icm©

Über Örter von Treffgeraden homologer Strahlen einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n-ten Grades zwischen Strahlenbündeln

(Miejsca geometryczne prostych, przecinających homologiczne proste pewnej klasy przekształceń kremonowskich stopnia n pomiędzy wiązkami)

von

A. Plamitzer.

Befinden sich m gegebene Strahlenbündel (W_1), (W_2), ..., (W_m) mit einem beliebigen Strahlenbündel (W) in allgemeinen Cremonaschen Verwandtschaften von den Graden $n_1, n_2, \ldots, n_m$, so besteht [1] in Allgemeinen (für $\iota \neq \varkappa$, $\iota = 1, 2, \ldots, m$, $\varkappa = 1, 2, \ldots m$) zwischen zwei Strahlenbündeln (W_ι) und $(W_\varkappa)$ eine Cremonasche Verwandtschaft $n_\iota n_\varkappa$. Grades. Bekanntlich erzeugen [2] die Treffgeraden sämtlicher Tripel homologer Strahlen solcher drei Bündel (W_1), (W_2) und (W_3) einen Komplex $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)$ — ten Grades. Jede Gerade des Bündels (W_1), (W_2), resp. (W_3) ist eine $n_2 n_3$ — fache, $n_3 n_1$ —, resp. $n_1 n_2$ — fache Gerade dieses Komplexes. Die Treffgeraden sämtlicher Quadrupel homologer Strahlen solcher vier Bündel (W_1), (W_2), (W_3) und (W_4) erzeugen [2] eine Kongruenz von der Ordnung und Klasse $n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4$, für welche der Scheitel z. B. W_1 des Bündels (W_1) ein singulärer Punkt $(n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4)$ — ten Grades ist. Die Treffgera-

[1] Gino-Loria, Sugli enti geometrici da forme fondamentali in corrispondenza algebrica, Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova (1887) p. 67 = Giornale di matematiche Napoli (2) 34 (1896), p. 364.

[2] G. Loria, l. c. [1], Nr. 26, 28 und 29.

den sämtlicher *Q*uintupel homologer Strahlen solcher fünf Bündel (W_1), (W_2), (W_3), (W_4) und (W_5) erzeugen[2]) eine Regelfläche vom Grade $2\,(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_1 n_5 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_2 n_5 + n_3 n_4 + n_3 n_5 + n_4 n_5)$, für welche die Scheitel dieser Bündel singulär sind. Durch den Scheitel z. B. W_1 des Bündels (W_1) gehen $n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_2 n_5 + n_3 n_4 + n_3 n_5 + n_4 n_5$ Erzeugende dieser Regelfläche hindurch.

In der vorliegenden Abhandlung stelle ich (vgl. Nr. 1) zwischen einem gegebenen Strahlenbündel (W_0) und jedem von m gegebenen kollinearen Strahlenbündeln (W_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades her. Ich untersuche die Eigenschaften des Strahlenkomplexes $(2n+1)$. Grades, der Strahlenkongruenz von der Ordnung und Klasse $3\,(n+1)$ und der Regelfläche von $4\,(2n+3)$ Grade und $4\,(4n+5)$. Geschlechts, deren Elemente die Treffgeraden homologer Strahlen der drei, vier, resp. fünf solcher Bündel sind. Endlich ergeben sich $10\,(n+2)$ solche Geraden, dass jede von ihnen je sechs homologe Strahlen solcher sechs Bündel schneidet.

Aus dualen Untersuchungen ergeben sich ganz analoge Sätze über Örter von Treffgeraden homologer Strahlen einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen Strahlenfeldern.

Insbesondere für $n=2$ erhalten wir[3]) eine Klasse quadratischer Vervandtschaften zwischen Strahlenbündeln (resp. Strahlenfeldern) und analoge Örter von Treffgeraden sämtlicher Tripel, Quadrupel, Quintupel, resp. Sechstupel homologer Strahlen solcher Strahlengebilde zweiter Stufe.

---

1. Die Konstruktion einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften *n-ten* Grades zwischen Strahlenbündeln. Es liegen zwei zentrische Strahlenbündel (W_0) und (W_1) vor, deren Strahlen $a_0, b_0, \ldots$ und $a_1, b_1, \ldots$ sich in einer *allgemeinen Cremonaschen Verwandtschaft n-ten Grades* befinden:

$$(W_0)\ \pi^n\ (W_1). \tag{1}$$

Jeder r_i—fachen Hauptgeraden f_i^0, $i = 1, 2, \ldots, \rho$, des Bündels (W_0) entspricht im Bündel (W_1) ein unikursaler Fundamentalkegel Φ_i^1 von der Ordnung r_i. Jeder s_k—fachen Hauptgeraden f_k^1, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$ (bekanntlich ist $\sigma = \rho$) des Bündels (W_1) entspricht im (W_0) ein unikursaler Hauptkegel Φ_k^0 von der Ordnung s_k. Bedeutet ferner μ_{ik} die Multiplizität der Hauptgeraden f_i^0 auf Φ_k^0 und μ_{ki}^1 die Vielfachheit der Fundamentalgeraden f_k^1 auf Φ_k^1, so ist $\mu_{ik} = \mu_{ki}^1$. Bekanntlich gelten folgende[4]) Beziehungen:

$$\text{I.}\qquad \sum r_i^2 = \sum s_k^2 = n^2 - 1$$

$$\text{II.}\qquad \sum \frac{1}{2} r_i (r_i - 1) = \sum \frac{1}{2} s_k (s_k - 1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$\text{III.}\qquad \sum r_i = \sum s_k = 3\,(n-1)$$

$$\text{IV.}\qquad \sum r_i \mu_{ik} = n s_k\,, \qquad \sum s_k \mu_{ik} = n r_i\,.$$

Wenn eine Gerade z. B. des Bündels (W_0) eine Kegelfläche ν. Ordnung beschreibt, welche jede r_i— fache Fundamentalgerade f_i^0 zur l_i—fachen Erzeugende besitzt, so beschreibt die entsprechende Gerade des Bündels (W_1) eine Kegelfläche von der Ordnung $\nu n - \Sigma l_i r_i$, für welche jede s_k—fache Hauptgerade f_k^1 eine $(\nu s_k - \Sigma l_i \mu_{ik})$—fache Erzeugende ist.

