e^{\mu(\Delta+\Delta')} - e^{\mu(\Delta-\Delta')} + e^{-\mu(\Delta+\Delta')} - e^{\mu(\Delta'-\Delta)}\} - e^{-\mu\pi}\{- e^{\mu(\Delta'-\Delta)}$$
$$+ e^{-\mu(\Delta+\Delta')} - e^{\mu(\Delta-\Delta')} + {}^{\mu(\Delta+\Delta')}\} = (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})\{e^{\mu(\Delta+\Delta')}$$
$$+ e^{-\mu(\Delta+\Delta')} - e^{\mu(\Delta-\Delta')} - e^{\mu(\Delta'-\Delta)}\} = (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})(e^{\mu\Delta} - e^{-\mu\Delta})(e^{\mu\Delta'} - e^{-\mu\Delta'}).$$

Nous obtenons donc la formule suivante

(35) $$G = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\int_0^\infty \frac{k^{(\mu)}(R)(e^{\pi\mu} - e^{-\pi\mu})(e^{\mu\Delta} - e^{-\mu\Delta})}{(e^{\pi\mu} + e^{-\pi\mu})(e^{2\mu u_0} - e^{-2\mu u_0})}.$$
$$.(e^{\mu\Delta'} - e^{-\mu\Delta'})\,d\mu.$$

14. Il s'agit maintenant de majorer G. Majorons d'abord $k^{(\mu)}(R)$. On a

$$k^{\mu}(\operatorname{ch}\theta) < \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\operatorname{ch}\alpha}},$$

et on a

$$k < \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t' + \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t' = \operatorname{ch}(t+t').$$

Posons

$$f(t+t') = \int_0^{t+t'}\frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}(t+t')-\operatorname{ch}\alpha}}, \tag{36}$$

on aura

$$G \leqq \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t-\cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t'-\cos u'}}{c}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}f(t+t')\int_0^{\infty}\frac{(e^{\mu\Delta}-e^{-\mu\Delta})}{(e^{2\mu u_0}-e^{-2\mu u_0})}\cdot(e^{\mu\Delta'}-e^{-\mu\Delta'})\,d\mu.$$

Or nous avons les inégalités

$$\operatorname{sh}\mu\Delta \leqq \mu\Delta e^{\mu\Delta},\quad \operatorname{sh}\mu\Delta' \leqq \mu\Delta' e^{\mu\Delta'}, \tag{37}$$

donc on a

$$\frac{(e^{\mu\Delta}-e^{-\mu\Delta})(e^{\mu\Delta'}-e^{-\mu\Delta'})}{(e^{2\mu u_0}-e^{-2\mu u_0})} \leqq 4\mu^2\Delta\Delta'\frac{e^{-\mu(u-u')}}{1-e^{-4\mu u_0}}.$$

Nous introduirons encore les angles suivants

$$\bar{u} = u - 2\pi,\qquad \bar{u}' = 2\pi - u', \tag{38}$$

qui varient et o à u_0 et de u_0 à o. Posons

$$U = u - u' = \bar{u} + \bar{u}'. \tag{39}$$

Nous avons l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\mu^2 e^{-\mu U}d\mu}{1-e^{-4\mu u_0}} \tag{40}$$

et nous écrivons l'inégalité

$$G \leqq \frac{4\sqrt{2}\,\Delta\Delta'\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t-\cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t'-\cos u'}}{\pi c}\cdot f(t+t')\cdot I. \tag{41}$$

15. On a l'inégalité valable pour $0 < x$

$$1 - e^{-x} \geq \frac{x}{1+x},$$

ce qui donne

$$I < \int_0^{\infty}\left\{\mu^2 e^{-\mu U} + \frac{1}{4u_0}\mu e^{-\mu U}\right\}d\mu.$$

Or nous avons les formules évidentes

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu U}d\mu = \frac{1}{U},\qquad \int_0^{\infty}\mu e^{-\mu U}d\mu = \frac{1}{U^2},\qquad \int_0^{\infty}\mu^2 e^{-\mu U}d\mu = \frac{2}{U^3}. \tag{42}$$

Il vient donc l'inégalité suivante

$$G \leqq A\frac{\sqrt{\operatorname{ch} t-\cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t'-\cos u'}}{c}(u_0-u)(u_0-u')f(t+t')\cdot\frac{1}{U^2}\left(\frac{1}{U}+\frac{1}{8u_0}\right), \tag{43}$$

où A est un nombre positif fixe.

Pour majorer l'expression obtenue nous remarquons d'abord que l'on a

$$0 < \bar{u} < \frac{\pi}{2},\qquad 0 < \bar{u} < \frac{\pi}{2},$$

donc puisque pour $0 < x \leqq \frac{\pi}{4}$ on a l'inégalité

$$\operatorname{tg} x \leqq 2x$$

on parvient à l'inégalité

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{u}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\bar{u}'}{2} \leqq U.$$

Soient r_p, $r_{p'}$ les rayons des deux sphères Σ_p, $\Sigma_{p'}$ du faisceau de sphères auquel appartiennent Σ, Σ' et qui passent respectivement par les points P, P'. On a alors

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{u}}{2} = \frac{c}{2} : r_p + \sqrt{r_p^2 - c^2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{u}'}{2} = \frac{c}{2} : r_{p'} + \sqrt{r_{p'} - c^2},$$

Il vient donc

$$U \geqq \frac{c}{4}\left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{r_{p'}}\right).$$

et nous obtenons l'inégalité

(45) $$\frac{1}{U} \leqq \frac{4\, r_p\, r_{p'}}{c\,(r_p + r_{p'})}$$

16. Envisageons maintenant le plan xz passant par l'axe $z = A'A$ et par le point P. Soient B_P, B'_P les points où l'axe des x perce les sphères Σ, Σ' de sorte que l'on a $SB_p = c$, $SB'_p = -c$. Soit K_δ le cercle de ce plan de centre A passant par le point P. Envisageons semblablement les points $B_{p'}$, $B'_{P'}$, qui appartiennent au plan passant par le point P' et soit $K_{\delta'}$ le cercle correspondant passant par P' de centre A'.