Ammerkung: Insbesondere kann jeder Strahlenbündel eine $(n-1)$—*fache* Hauptgerade und $2\,(n-1)$ *einfache* Hauptgeraden besitzen. Die Hauptkegeln in jedem der beiden Bündel bestehen dann aus Ebenen, welche die $(n-1)$—fache Hauptgerade mit den einfachen Hauptgeraden verbinden, und einer Kegelfläche $(n-1)$. Ordnung, welche in der ersten Hauptgerade die Multiplizität $n-2$ besitzt und durch die übrigen einfach hindurchgeht. Diese Transformation heisst *Jonquières'sche* Verwandtschaft n.-ten Grades.

Zwischen m gegebenen zentrischen Strahlenbündeln (W_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, stellen wir *allgemeine Kollineationen* her:

$$(W_1)\,\varkappa\,(W_2)\,\varkappa\,(W_3)\,\varkappa\ \ldots\ \varkappa\,(W_m) \tag{2}$$

und bezeichnen mit $a_1, a_2, \ldots, a_m$ entsprechende Strahlen und mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ homologe Ebenen dieser Bündel. Jeder Fundamentalgeraden f_k^1 und jedem Hauptkegel Φ_k^1 des Bündels (W_1) entspricht im Bündel (W_ε), $\varepsilon = 2, 3, \ldots, m$ eine Hauptgerade f_k^ε, bezw. Hauptkegelfläche Φ_k^ε. Zwischen dem Strahlenbündel (W_0) und jedem von den $m-1$ übrigen Strahlenbündeln (W_ε) ergibt sich unmittelbar aus den Relationen

---

[3]) Antoni Plamitzer. Utwory pewnej klasy przekształceń kwadratowych pomiędzy układami płaskiemi, wzgl. wiązkami. Prace Mat.-Fiz. T. 35. Warszawa 1927—1928. str. 29—51.

[4]) Rudolf Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaftem. Bd. IV. Nr. 785, 790, 792. Leipzig u. Berlin 1909.

(1) und (2) folgende Klasse *allgemeiner Cremonascher Verwandtschaften n. Grades:*

(3) $$(W_0)\,\pi^n\,(W_2),\ (W_0)\,\pi^n\,(W_3),\ \ldots,\ (W_0)\,\pi^n\,(W_m)\,.$$

Jeder r_i — fachen Hauptgeraden f_i^0 des Bündels (W_0) entspricht im Bündel (W_ε) ein unikursaler Hauptkegel Φ_i^ε von der Ordnung r_i. Jeder s_k — fachen Hauptgeraden f_k^ε des Bündels (W_ε) entspricht im Bündel (W_0) ein unikursaler Hauptkegel Φ_k^0 von der Ordnung s_k.

Die betrachteten Strahlenbündel (W_0) und (W_ι) schneiden wir mit einer beliebigen Ebene ω, welche die Scheitelpunkte W_0, W_ι dieser Bündel nicht enthält, in den kollokalen ebenen Punktfeldern (ω_0) und (ω_ι). Aus den Relationen (2), (1) und (3) ergeben sich unmittelbar *allgemeine Kollineationen:*

(2 a) $$(\omega_1)\,\varkappa\,(\omega_2)\,\varkappa\ \ldots\ \varkappa\,(\omega_m)$$

und *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades:*

(1 a) $$(\omega_0)\,\pi^n\,(\omega_1)$$

(3 a) $$(\omega_0)\,\pi^n\,(\omega_2),\ (\omega_0)\,\pi^n\,(\omega_3),\ \ldots,\ (\omega_0)\,\pi^n\,(\omega_m)$$

zwischen diesen kollokalen Punktfeldern. Die Schnittpunkte $A_0 = a_0\,\omega$, $A_1 = a_1\,\omega$, $\ldots A_m = a_m\,\omega$ sind homologe Punkte dieser Felder. Jedem r_i fachen Hauptpunkte $F_i^0 = f_i^0\,\omega$ des Punktfeldes (ω_0) entspricht im (ω_ι) eine unikursale Fundamentalkurve r_i. Ordnung f_i^ι, nämlich die Schnittkurve des Hauptkegels Φ_i^ι mit der Ebene ω. Jedem s_k — fachen Hauptpunkte $F_k^\iota \equiv f_k^\iota\,\omega$ des Feldes (ω_ι) entspricht im (ω_0) eine unikursale Hauptkurve s_k. Ordnung f_k^0, nämlich die Schnittkurve des Hauptkegels Φ_k^0 mit der Ebene $\bar{\omega}$.

2. Eigenschaften dreier Strahlenbündel. Zwischen drei gegebenen Strahlenbündeln (W_0), (W_1) und (W_2), deren Scheitel drei beliebige und voneinander verschiedene Punkte sind, stellen wir folgende Beziehungen her:

(4) $$(W_1)\,\varkappa\,(W_2),\ (W_0)\,\pi^n\,(W_1),\ (W_0)\,\pi^n\,(W_2),$$

welche den Relationen (1), (2) und (3) in Nr. 1 entsprechen. Die Schnittpunkte homologer Strahlen der kollinearen Bündel $(W_1)\,\varkappa\,(W_2)$ erzeugen bekanntlich eine durch die Scheitelpunkte W_1 und W_2 hindurchgehende kubische Raumkurve S_{12}^3.

Es gilt folgender Satz:

Jede von den vier Geraden $W_0 W_1$, $W_0 W_2$, $W_1 W_2$ und b_{12}, wo b_{12} die durch den Scheitelpunkt W_0 hindurchgehende Bisekante der kubischen Raumkurve S_{12}^3 ist, trifft unendlich-viele Tripel homologer Strahlen der gegebenen Bündel (W_0), (W_1) und (W_2).

Dem Strahlenbüschel $W_2\,(a_2, \ldots)$, dessen Trägerebene $\gamma_2 = W_0\,W_1\,W_2$ ist, entsprechen in den Bündeln $(W_0)\,\pi^n\,(W_1)$ — vgl. die Relation (4) — ein unikursaler Strahlenkegel n.-ten Ordnung $\Gamma_0^n\,(a_0, \ldots)$ und ein Strahlenbüschel $W_1\,(a_1, \ldots)$ mit der Trägerebene γ_1. Die Gerade $W_0\,W_1 = \gamma_2\,\gamma_1$ trifft daher unendlichviele Tripel $a_0\,a_1\,a_2, \ldots$ homologer Strahlen der Bündel (W_0), (W_1) und (W_2), w. z. b. w.

Dem Strahlenbüschel $W_0\,(c_0, \ldots)$, dessen Trägerebene $\delta_0 = W_0\,W_1\,W_2$ ist, entsprechen in den kollinearen Bündeln $(W_1)\,\varkappa\,(W_2)$ zwei projektive Strahlenbüschel $\Delta_1^n\,(c_1, \ldots)\ \overline{\wedge}\ \Delta_2^n\,(c_2, \ldots)$, deren Träger unikursale Kegel n.-ter Ordnung Δ_1^n, Δ_2^n sind. Die Gerade $W_1\,W_2$ schneidet daher unendlichviele Tripel $c_0\,c_1\,c_2, \ldots$ homologer Strahlen der betrachteten Bündel, w. z. b. w.

Weil die Schnittgeraden $a_{12} = \alpha_1\,\alpha_2, \ldots$ homologer Ebenen α_1 und $\alpha_2, \ldots$ der Bündel $(W_1)\,\varkappa\,(W_2)$ eine Bisekantenkongruenz (1. Ordnung und 3. Klasse) der kubischen Raumkurve S_{12}^3 bilden, so geht durch den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) eine einzige Bisekante $b_{12} = \beta_1\,\beta_2$ der S_{12}^3 hindurch. Den projektiven Strahlenbüscheln $W_1\,(d_1, \ldots)\ \overline{\wedge}\ W_2\,(d_2 \ldots)$, welche β_1 und β_2 zu Trägerebenen besitzen, entspricht im Bündel (W_0) ein unikursaler Strahlenkegel n. Ordnung (B_0^n). Es folgt unmittelbar, dass die Bisekante b_{12} unendlichviele Tripel $d_0\,d_1\,d_2, \ldots$ homologer Strahlen der Bündel (W_0), (W_1) und (W_2) trifft, w. z. b. w.

Betrachten wir jetzt zwei projektive Strahlenbüschel $W_1\,(e_1, \ldots)\ \overline{\wedge}\ W_2\,(e_2, \ldots)$, dessen Träger zwei beliebige homologe Ebenen γ_1 und γ_2 der Bündel $(W_1)\,\varkappa\,(W_2)$ sind. Im Bündel (W_0) entspricht ihnen ein unikursaler Strahlenkegel n. Ordnung $\Gamma_0^n\,(e_0, \ldots)$. Da aber die Bisekante $c_{12} = \gamma_1\,\gamma_2$ der S_{12}^3 n Erzeugende dieses Kegels trifft, so folgt unmittelbar:

Jede Bisekante der kubischen Raumkurve S_{12}^3, welche im Allgemeinen den Scheitelpunkt W_0 des Bündels (W_0) nicht enthält, *trifft n Tripel homologer Strahlen der Bündel* (W_0), (W_1) und (W_2).

Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Jede beliebige Gerade des Strahlenbündels (W_0) *trifft ein Tripel, und jede beliebige Gerade des Strahlenbündels* (W_ε), $\varepsilon = 1, 2$, *trifft n Tripel homologer Strahlen der Bündel* (W_0), (W_1) und (W_2).

Ist p_0 eine beliebige Gerade (resp. r_i — fache Hauptgerade) des Bündels (W_0), und sind $\pi_2 = W_2 p_0$, π_1 homologe Ebenen der Bündel (W_2) $\varkappa$ (W_1), so schneidet p_0 nur ein Tripel homologer Strahlen: $b_1 = \pi_1 \pi_2$, b_2 und b_0 der gegebenen Bündel, w. z. b. w.

Dem Strahlenbüschel W_2 $(b_2, \ldots)$, dessen Trägerebene $\pi_2 = W_2 p_1$ durch den Scheitel des Bündels (W_2) und eine beliebige Gerade (resp. s_k — fache Hauptgerade) p_1 des Bündels (W_1) hindurchgeht, entspricht im Bündel (W_0) ein unikursaler Strahlenkegel n. Ordnung II_0^n $(b_0, \ldots)$. Da aber die Gerade p_1 n Erzeugende $e_0, \ldots$ dieses Kegels schneidet, so trifft p_1 n Tripel e_0 e_1 $e_2, \ldots$ homologer Strahlen der Bündel (W), (W_1) und (W_2), w. z. b. w.

3. Der Strahlenkomplex $(2n+1)$. **Grades K.** Betrachtet man die drei Strahlenbüschel (W_0), (W_1) und (W_2), welche der Relation (4) in Nr. 2 genügen und verschiedene Scheitelpunkte besitzen, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Tripel homologer Strahlen a_0 a_1 a_2, b_0 b_1 b_2, ... dieser Bündel einen Komplex K.

Eine beliebige Ebene ω, welche die Scheitelpunkte W_0, W_1 und W_2 nicht enthält, schneidet (Nr. 1) diese Bündel in drei kollokalen ebenen Punktfeldern (ω_0), (ω_1) und (ω_2), die Relationen (1 a), (2 a) und (3 a) in Nr. 1 genügen. Die Verbindungsgeraden, die je ein Tripel homologer Punkte dieser Felder enthalten (und dem Komplex K angehören), erzeugen[5]) im Allgemeinen eine Komplexkurve $(2n+1)$. Klasse, $2(4n-1)$. Ordnung und $(2n-1)$. Geschlechts C'. Jede von den drei Koinzidenzgeraden der kollokalen kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2) ist eine n — fache Tangente, und jede Gerade F_k^1 F_k^2, welche zwei homologe s_k — fache Hautpunkte dieser Felder verbindet, ist eine s_k — fache Tangente dieser Komplexkurve C'.