Les équations de ces cercles sont respectivement

(46) $$x^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2 = (a+\delta)^2, \qquad x^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2 = (a+\delta')^2.$$

Envisageons, d'autre part, les cercles K_p, $K_{p'}$ de centres A_P, $A_{P'}$ sections des sphères Σ_p, $\Sigma_{p'}$ par les plans envisagés. Ils ont les équations suivantes, où $SA = a_p$, $SA' = a_{p'}$

(47) $$x^2 + (z - a_P)^2 = r_p^{\,2}, \qquad x^2 + (z + a_{p'})^2 = r^2_{p'}\,.$$

On obtient la relation

$$z_p\,(-2\,a_p + d) = c^2 - a^2 - 2\,a\,\delta - \delta^2 + \frac{d^2}{4} = -2\,a\,\delta - \delta^2,$$

donc

$$a_p - \frac{d}{2} = \frac{\delta\,(\delta + 2\,a)}{2\,z_p}$$

et semblablement

$$a_{p'} - \frac{d}{2} = -\frac{\delta'\,(\delta' + 2\,a)}{2\,z_{P'}}\,.$$

17. Nous avons vu que l'on a les relations

$$z_p = \frac{d}{2} - (a+\delta)\cos\zeta > \frac{d}{2} - \frac{3\,a}{2}\cdot\frac{2\,d}{(m-1)\,a} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{m-1}\right),$$

$$-z_{p'} > d\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{m-1}\right).$$

ce qui donne pour $m \geqq 10$

(48) $$z_p \geqq \frac{d}{6}, \qquad z_{p'} \geqq \frac{d}{6}.$$

Cela donne les inégalités

$$a_p - \frac{d}{2} \leqq \frac{\delta\cdot\frac{5a}{2}}{\frac{d}{3}} = \frac{15}{2}\,\frac{\delta\,a}{d},$$

$$a_{p'} - \frac{d}{2} \leqq \frac{15}{2}\,\frac{\delta'\,a}{d}.$$

Or on a

$$r^2_p - a^2 = a_p^2 + c^2 - a^2 = a_p^2 - \frac{d^2}{4},$$

$$r_p - a = \frac{\left(a_p - \frac{d}{2}\right)\left(a_p + \frac{d}{2}\right)}{r_p + a},$$

mais

$$\frac{d}{2} < a, \quad a_p < r_p,$$

donc

$$r_p - a < a_p - \frac{d}{2}, \quad r_{p'} - a < a_{p'} - \frac{d}{2}.$$

On parvient ainsi aux inégalités

(49) $$r_p - a < \frac{15}{2}\,\frac{a\,\delta}{d}, \quad r_{p'} - a < \frac{15}{2}\,\frac{a\,\delta'}{d}.$$

et on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{1}{U} \leqq \frac{4}{c}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{a + \frac{15}{2}\frac{a\,\delta}{d}} + \dfrac{1}{a + \frac{15}{2}\frac{a\,\delta'}{d}}},$$

$$\frac{1}{U} \leqq \frac{4}{c}\,\frac{\left(a + \frac{15}{2}\frac{a\,\delta}{d}\right)\left(a + \frac{15}{2}\frac{a\,\delta'}{d}\right)}{2\,a + \frac{15}{2}\frac{a\,\delta}{d} + \frac{15}{2}\frac{a\,\delta'}{d}},$$

donc

(50) $$\frac{1}{U} \leqq \frac{4\,a}{c}\,\frac{\left(1 + \frac{15}{2}\frac{\delta}{d}\right)\left(1 + \frac{15}{2}\frac{\delta'}{d}\right)}{2 + \frac{15}{2}\frac{\delta}{d} + \frac{15}{2}\frac{\delta'}{d}}.$$

Mais on a $\delta \leqq k d$, $\delta' \leqq k d$, ce qui donne

(51) $$\frac{1}{U} \leqq \frac{4a}{c} \frac{\left(1+\frac{15}{2}k\right)^2}{2} = K\frac{a}{c}.$$

18. Il s'agit maintenant de majorer $u_0 - \bar{u}$ et $u_0 - \bar{u}'$. Or

$$\frac{1}{2}(u_0 - \bar{u}) \leqq \operatorname{tg}\frac{1}{2}(u_0 - \bar{u}) = \frac{\operatorname{tg}\frac{u_0}{2} - \operatorname{tg}\frac{\bar{u}}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{u_0}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\bar{u}}{2}} \leqq \operatorname{tg}\frac{u_0}{2} - \operatorname{tg}\frac{\bar{u}}{2}.$$