Es lässt sich aber leicht erkennen, dass jede Komplexkurve, deren Ebene durch eine n — fache (resp. s_k — fache) Tangente der Komplexkurve C' geht, diese Gerade zur n — fachen (bezw. s_k — fachen) Tangente besitzt. Es ergibt sich also, dass jede n-fache (resp. s_k-fache) Tangente einer beliebigen Komplexkurve des Komplexes K eine *n-fache* (bezw. *s_k-fache*) *Gerade* dieses Komplexes ist.

Geht die Schnittebene ω durch irgend einen festen Punkt P hindurch, so gehören die $(2n+1)$ aus P an die Komplexkurve C' gelegten Tangenten dem Komplexe K an. Der Komplexkegel Γ mit dem Scheitel P ist also von der Ordnung $(2n+1)$. Liegt P auf einer n — fachen (resp. s_k — fachen) Tangente der Komplexkurve C', so ist diese Gerade eine n — fache (bezw. s_k — fache) Erzeugende des Komplexkegels Γ. Aus Nr. 2 ergibt sich unmittelbar, dass die durch P gehende Bisekante der kubischen Raumkurve S_{12}^3 und die Geraden $P W_1$, $P W_2$ der Bündel (W_1), (W_2) n — fache Erzeugende, und die Gerade $P W_0$ des Bündels (W_0) eine einfache Erzeugende des Komplexkegels Γ sind. Es lässt sich aber leicht erkennen, dass jede Gerade, welche zwei homologe s_k — fache Hauptgeraden f_k^1 und f_k^2 der Bündel (W_1) $\varkappa$ (W_2) trifft und durch P hindurchgeht, eine s_k — fache Gerade des Komplexkegels Γ ist. Da aber alle vielfache Erzeugende des Kegels Γ (s. die Beziehung II in Nr. 1) für

$$\vartheta = 3 \cdot \frac{1}{2} n (n+1) + \sum \frac{1}{2} s_k (s_k - 1) = 3 \cdot \frac{1}{2} n (n-1) + \frac{1}{2} (n-1)(n-2)$$
$$= (n-1)(2n-1)$$

Doppelerzeugende zählen, somit ist der Komplexkegel $(2n+1)$. Ordnung Γ von der Klasse $2(4n-1)$ und vom Geschlecht $2n-1$. Es gelten daher folgende Sätze:

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W_0) *und jedem von zwei kollinearen Strahlenbündeln* (W_1), (W_2) — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Tripel homologer Strahlen dieser Bündel einen Komplex* $(2n+1)$. *Grades K. Alle Geraden des Bündels* (W_0) *gehören diesem Komplexe K an. Alle Geraden der Bündel* (W_1), (W_2) *und alle Bisekanten der kubischen Raumkurve* S_{12}^3, in deren Punkten je zwei homologe Strahlen der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) sich schneiden, *sind n — fache Geraden dieses Komplexes K. Jede zwei homologe s_k — fache Fundamentalstrahlen der betrachteten Bündel* (W_1) *und* (W_2) *sind Leitgeraden einer linearen Strahlenkongruenz, deren Strahlen s_k — fache Geraden des Komplexes K bilden.*

4. Die Strahlenkongruenz C **von der Ordnung und Klasse** $3(n+1)$. Betrachtet man vier Strahlenbündel

(5) $\quad (W_1) \varkappa (W_2) \varkappa (W_3) \qquad (W_0)\ \pi^n\ (W_\iota) \qquad (\iota = 1, 2, 3,)$,

welche den Relationen (1), (2) und (3) in Nr. 1 genügen und voneinander verschiedene Scheitelpunkte W_0, W_ι besitzen, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quadrupel homologer Strahlen a_0 a_1 a_2 a_3, b_0 b_1 b_2 b_3, ... dieser Bündel eine Kongruenz C.

Eine beliebige Ebene ω, welche die Scheitel W_0 und W_ι nicht enthält, schneidet die betrachteten Bündel (vgl. Nr. 1) in vier kollokalen

5) Anton Plamitzer, Erzeugnisse einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen Grundgebilden zweiter Stufe, Crelles Journal fur Mathematik 171 (1934), Nr. 5.

icm©

Punktfeldern (ω_0) und (ω_ι), die den Relationen (1a), (2a) und (3a) in Nr. 1 genügen. Da[6]) aber $3(n+1)$—mal vier homologe Punkte dieser Felder in je einer Geraden liegen, so enthält die Schnittebene ω ebensoviele Strahlen der Kongruenz C und C ist also von der Klasse $3(n+1)$.

Um die Ordnung $3(n+1)$ der Kongruenz C zu bestimmen, betrachten wir den in Nr. 3 untersuchten Strahlenkomplex $(2n+1)$. Grades K und einen Strahlenkomplex 3. Grades K', dessen Elemente[7]) Treffgeraden sämtlicher Tripel homologer Strahlen $a_1\ a_2\ a_3, \ldots$ der kollinearen Bündel $(W_1) \barwedge (W_2) \barwedge (W_3)$ sind. Die durch irgend einen festen Punkt P hindurchgehende Strahlen dieser Komplexe bilden bekanntlich einen Komplexkegel $(2n+1)$. Ordnung Γ und einen Komplexkegel 3. Ordnung Δ. Die Geraden PW_1, PW_2 und die durch P gehende Bisekante b_{12} der kubischen Raumkurve S^3_{12} sind aber (vgl. Nr. 3) n—fache Erzeugende des Kegels Γ und einfache[7]) Erzeugende des Kegels Δ. Die konzentrischen Komplexkegel Γ und Δ besitzen—ausser den drei Geraden PW_1, PW_2, b_{12}—noch weitere $3(2n+1)-3n=3(n+1)$ gemeinsame Erzeugende $e, \ldots$ Die Gerade PW_ε, $\varepsilon=1, 2$, (resp. die Bisekante b) trifft (vgl. Nr. 2) n Tripel homologer Strahlen $a_0\ a_1\ a_2$, $b_0\ b_1\ b_2, \ldots$ der betrachteten Bündel (W_0), (W_1), (W_2). Da aber jede von den n zugeordneten Strahlen a_3, $b_3, \ldots$ des Bündels (W_3) und die Gerade PW_ε (resp b_{12}) im Allgemeinen windschief sind, so gehören die drei Elemente PW_1 PW_2 und b_{12} der Kongruenz C nicht an. Jede andere gemeinsame Gerade e der Kegel Γ und Δ trifft, als Erzeugende des Komplexkegels Γ n Tripel homologer Strahlen $e_0\ e_1\ e_2$, $f_0\ f_1\ f_2, \ldots$ der Bündel (W_0), (W_1) (W_2), und e trifft, als Erzeugende des Komplexkegels Δ, ein Tripel homologer Strahlen: a) $g_1\ g_2\ g_3$, resp. b) $e_1\ e_2\ e_3$ der kollinearen Bündel $(W_1) \barwedge (W_2) \barwedge (W_3)$. Im ersten Falle a) bestimmen die homologen Ebenen $\beta_1 = e_1\ g_1$ und $\beta_2 = e_2\ g_2$ der Bündel $(W_1) \barwedge (W_2)$ die einzige durch P gehende Bisekante $b_{12} = \beta_1\ \beta_2$ der kubischen Raumkurve S^3_{12}, und die betrachtete Gerade e fällt—gegen die Voraussetzung—mit der Bisekante b_{12} zusammen. Im zweiten Falle b) trifft die Gerade e vier homologe Strahlen $e_0\ e_1\ e_2\ e_3$ der Bündel (W_0) und (W_ι), und bildet daher einen Strahl der Kongruenz C. Da aber der Punkt P $3(n+1)$ solche Kongruenzstrahlen $e, \ldots$ enthält, so ist die Kongruenz C von der Ordnung $3(n+1)$, w. z. b. w.

Die Strahlen des Komplexes 3. Grades K', welche durch den Scheitelpunkt W_0 hindurchgehen, bilden einen Komplexkegel 3. Ordnung Δ. Jede beliebige Erzeugende c des Δ trifft aber nicht nur die drei homologen Geraden $c_1\ c_2\ c_3$ der Bündel $(W_1) \barwedge (W_2) \barwedge (W_3)$, sondern auch die zugeordnete Gerade c_0 des Bündels (W_0). Jede Erzeugende c des Kegels 3. Ordnung Δ bildet daher einen Strahl der Kongruenz C und der Scheitel W_0 dieses Kegels Δ ist ein singulärer Punkt dritten Grades dieser Kongruenz.

Die Strahlen des Komplexes $(2n+1)$. Grades K, welche durch den Scheitel z. B. W_3 hindurchgehen, bilden einen Komplexkegel $(2n+1)$. Ordnung Γ. Jede beliebige Erzeugende d dieses Kegels, als Treffgerade homologer Strahlen $d_0\ d_1\ d_2$ der Bündel (W_0), (W_1), (W_2) und des zugeordneten Strahles d_3 des Bündels (W_3), bildet daher einen Strahl der Kongruenz C.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt unmittelbar:

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W_0) und jedem von drei kollinearen Strahlenbündeln (W_ι), $\iota=1, 2, 3$ — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quadrupel homologer Strahlen dieser Bündel eine Kongruenz $3(n+1)$. Ordnung und $3(n+1)$. Klasse C. Der Scheitelpunkt W_0 des Bündels (W_0) ist ein singulärer Punkt 3. Grades und jeder Bündelscheitelpunkt W_ι ist ein singulärer Punkt $(2n+1)$. Grades dieser Strahlenkongruenz C.*

5. Die mit der Kongruenz C zusammenhängenden Kegelflächen. Die Strahlen der Kongruenz C, welche eine beliebige Gerade p schneiden, erzeugen bekanntlich[8]) eine Regelfläche $6(n+1)$. Grades Ψ mit einer $3(n+1)$—fachen Leitgeraden p. Sind $a, b, \ldots$ Erzeugende dieser Regelfläche Ψ, welche p und sämtliche Quadrupel homologer Strahlen $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$, $b_0\ b_1\ b_2\ b_3, \ldots$ der Bündel (W_0) und (W_ι), $\iota=1, 2, 3$, schneiden, so kann man fragen nach den Kegelflächen Γ^0 und Γ^ι, welche durch die Geraden:

a) a_0, $b_0, \ldots$ des Strahlenbündels (W_0),

b) a_ι, $b_\iota, \ldots$ des Strahlenbündels (W_ι)

erzeugt sind.

Im Bündel (W_0) nehmen wir einen Strahlenbüschel $(W_0)_\delta$ an, dessen Trägerebene eine beliebige Ebene δ ist. Diesem Büschel entsprechen in den Bündeln (W_ι) — vgl. die Relation (5) in Nr. 4 — drei Strahlenbüschel (Δ^n_ι), deren Träger unikursale Kegel n. Ordnung Δ^n_ι sind. Die Treffgeraden homologer Strahlen der projektiven Büschel:

[6]) A. Plamitzer, l. c. [5]), Nr. 7.

[7]) G. Loria, l. c. [1]), Nr. 26.

[8]) Rudolf Sturm, Die Gebilde ersten u. zweiten Grades d. Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, Leipzig 1892, I. Th., Nr 34.

$$(W_0)_\delta \,\overline{\wedge}\, (\Delta_1^n) \,\overline{\wedge}\, (\Delta_2^n) \,\overline{\wedge}\, (\Delta_3^n)$$

erzeugen[9]) eine Regelfläche Δ^* vom Grade $2(1+n+n+n)=2(3n+1)$. Da aber die Leitgerade p $2(3n+1)$ Erzeugende der Δ^* trifft und durch jeden Schnittpunkt der Trägerebene δ mit diesen Erzeugenden je eine Gerade des Büschels $(W_0)_\delta$ hindurchgeht, so ergibt sich sofort: Im Falle a) erzeugen die Geraden $a_0, b_0, \ldots$ des Bündels (W_0) *eine Kegelfläche* Γ^0 *von der Ordnung* $2(3n+1)$.