On a

$$\operatorname{tg}\frac{u_0}{2} - \operatorname{tg}\frac{\bar{u}}{2} = \frac{c}{\frac{d}{2}+a} - \frac{c}{a_p + r_p} = \frac{c\left(a_p + r_p - \frac{d}{2} - a\right)}{\left(\frac{d}{2}+a\right)(a_p + r_p)},$$

donc on a

$$u_0 - \bar{u} < \frac{4c}{a r_p}\left(a_p - \frac{d}{2}\right) < \frac{30\,\delta\, c}{a r_p}$$

et de même

$$u_0 - \bar{u}' < \frac{30\,\delta' c}{a r_{p'}}.$$

Maintenant nous avons les relations

(52) $$\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u} = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{PB_p \cdot PB'_p}}, \quad \sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'} = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{P'B_{p'} \cdot P'B'_{p'}}},$$

on parvient donc à l'inégalité

(53) $$G \leqq A \frac{c}{\sqrt{PB_p \cdot PB'_p \cdot P'B_{p'} \cdot P'B'_{p'}}} \frac{\delta\,\delta' c^2}{d^2 r_p \cdot r_{p'}}.$$

$$\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{8u_0}\right) f(t+t')\cdot$$

Or

$$\operatorname{tg}\frac{u_0}{2} = \frac{c}{\frac{d}{2}+a} \geqq \frac{c}{2a}, \quad u_0 \geqq \operatorname{tg}\frac{u_0}{2},$$

(54) $$u_0 \geqq \frac{c}{2a}.$$

Donc on a

(55) $$G \leqq A \frac{a^3 \delta, \delta'}{\sqrt{PB_p \cdot PB'_p \cdot P'B_{p'} \cdot P'B'_{p'}}} \cdot f(t+t') \cdot \frac{1}{d^2 r_p \cdot r_{p'}}$$

19. Or on a toujours

$$PB_p \geqq z_p \geqq \frac{d}{6}, \quad P'B_{p'} \geqq -z_{p'} \geqq \frac{d}{6}.$$

Quant à PB'_p $PB'_{p'}$ on distingue les deux cas suivants 1) $d > a$ 2) $d \leqq a$.

Dans le premier cas on a

$$\sqrt{PB_p \cdot PB'_p \cdot P'B_{p'} \cdot P'B'_{p'}} \geqq \frac{d^2}{36},$$

donc

$$G \leqq A \frac{\delta\,\delta' a^3}{d^4 r_p r_{p'}} f(t+t').$$

Mais on a évidemment

$$r < \delta + \delta' + p < 2kd + \frac{m}{m-1}d,$$

donc puisque $m \geqq 10$, donc

$$r < 22\,d,$$

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{22\,d},$$

et

$$r_p \geqq a, \quad r_{p'} \geqq a,$$

et ensuite

(56) $$G \leqq A f(t+t') \frac{\delta\,\delta'}{r^3}.$$

Dans le second cas, $d \leqq a$, on a

$$c^2 = a^2 - \frac{d^2}{4} \geqq a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$

et

$$PB'_p \cdot P'B'_{p'} \geqq 4c^2 \geqq 3a^2,$$

donc

$$G \leqq A \frac{a^3 \delta, \delta'}{a\, d^3 r_p \cdot r_{p'}} f(t+t'),$$

ce qui donne encore la formule (56).

20. Il s'agit maintenant de majorer $f(t+t')$. Envisageons l'intégrale

(57) $$I=\int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch}\alpha}}.$$

Posons $\operatorname{ch} x=u$, $\operatorname{ch}\alpha=\eta$,

$$d\alpha=\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}.$$

On a

$$I=\int_1^u \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}\cdot\sqrt{u-\eta}}.$$

Partageons l'intervalle $1, u$ en deux intervalles: $-1, \frac{u}{2}$ et $\frac{u}{2}, u$

$$I=I_1+I_2.$$

Supposons $u>3$. On a $u-\eta>\frac{u}{2}$ pour $\eta<\frac{u}{2}$, donc

$$I_1<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u}}\int_1^{\frac{u}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}, \quad I_1>\frac{1}{\sqrt{u-1}}\int_1^{\frac{u}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}.$$

Or on a

$$\int_1^{\frac{u}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}=\log\left[\eta+\sqrt{\eta^2-1}\right]\Bigg|_1^{\frac{u}{2}}=\log\left[\frac{u}{2}+\sqrt{\frac{u^2}{4}-1}\right].$$

Nous obtenons donc les inégalités

$$I_1<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u}}\log\left[\frac{u}{2}+\sqrt{\frac{u^2}{4}-1}\right], \quad I_1>\frac{1}{\sqrt{u-1}}\log\left[\frac{u}{2}+\sqrt{\frac{u^2}{4}-1}\right],$$

donc pour u grand I_1 est de l'ordre de $\frac{\log u}{\sqrt{u}}$.

Quant à I_2 on a ici $\eta^2-1\geqq\frac{u^2}{4}-1\geqq\frac{u^2}{4}-\frac{u^2}{8}=\frac{u^2}{8}$,

donc

$$I_2\leq\int_{\frac{u}{2}}^u\frac{d\eta}{\sqrt{u-\eta}}\cdot\frac{3}{u},$$

mais

$$\int_{\frac{u}{2}}^u\frac{d\eta}{\sqrt{u-\eta}}=-2\sqrt{u-\eta}\Bigg|_{\frac{u}{2}}^u=2\sqrt{\frac{u}{2}},$$

donc

$$I_2\leq\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{u}}.$$

Donc I est de l'ordre de $\frac{\log u}{\sqrt{u}}$.