Liegt eine r_i— fache Hauptgerade f_i^0 des Bündels (W_0) auf der Trägerebene δ, so erhalten wir (Nr. 1) projektive Büschel

$$(W_0)_\delta \,\overline{\wedge}\, (\Delta_1^{n-r_i}) \,\overline{\wedge}\, (\Delta_2^{n-r_i}) \,\overline{\wedge}\, (\Delta_3^{n-r_i}),$$

deren Träger die Ebene δ und die Kegel $(n-r_i)$. Ordnung $\Delta_\iota^{n-r_i}$ sind. Die Treffgeraden homologer Strahlen dieser Büschel erzeugen[9]) eine Regelfläche Δ vom Grade $2(1+n-r_i+n-r_i+n-r_i)=2(3n-3r_i+1)$. Aber der Fundamentalgeraden f_i^0 entsprechen (Nr. 1) in den Bündeln (W_ι), $\iota=1, 2, 3$, drei projektive Strahlenbüschel (Φ_i^ι), deren Träger die Hauptkegel r_i— ten Ordnung Φ_i^ι sind. Die Treffgeraden homologer Strahlen dieser drei Büschel erzeugen[10]) eine Strahlenkongruenz C'' von der Ordnung und Klasse $3r_i$. Da aber diese Strahlen der Kongruenz C'', welche die r_i — fache Hauptgerade f_i^0 schneiden, eine Regelfläche $6r_i$. Grades Φ mit einer $3r_i$— fachen Leitgeraden f_i^0 erzeugen, so zerfällt die Regelfläche $2(3n+1)$. Grades Δ^* in Δ und Φ. — Jetzt trifft die Leitgerade p $2(3n-3r_i+1)$ Erzeugende $d, \ldots$ der Regelfläche Δ und $6r_i$ Erzeugende $e, \ldots$ der Regelfläche Φ, und durch jeden Schnittpunkt dieser Erzeugenden $d, \ldots, e, \ldots$ mit der Trägerebene δ geht je eine Erzeugende des untersuchten Kegels $2(3n+1)$. Ordnung Γ^0. Da aber die $6r_i$ Schnittpunkte der Ebene δ mit den Erzeugenden $e, \ldots$ der Regelfläche Φ auf ihrer Leitgeraden f_i^0 liegen, so vereinigen sich mit f_i^0 alle $6r_i$ Erzeugende des Kegels Γ^0. — Solche Eigenschaft besitzt jede Ebene δ, welche die r_i— fache Hauptgerade f_i^0 enthält. Diese Gerade f_i^0 ergibt sich also als eine $6r_i$— *fache Erzeugende* des Kegels Γ^0.

Es soll noch bemerkt werden, dass alle vielfache Erzeugende f_i^0 des Kegels $2(3n+1)$. Ordnung Γ^0 (s. die Relationen I, III in Nr. 1) den

[9]) Anton Plamitzer, Sätze über die Treffgeraden projektiver Strahleninvolutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind. Sitzungsber. d. Akademie d. Wissenschaften in Wien (Math. — naturw. Kl. Abt. IIa) **126**. (1917). Nr. 13.

[10]) A. Plamitzer, l. c. [9]), Nr. 8.

$$\sum \frac{1}{2} \cdot 6r_i(6r_i-1) = 18 \sum r_i^2 - 3 \sum r_i = 18(n^2-1) - 3 \cdot 3(n-1) =$$
$$= 9(2n+1)(n-1)$$

Doppelerzeugenden äquivalent sind, und Γ^0 eine Kegelfläche von der Klasse $4(9n+5)$ und vom Geschlecht $3(4n+3)$ ist.

Im Falle b) können wir ganz analog die Kegelfläche Γ^ι erhalten. Zu diesem Zwecke müssen wir im Bündel (W_ι) eine beliebige Ebene λ_ι annehmen und die projektiven Strahlenbüschel

$$(\Lambda_0^n) \,\overline{\wedge}\, (W_1)_1 \,\overline{\wedge}\, (W_2)_2 \,\overline{\wedge}\, (W_3)_3$$

betrachten, deren Träger ein unikursaler Kegel n. Ordnung Λ_0^n und drei homologe Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Bündel (W_ι) sind. Die Treffgeraden homologer Strahlen dieser Büschel erzeugen (s.[9])) eine Regelfläche Λ^* vom Grade $2(n+1+1+1)=2(n+3)$. Liegt eine s_k— fache Hauptgerade f_k^ι des Strahlenbündels (W_ι) auf der Trägerebene λ_ι, so zerfällt Λ^* n eine Regelfläche Λ von der Ordnung $2(n-s_k+1+1+1)=2(n-s_k+3)$ und in s_k — fache Regelfläche 2. Grades Λ^2, deren Erzeugende die drei Hauptgeraden f_k^1, f_k^2, f_k^3 (und homologe Strahlen des Hauptkegels Φ_k^0 von der Klasse s_k) schneiden.

Den Kegel Γ^ι können wir auch folgendermassen erhalten. Dem vorher konstruierten Kegel Γ^0 des Bündels (W_0) entspricht im Bündel (W_ι) — vgl. die Beziehungen I, IV, II in Nr. 1 und die Werte $\nu=2(3n+1)$, $l_i=6r_i$ — ein Kegel von der Ordnung:

$$\nu n - \sum l_i r_i = \nu n - 6 \sum r_i^2 = 2(3n+1)n - 6(n^2-1) = 2(n+3),$$

für welche jede s_k — fache Hauptgerade f_k^ι eine Erzeugende mit der Multiplizität

$$\nu s_k - \sum l_i \mu_{ik} = \nu s_k - 6 \sum r_i \mu_{ik} = 2(3n+1)s_k - 6ns_k = 2s_k.$$

Weil aber alle vielfache Erzeugende f_k^ι des Kegels Γ^ι den

$$\vartheta = \sum \frac{1}{2} \cdot 2s_k(2s_k-1) = 2\sum s_k^2 - \sum s_k = 2(n^2-1) - 3(n-1) =$$
$$= (n-1)(2n-1)$$

Doppelerzeugenden äquivalent sind, so ist bekanntlich dieser Kegel 28 $(n+1)$. Klasse und $3(4n+3)$. Geschlechts.

Es gelten daher folgende Sätze:

Bezeichnet man mit $a, b, \dots$ *die Strahlen der* in Nr. 4 betrachteten *Kongruenz C, welche irgend eine feste Gerade* p *und sämtliche Quadrupel homologer Strahlen* $a_0\, a_1\, a_2\, a_3,\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3, \dots$ *der gegebenen Bündel* (W_0), *und* (W_ι), $\iota = 1, 2, 3$, *schneiden, so erzeugen:*

a) *die Geraden* $a_0, b_0, \dots$ *des Bündels* (W_0) *eine Kegelfläche* Γ^0 $2(3n+1)$. *Ordnung,* $4(9n+5)$. *Klasse und* $3(4n+3)$. *Geschlechts, welche jede* r_i — *fache Hauptgerade* f_i^0 *dieses Bündels zu einer* $6r_i$ — *fachen Erzeugende besitzt.*

b) *die Geraden* $a_\iota, b_\iota, \dots$ *des Bündels* (W_ι) *eine Kegelfläche* Γ^ι $2(n+3)$. *Ordnung,* $28(n+1)$. *Klasse und* $3(4n+3)$. *Geschlechts, welche jede* s_k — *fache Hauptgerade* f_k^ι *dieses Bündels zu einer* $2s_k$ — *fachen Erzeugende besitzt.*

6. Die Regelfläche $4(2n+3)$. Grades Ω. Betrachtet man fünf Strahlenbündel

$$(6) \qquad (W_1)\varkappa(W_2)\varkappa(W_3)\varkappa(W_4), \quad (W_0)\pi^n(W_\varepsilon) \quad (\varepsilon = 1, 2, 3, 4),$$

welche den Relationen (1), (2) und (3) in Nr. 1 genügen und voneinander verschiedene Schneitelpunkte W_0, W_ε besitzen, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quintupel homologer Strahlen $a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4,\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4, \dots$ dieser Bündel eine Regelfläche Ω vom Grade $4(2n+3)$.

Um den Grad der Ω zu bestimmen, nehmen wir im Bündel (W_4) eine Kegelfläche $2(n+3)$. Ordnung Γ^4 an, welche kollinear der in Nr. 5 betrachteten Kegelfläche Γ^ι des Bündels (W_ι), $\iota = 1, 2, 3$, zugeordnet ist. Die Strahlen $a, \dots$ der Kongruenz C (Nr. 4), welche irgend eine feste Gerade p und sämtliche Quadrupel homologer Strahlen $a_0\, a_1\, a_2\, a_3, \dots$ der Bündel (W_0) und (W_ι) schneiden, erzeugen (Nr. 5) eine Regelfläche $6(n+1)$. Grades Ψ mit einer $3(n+1)$ — fachen Leitgeraden p. Um den Grad $4(2n+3)$ der untersuchten Regelfläche Ω zu bestimmen, stellen wir eine [1, 1] — deutige Hilfskorrespondenz zwischen den Erzeugenden a_4 und a, b_4 und $b, \dots$ der Flächen Γ^4 und Ψ her. In dieser Korrespondenz gibt es[11]) im Allgemeinen $2(n+3)+6(n+1) = 4(2n+3)$ solche Paare homologer Strahlen c_4 und $c, \dots$, welche sich in je einem Punkte schneiden. Das Element z. B. c trifft nicht nur c_4, sondern auch — als Erzeugende der Regelfläche Ψ — vier homologe Geraden $c_0\, c_1\, c_2\, c_3$, und liegt daher auf der Regelfläche Ω. Da aber die Leitgerade p der Ψ $4(2n+3)$ Erzeugende $c, \dots$ der Ω schneidet, so ist Ω vom $4(2n+3)$.

[11]) Antoni Plamitzer, Über mehrdeutige Verwandtschaften auf unikursalen Trägern. Prace Matem.-Fiz. T. 30. Warszawa 1919. Nr. 2.

Grade, w. z. b. w. — In Nr. 8 weisen wir nach, dass die Fläche Ω vom Geschlecht $4(4n+5)$ ist.

Es soll noch bemerkt werden, dass die $3(n+1)$ durch den Schneitel z. B. W_4 hindurchgehende Strahlen der Kongruenz C (Nr. 4) Erzeugende der Regelfläche Ω sind. Betrachten wir noch die Strahlenkongruenz 6. Ordnung C', deren Elemente[12]) die Treffgeraden sämtlicher Qradrupel homologer Strahlen $a_1\, a_2\, a_3\, a_4, \dots$ der kollinearen Bündel (W_ι), $\iota = 1, 2, 3, 4$, sind, so sind auch die 6 durch den Scheitel W_0 hindurchgehende Strahlen dieser Kongruenz C' Erzeugende der Regelfläche Ω. Daher:

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W_0) *und jedem von vier kollinearen Strahlenbündeln* (W_ι), $\iota = 1, 2, 3, 4$ — welche verschiedene Scheitelpunkte besitzen — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quintupel homologer Strahlen dieser Bündel eine Regelfläche* $4(2n-3)$. *Grades und* $4(4n-5)$. *Geschlechts* Ω, *für welche die Scheitel dieser Bündel singulär sind. Durch den Scheitel* W_0 *gehen 6 Erzeugende, und durch den Scheitel* W_ι *gehen* $3(n+1)$ *Erzeugende der Regelfläche* Ω *hindurch.*

7. Die mit der Regelfläche Ω zusammenhängenden Kegelflächen. Sind $a, b, \dots$ Erzeugende der Regelfläche Ω, welche (Nr. 6) sämtliche Quintupel homologer Strahlen $a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4,\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4, \dots$ der betrachteten Bündel (W_0) und (W_ι), $\iota = 1, 2, 3, 4$, schneiden, so kann man fragen nach den Kegelflächen Δ^0 und Δ^ι, welche durch die Geraden:

a) $a_0, b_0, \dots$ des Bündels (W_0),

b) $a_\iota, b_\iota, \dots$ des Bündels (W_ι)

erzeugt sind.