21. Considérons maintenant le *premier* cas, c'est à dire le cas des deux sphères *extérieures* l'une à l'autre. Soient B, B' les points focaux du faisceau F de sphères auquel appartiennent les deux sphères. Soit $2c$ la distance $B'B$ et d la distance AA'. Envisageons aussi les sphères passant par B, B' orthogonales aux sphères de F.

Introduisons les coordonnées t, u, v *bipolaires* dans l'espace S_3 cartésien envisagé. v varie de O à 2π et représente l'angle du plan passant par l'axe des x qui coincide avec la direction $A'A$ et du plan x, y fixe. t, u sont les coordonnées bipolaires dans le plan variable, à savoir on a

$$\frac{PB}{PB'}=e^{-t},$$

t variant de $+\infty$ à $-\infty$, et

$$2u=\sphericalangle BPB'$$

u variant de O à π. Le point $P(t,u)$ décrit un demi-plan et l'angle v est l'angle entre le demi-plan positif des x, y et entre le demi-plan envisagé compté dans un sens fixé.

Les coordonnées cartésiennes s'expriment par les formules

(58) $$x=c\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t-\cos u}, \quad y=c\frac{\sin u\cos v}{\operatorname{ch} t-\cos u}, \quad z=c\frac{\sin u\sin v}{\operatorname{ch} t-\cos u}.$$

On sait que la distance $r=PP'$ s'exprime par la formule

(59) $$\frac{1}{r}=\frac{1}{c}\sqrt{\operatorname{ch} t-\cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t'-\cos u'}\cdot\sum_0^\infty P_n(\cos\gamma)\, e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)|t-t'|}$$

Ici t, u et t', u' sont respectivement les coordonnées bipolaires de P et de P'. $P_n(\cos\gamma)$ est la fonction de Legendre de l'argument

$$\cos\gamma=\cos u\cos u'+\sin u\sin u'\cos(v-v').$$

22. Soient t_1, t_2 les valeurs de t qui appartiennent respectivement aux sphères Σ et Σ'. Soient Δt_1 et Δt_2 les différences

$$\Delta t_1 = t - t_1, \qquad \Delta t_2 = t' - t_2.$$

On sait que la fonction $G(P, P')$ de Green de l'extérieur des deux sphères Σ, Σ' est donnée par l'expression suivante

$$G(P, P') = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\cdot\sum_0^\infty P_n(\cos\gamma)\cdot$$

$$\cdot\frac{\operatorname{sh} -\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_1 \cdot sh\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_2}{sh\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau},$$

où l'on a posé $\tau = t_1 - t_2$. On a d'ailleurs $t > 0$, $t' < 0$.

Il s'agit encore de majorer G. Tout d'abord nous avons les deux inégalités

$$(61) \qquad \operatorname{sh} -\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_1 \leqq -\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_1 \cdot e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_1}$$

$$\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_2 \leqq \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_2 \cdot e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t_2'}$$

La somme Σ qui figure dans (11) est donc majorée par la somme

$$2\sum_0^\infty \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\tau-T)}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}}\cdot|\Delta t_1|\cdot|\Delta t_2|,$$

où $t - t' = T$.

On a

$$\frac{1}{1-e^{-2\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}} \leqq \frac{1+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau},$$

$$(62) \qquad S' = \sum_0^\infty\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)T} = \frac{e^{\frac{T}{2}} + e^{-\frac{T}{2}}}{2\left(e^{\frac{T}{2}} - e^{-\frac{T}{2}}\right)^2}$$

$$S'' = \sum_0^\infty\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)T} = \frac{e^T + e^{-T} + 6}{4\left(e^{\frac{T}{2}} - e^{-\frac{T}{2}}\right)^3}.$$

et nous obtenons la majoration suivante:

$$(63) \qquad G \leqq \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}|\Delta t_1|\cdot|\Delta t_2|\left\{\frac{e^{\frac{T}{2}} + e^{-\frac{T}{2}}}{2\tau\left(e^{\frac{T}{2}} - e^{-\frac{T}{2}}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^T + e^{-T} + 6}{2\left(e^{\frac{T}{2}} - c^{-\frac{T}{2}}\right)^3}\right\}.$$

Pour aller plus loin nous distinguerons les *deux cas*: I. $c > 2a$, II. $c \leqq 2a$.

Cas. I.

On a

$$e^{\frac{T}{2}} - e^{-\frac{T}{2}} = \frac{e^t - e^{t'}}{\frac{1}{2}(t+t')},$$

$$e^t - e^{t'} = \frac{PB'}{PB} - \frac{P'B'}{P'B}.$$

Envisageons l'expression

$$\left(\frac{PB'}{PB}\right)^2 = \frac{(a+\delta)^2 - 2(a+\delta)\cos\zeta\, AB' + AB'^2}{(a+\delta)^2 - 2(a+\delta)\cos\zeta\cdot AB + AB^2},$$

La dérivée de cette expression par rapport à ζ contient au numérateur l'expression

$$[(a+\delta)^2 - 2(a+\delta)\cos\zeta\cdot AB + AB^2]\cdot 2(a+\delta)\sin\zeta\cdot AB' - [(a+\delta)^2$$

$$- 2(a+\delta)\cos\zeta\cdot AB' + AB'^2]\cdot 2(a+\delta)\sin\zeta\cdot AB = 2(a+\delta)\sin\zeta\{(a+\delta)^2\cdot$$

$$\cdot BB' + AB\cdot AB'\cdot B'B\}.$$

Mais on a

$$AB\cdot AB' = a^2,$$

donc l'expression précédente n'est pas négative. Sa valeur minima est atteinte pour $\zeta = 0$ et elle est

$$\left(\frac{a+\delta-AB'}{a+\delta-AB}\right)^2 = \left(\frac{a+\delta-c-\sqrt{a^2+c^2}}{a+\delta+c-\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2.$$

Envisageons de même l'expression

$$\left(\frac{P'B'}{p'B}\right)^2 = \frac{(a+\delta')^2 - 2(a+\delta')\cdot A'B'\cdot\cos\zeta' A'B'^2}{(a+\delta')^2 - 2(a+\delta')\cdot A'B\cdot\cos\zeta' + A'B^2}$$

On démontre de même que la valeur maxima de cette expression est atteinte pour $\zeta' = 0$ et elle est

$$\left(\frac{a+\delta'+c-\sqrt{a^2+c^2}}{a+\delta'-c-\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2.$$

23. On a $\delta,\ \delta' \leqq \frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2}+c \geqq (2+\sqrt{5})\,a,\ a+\delta \leqq \frac{3a}{2}\ a+\delta' \leqq \frac{3a}{2}$,

donc

$$e^t - e^{t'} \leqq \frac{c+\sqrt{a^2+c^2}-a-\delta}{a+c+\delta-\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a+c+\delta'-\sqrt{a^2+c^2}}{c+\sqrt{a+c^2}-a-\delta'}. \tag{64}$$

A droite on a après réduction une fraction dont le numérateur est

$$2c\left[\sqrt{a^2+c^2}-a-\delta-\delta'\right],$$

ce qui est $> 2c\left(\sqrt{a^2+c^2}-2a\right) \leqq 2ac\left(\sqrt{5}-2\right)$.

Au dénominateur le facteur

$$a+c+\delta-\sqrt{a^2+c^2}$$

est majoré par $\frac{3a}{2}$ et le facteur

$$c+\sqrt{a^2+c^2}-a-\delta'$$

par $2c$. Au numérateur on a

$$2c\left[\sqrt{a^2+c^2}-a-\delta-\delta'\right]$$

ce qui est $> 2c\left(\sqrt{a^2+c^2}-2a\right) \geqq 2ac\left(\sqrt{5}-2\right)$.

Cela donne

$$e^t - e^{t'} > \frac{2(\sqrt{5}-2)}{3} = A. \tag{65}$$

On a

$$r \leqq \delta + \delta' + 2a + d,$$

et $d > 4a$, donc

$$r > 2d.$$

On a aussi

$$e^{\frac{1}{2}(t+t')} < e^{t_1} = \frac{2a}{d-\sqrt{d^2-4a^2}} < \frac{d}{a},$$

donc il vient

$$\frac{1}{e^{\frac{T}{2}} - e^{-\frac{T}{2}}} < \frac{d}{Aa} < \frac{2d^2}{Aan} = A'\frac{D'^2}{an}, \qquad A' = \frac{A}{2} = 3\sqrt{5}+2 < 9.$$

On a aussi

$$e^{T'} < e^{\tau} = \frac{d+\sqrt{d^2-4a^2}}{d-\sqrt{d^2-4a^2}} < \frac{d^2}{a^2}.$$

Il vient donc l'inégalité

$$G \leqq \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\,|\Delta t_1|\cdot|\Delta t_2|\left\{\frac{1}{2\tau}\left(\frac{d}{a}+1\right)\cdot\right. \tag{66}$$

$$\left.\cdot A'^2\frac{D'^4}{a^2r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{a^2}+7\right)\frac{A'^3D'^6}{a^3r^3}\right\}.$$

On trouve de suite

$$e^{\tau} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}+c}{\sqrt{a^2+c^2}-c} \geqq 9+4\sqrt{5}, \qquad \tau > 2,$$

$$\frac{d}{\tau} < \frac{2d^2}{r\log\left(9+4\sqrt{5}\right)} < \frac{d^2}{r}.$$

ce qui donne

$$G \leqq \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\cdot|\Delta t_1|\cdot|\Delta t_2|\cdot\frac{A'^2D'^4d^2}{a^3r^3}\cdot$$

$$\left\{1+\frac{4A'D'^2}{a^2}\right\} < \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u}}{c}\,|\Delta t_1|\cdot|\Delta t_2|\cdot\frac{5A'^3D'^8}{a^5r^3}.$$

Majorons maintenant $|\Delta t_1|$ et $|\Delta t_2|$. Envisageons $|\Delta t_1|$. On a

$$|\Delta t_1| \leqq \frac{1}{2}\left(e^{2(t_1-t)}-1\right). \tag{67}$$

Le maximum du membre à droite est atteint pour $\zeta = 0$. Ce maximum est

$$\text{(68)}\qquad \frac{a+c+\delta-\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}+c-a-\delta}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}+c-a}{a+c-\sqrt{a^2+c^2}}-1.$$

La fraction réduite a au numérateur $2c\delta$. Quant au dénominateur on a

$$a+c-\sqrt{a^2+c^2}=\frac{2ac}{a+c+\sqrt{a^2+c^2}}\geqq\frac{2ac}{c\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{4a}{3+\sqrt{5}},$$

$$\sqrt{a^2+c^2}+c-a-\delta\geqq a\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right).$$

donc

$$|\Delta t_1|\leqq\frac{2c\delta(3+\sqrt{5})}{4a^2\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)}<\frac{\delta c}{a^2},$$

et de même

$$|\Delta t_2|\leqq\frac{\delta' c}{a^2}.$$

25. Nous avons maintenant

$$\sqrt{\operatorname{ch} t-\cos u}\cdot\sqrt{\operatorname{ch} t'-\cos u'}=\frac{2c^2}{\sqrt{PB\cdot PB'\cdot P'B\cdot P'B'}}.$$

Le minimum de $PB\cdot PB'$ est atteint pour $\zeta=0$ et il est égal à

$$(a+c+\delta-\sqrt{a^2+c^2})(\sqrt{a^2+c^2}+c-a-\delta)\geqq$$

$$\geqq(a+c-\sqrt{a^2+c^2})\left(\sqrt{a^2+c^2}+c-\frac{3a}{2}\right)=\frac{a}{2}(5\sqrt{a^2+c^2}-5a-c).$$

Or on a

$$5\sqrt{a^2+c^2}-5a-c=\frac{2c(12c-5a)}{5\sqrt{a^2+c^2}+5a+c}>\frac{2c\cdot 19a}{c\left(5\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{76a}{7+5\sqrt{5}},$$

donc

$$PB\cdot PB'\geqq\frac{38a^2}{7+5\sqrt{5}},$$

et de même

$$P'B\cdot P'B'\geqq\frac{38a^2}{7+5\sqrt{5}}.$$

Nous obtenons pour G l'inégalité

$$\text{(69)}\qquad G\leqq\frac{2c(7+5\sqrt{5})}{38a^2}\cdot\frac{\delta\delta' c^2}{a^4}\cdot\frac{5A'^3\cdot D'^3}{a^5\cdot r^3},$$

donc en posant

$$\text{(70)}\qquad K=\frac{5(7+5\sqrt{5})}{19}\cdot\frac{c^3D'^3\cdot A'^3}{a^{11}}$$

on a l'inégalité (4).

26. Envisageons maintenant le cas II. $c\geqq 2a$. Nous avons

$$\cos\zeta<\frac{2d}{(m-1)a}.$$

Supposons $m=50$, alors puisque

$$d=2\sqrt{a^2+c^2}\leqq 2\sqrt{5}\,a$$

on aura

$$\text{(71)}\qquad \cos\zeta<\frac{1}{4}.$$

Envisageons l'expression $e^{\frac{T}{2}}-e^{-\frac{T}{2}}$. L'expression donnant $\left(\frac{PB'}{PB}\right)^2$ atteint cette fois son minimum pour $\cos\zeta=\frac{1}{4}$. De même l'expression donnant $\left(\frac{P'B'}{P'B}\right)^2$ atteint son maximum pour $\cos\zeta=\frac{1}{4}$. On a ainsi l'inégalité

$$\text{(72)}\qquad e^t-e^{t'}\geqq\frac{(a+\delta)^2-\frac{1}{2}(a+\delta)(\sqrt{a^2+c^2}+c)+(\sqrt{a^2+c^2}+c)^2}{(a+\delta)^2-\frac{1}{2}(a+\delta)(\sqrt{a^2+c^2}-c)+(\sqrt{a^2+c^2}-c)^2}-$$

$$-\frac{(a+\delta')^2-\frac{1}{2}(a+\delta')(\sqrt{a^2+c^2}-c)+(\sqrt{a^2+c^2}-c)^2}{(a+\delta')^2-\frac{1}{2}(a+\delta')(\sqrt{a^2+c^2}+c)+(\sqrt{a^2+c^2}+c)^2}.$$

Le numérateur est égal à

$$c\,[\sqrt{a^2+c^2}(8a^2+16c^2+4m^2+mm'+4m'^2)$$

$$-(m+m')(3a^2+4c^2+mm')],$$

où l'on a posé $m = a + \delta$, $m' = a + \delta'$. Or on a

$$\sqrt{a^2+c^2} \cdot 16\, c^2 - (m + m') \cdot 4\, c^2 \geqq 4\, c^2 a > 0,$$

$$\sqrt{a^2+c^2}\,(8\, a^2 + 4\, m^2 + m\, m' + 4\, m'^2) \geqq 17\, a^3,$$

$$(m + m')\,(3\, a^2 + m\, m') < 16\, a^3.$$

Il s' en suit que le numérateur est $> c\, a^3$. Quant au dénominateur, on a les inégalités

$$m^2 - \frac{1}{2}\, m\,(\sqrt{a^2+c^2} - c) + (\sqrt{a^2+c^2} - c)^2 < \frac{13\, a^2}{4},$$

$$m'^2 - \frac{1}{2}\, m'\,(\sqrt{a^2+c^2} + c) + (\sqrt{a^2+c^2} + c)^2 \leqq 28\, a^2.$$

Donc il vient

(73) $$e^t - e^{t'} \geqq \frac{c}{91\, a}.$$

Ensuite

$$e^{\frac{1}{2}(t+t')} < e^{t_1} < \frac{d}{a} < 5,$$

donc

(74) $$e^{\frac{T}{2}} - e^{-\frac{T}{2}} > \frac{c}{455\, a}.$$

27. Nous avons

$$e^{T} < \frac{d^2}{a^2},$$

ce qui donne

$$e^{\frac{T}{2}} + e^{-\frac{T}{2}} < 6,\quad e^{T} + e^{-T} + 6 < 32,$$

$$e^{\tau} \geqq 1 + \frac{2\, c}{a},\quad \tau \geqq \frac{2\, c}{5\, a}.$$

On a l'inégalité

(75) $$G \leqq \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u} \cdot \sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c} \cdot |\Delta t_1| \cdot |\Delta t_2| \cdot \left\{ \frac{15\, a}{c} \left(\frac{455\, a}{c} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 16 \cdot \left(\frac{455\, a}{c} \right)^3 \right\}.$$

Mais

$$r < 2\, a + \delta + \delta' + d < 8\, a,$$

a qui donne

(76) $$G \leqq \frac{\sqrt{\operatorname{ch} t - \cos u} \cdot \sqrt{\operatorname{ch} t' - \cos u'}}{c}\, |\Delta t_1| \cdot |\Delta t_2| \cdot \frac{a^6}{c^3 r^3}\, A,$$

où l'on a posé

(77) $$A = 60 \cdot (3640)^2 + 16 \cdot (3640)^3.$$

28. Majorons maintenant $|\Delta t_1|$ et $|\Delta t_2|$. Le minimum de e^{2t} atteint pour $\cos \zeta = \frac{1}{4}$ est

$$\frac{(a+\delta)^2 - \frac{1}{2}\,(a+\delta)\,(\sqrt{a^2+c^2} + c) + (\sqrt{a^2+c^2} + c)^2}{a^2 - \frac{a}{2}\,(\sqrt{a^2+c^2} - c) + (\sqrt{a^2+c^2} - c)^2}$$

Calculons le maximum de $e^{2|\Delta t_1|} - 1$. On obtient

(78) $$|\Delta t_1| \leqq \frac{4\, c\, \delta\,(\sqrt{a^2+c^2} - a)\,(2\, a + \delta)}{\left[(a+\delta)^2 - \frac{a+\delta}{2}\,(\sqrt{a^2+c^2} + c) + (\sqrt{a^2+c^2} + c)^2 \right]} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(a + c - \sqrt{a^2+c^2})^2}.$$

Le premier facteur du dénominateur est plus grand que $\frac{15}{16}\left(\sqrt{a^2+c^2} + c\right)^2$, donc plus grand que $\frac{15}{16}\, a^2$. Le second est plus grand que $\frac{4\, a^2 c^2}{(a + c + \sqrt{a^2+c^2})^2}$ donc que $\frac{4\, c^2}{(3+\sqrt{5})^2}$. on a donc

$$|\Delta t_1| \leqq \frac{4\, c\, \delta\,(2\, a + \delta)\, \frac{c^2}{2\, a}}{\frac{15}{4}\, \frac{a^2 c^2}{(3+\sqrt{5})^2}} \leqq \frac{5\, \delta\,(3+\sqrt{5})^2 c}{a^2} \cdot \frac{4}{15}.$$

En posant $A' = \frac{4}{3}(3+\sqrt{5})^2$

on a donc

(79) $$|\Delta t_1| \leqq \frac{A'\, \delta\, c}{a^2},\quad |\Delta t_2| \leqq \frac{A'\, \delta\, c}{a^2}.$$

On a ainsi l'inégalité

$$G \leqq C \delta \delta' . \frac{a^2}{r^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{PB . PB' . P'B . P'B'}} . \tag{80}$$

Envisageons $(PB . PB')^2$. Le minimum de cette expression est égal à

$$\left[AB^2 + (a+\delta)^2 - \frac{a+\delta}{2} AB\right] \left[AB'^2 + (a+\delta)^2 - \frac{a+\delta}{2} AB'\right],$$

ce qui est au moins égal à

$$(AB . AB')^2 \left(\frac{15}{16}\right)^2 .$$

Donc la racine dans (80) est au moins égale à $\frac{15}{16} a^2$.

Il vient enfin

$$G \leqq K \delta \delta' . \frac{1}{r^3} \tag{81}$$

ce qui est la formule (4).

29. Envisageons enfin le *second cas* du n^0 4. Les deux sphères de rayon a tangentes extérieurement appartiennent à un faisceau de sphères dont le paramètre est $t = \frac{1}{2a}$. Dans un plan passant par l'axe du faisceau nous avons un second faisceau de cercles orthogonaux aux cercles du premier faisceau de paramètre $u = \frac{1}{2\overline{a}}$, $\overline{a}$ étant le rayon des cercles. On a les coordonnées t, u, v dans l'espace, v étant l'angle analogue aux angles envisagés précédemment. x étant l'axe des sphères Σ, Σ' et y, z étant les deux autres coordonnées on a

$$x = \frac{t}{t^2 + u}, \quad y = \frac{u \cos v}{t^2 + u^2}, \quad z = \frac{u \sin v}{t^2 + u^2} . \tag{82}$$

La fonction de Green est donnée dans ce cas par la formule suivante

$$G = -\sqrt{(t^2 + u^2)(t'^2 + u'^2)} \tag{83}$$

$$\int_0^\infty I_0(\lambda R) \frac{e^{\lambda(t-t_1)} \operatorname{sh} \lambda (t' - t_2) + e^{\lambda(t_2 - t)} \operatorname{sh} \lambda (t_1 - t') - e^{\lambda(t'-t)} \operatorname{sh} \lambda (t_1 - t_2)}{\operatorname{sh} \lambda (t_1 - t_2)} \, d\lambda$$

I_0 est la fonction de **Bessel** et

$$R^2 = u^2 + u'^2 - 2 u u' \cos (v - v')$$

Comme on a $|I_0(\lambda R)| \leqq 1$, G est majoré par

$$-\sqrt{t^2 + u^2} . \sqrt{t'^2 + u'^2} \int_0^\infty \frac{2 \operatorname{sh} \lambda \Delta t_1 . \operatorname{sh} \lambda \Delta t_2}{\operatorname{sh} \lambda (t_1 - t_2)} \, d\lambda .$$

Il s'en suit l'inégalité

$$G \leqq \sqrt{t^2 + u^2} . \sqrt{t'^2 + u'^2} \int_0^\infty \frac{1 + 2\lambda\tau}{\tau} e^{\lambda(t'-t)} . \lambda |\Delta t_1| . |\Delta t_2| \, d\lambda \tag{84}$$

Ici on a $\tau = t_1 - t_2 = \frac{1}{a}$.

En posant $\mathrm{T} = t - t'$ on a donc

$$G \leqq \sqrt{t^2 + u^2} . \sqrt{t' + u'^2} . |\Delta t_1| . |\Delta t_2| . \frac{1}{\mathrm{T}^2} \left(a + \frac{4}{\mathrm{T}}\right).$$

30. Envisageons maintenant la sphère Σ_P du faisceau Σ de rayon a_ζ passant par P. Soient ξ, η les coordonnées $(\xi = x)$ dans un plan passant par l'axe des sphères. On a les relations suivantes

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 a \xi = 2 a \delta + \delta^2,$$

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 a_\zeta \xi = 0.$$

Ils'en suit que l'on a

$$2 \xi (a_\zeta - a) = \delta (2a + \delta).$$

On a $\cos \zeta < \frac{1}{10}$, donc

$$\cos \zeta = \frac{a - \xi}{a + \delta} < \frac{1}{10},$$

donc

$$\xi \geqq \frac{9a - \delta}{10} \geqq \frac{17a}{20},$$

$$a_\zeta \leqq a + \frac{5a}{2} \cdot \frac{10\delta}{17a} .$$

Il vient ensuite

$$|\Delta t_1| \leqq \frac{a_\delta - a}{2a\, a_\delta} \leqq \frac{25\delta}{34} \cdot \frac{1}{a^2}, \quad |\Delta t_2| \leqq \frac{25\delta}{34\, a^2}. \tag{85}$$

On a pour T, $a_{\delta'}$ étant le rayon de $\Sigma_{p'}$,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\, \frac{a_\delta + a_\delta'}{a_\delta\, a_\delta'} \geqq \frac{1}{2a}, \tag{86}$$

puisque $a_\delta < 2a$, $a_{\delta'}, < 2a$.

Soient maintenant $\bar{a}_\delta$, $\bar{a}_{\delta'}$, les rayons des cercles orthogonaux passant par P et par P'. On a les deux équations

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a\xi = 2a\delta + \delta^2,$$
$$\xi^2 + \eta^2 - 2\bar{a}_\delta\, \eta = 0.$$

donc

$$\bar{a}_\delta\, \eta \geqq a\xi \geqq \frac{17a^2}{20},$$

et puisque l'on a

$$\eta \leqq D'$$

il vient

$$\bar{a}_\delta \geqq \frac{17a^2}{20\, D'}, \quad \bar{a}_{\delta'} \geqq \frac{17a^2}{20\, D'}.$$

On a donc

$$4(t^2 + u^2) = \frac{1}{a^2_\delta} + \frac{1}{a^2_{\delta'}} \leqq \frac{1}{a^2} + \left(\frac{20\, D'}{17\, a^2}\right)^2 \leqq \frac{A\, D'^2}{a^4},$$

$A > 0$ constante. De même

$$4(t'^2 + u'^2) \leqq \frac{A\, D'^2}{a^4}.$$

On obtient par suite l'inégalité

$$G \leqq \frac{A\, D'^2}{a^4} \left(\frac{25}{34}\right)^2 \frac{\delta\delta'}{a^4} \cdot 4a^2(a + 8a). \tag{87}$$

On a

$$r \leqq 4a + \delta + \delta' \leqq 5a. \text{ Il vient donc}$$

$$G \leqq A' \left(\frac{D'}{a}\right)^2 \cdot \frac{\delta\delta'}{r^3} \tag{88}$$

ce qui donne encore (4).

31. Nous pouvons résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème suivant.

Théorème: Soit donné un domaine D borné, limité par une surface S fermée de Jordan à plan tangent et à courbure partout continus. Supposons qu'il existe un nombre $A > 0$ tel qu'en chaque point M de S il y ait une sphère Σ_i de rayon A tangente à S en M toute intérieure à S et de même une sphère Σ_e du même rayon toute extérieure à S et tangente en M.

Soit $a = \dfrac{A}{m}$, m étant un nombre positif que l'on peut prendre égal à 50. Soit D le diamètre de D et $D' = D + 2a$.

La fonction $G(P, P')$ de Green du domaine D satisfait à l'inégalité

$$G \leqq K \frac{\delta\delta'}{r^3}, \tag{4}$$

où δ, δ' sont les distances des deux points P, P' du domaine D de la surface S. r est égal à PP'. K ne dépend que de S, à savoir on peut exprimer K en fonction de D et de A seulement.

Cracovie, juin 1935.