Im Bündel (W_0) nehmen wir einen Strahlenbüschel $(W_0)_\delta$ an, dessen Trägerebene eine beliebige Ebene δ ist. Diesem Büschel entsprechen in den Bündeln (W_ι) vier projektive Strahlenbüschel

$$(\Delta_1^n)\,\overline{\wedge}\,(\Delta_2^n)\,\overline{\wedge}\,(\Delta_3^n)\,\overline{\wedge}\,(\Delta_4^n),$$

deren Träger unikursale Kegel n. Ordnung Δ_ι^n sind. Sind a_0 und a_1, a_2, a_3, a_4 homologe Strahlen dieser Büschel, a^* zwei Treffgeraden des Quadrupels $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ und $A^* = a^*\delta$ zwei Schnittpunkte der Elemente a^* und δ, so ordnen wir jeder Geraden a_0 des Büschels $(W_0)_\delta$ zwei Strahlen $a' = W_0 A^*$ dieses Büschels zu, welche den Scheitel W_0 mit den Schnittpunkten A^* verbinden. Da aber die Treffgeraden homologer Strahlen

[12]) G. Loria, l. c. [1]), Nr. 28.

der Büschel (Δ_ι^n) eine Regelfläche Δ^* vom Grade $2(n+n+n+n)=8n$ erzeugen[13], und jede Gerade a' ebensoviele Erzeugende $a^*, b^*, \ldots$ der Δ^* trifft, so ordnen wir $8n$ Strahlen $a_0, b_0, \ldots$ des Büschels $(W_0)_\delta$ dem Elemente a' zu. Auf diese Weise[14] gelangen wir zu einer Korrespondenz $(8n,2)$ zwischen den Strahlen a_0 und $a', \ldots$ des Büschels $(W_0)_\delta$. Jede Gerade c^*, welche den Koinzidenzstrahl $c_0=c'$ dieser Korrespondenz und vier homologe Elemente $c_1\ c_2\ c_3\ c_4$ trifft, ist eine Erzeugende der in Nr. 6 untersuchten Regelfläche Ω. Da aber die $8n+2$ Koinzidenzstrahlen $c_0=c', \ldots$ unserer Korrespondenz Erzeugende der Kegelfläche Δ^0 sind, *so ist Δ^0 von $2(4n+1)$ Ordnung.*

Liegt eine r_i — fache Hauptgerade f_i^0 des Strahlenbündels (W_0) auf der Trägerebene δ, so erhalten wir (vgl. Nr. 1) vier projektive Strahlenbüschel

$$(\Delta_1^{n-r_i}) \,\overline{\wedge}\, (\Delta_2^{n-r_i}) \,\overline{\wedge}\, (\Delta_3^{n-r_i}) \,\overline{\wedge}\, (\Delta_4^{n-r_i}),$$

deren Träger unikursale Kegel $(n-r_i)$. Ordnung $\Delta_\iota^{n-r_i}$ sind. Mit Hilfe der Regelfäche $8(n-r_i)$. Grades Δ, deren Erzeugende Treffgeraden homologer Strahlen dieser Büschel sind, stellen wir eine Hilfskorrespondenz $[8(n-r_i), 2]$ zwischen den Strahlen des Büschels $(W_0)_\delta$ her. Diese Korrespondenz lehrt, dass die Trägerebene δ $8(n-r_i)+2$ Erzeugende der Kegelfläche $2(4n+1)$. Ordnung Δ^0 enthält. Aber dem Hauptstrahle f_i^0 entsprechen (Nr. 1) vier projektive Strahlenbüschel (Φ_i^ι), deren Träger die Hauptkegel r_i — ten Ordnung Φ_i^ι der Bündel (W_ι) sind. Da die Treffgeraden homologer Strahlen dieser Büschel eine Regelfläche Φ vom Grade $8r_i$ erzeugen, so trifft die f_i^0 $8r_i$ Erzeugende $e^*, f^*, \ldots$ der Φ. Die Gerade z. B. e^* schneidet vier homologe Elemente $e_1\ e_2\ e_3\ e_4$ der Büschel (Φ_i^ι) und die zugeordnete Gerade $e_0=f_i^0$. Das Element e^* ist daher eine Erzeugende der Regelfläche Ω und die Gerade $e_0=f_i^0$ ist eine Erzeugende des Kegels Δ^0. Die $8r_i$ Geraden $e^*, f^*, \ldots$ lehren, dass ebensoviele Erzeugende $e_0, f_0, \ldots$ des Kegels Δ^0 mit dem Elemente f_i^0 zusammenfallen. Solche Eigenschaft besitzt jede Trägerebene δ, welche die r_i — fache Hauptgerade f_i^0 des Bündels (W_0) enthält. Diese Gerade f_i^0 ergibt sich also als *eine $8r_i$ — fache Erzeugende des Kegels Δ^0.*

Weil aber alle vielfache Erzeugende f_i^0 des Kegels Δ^0 (s. die Beziehungen I, III in Nr. 1) den

$$\sum \frac{1}{2}\,.\,8r_i(8r_i-1)=32\sum r_i^2-4\sum r_i=32(n^2-1)-4\,.\,3(n-1)=$$
$$=4(n-1)(8n+5)$$

Doppelerzeugenden äquivalent sind, so ist bekanntlich diese Kegelfläche Δ^0 $2(24n+21)$. Klasse und $4(4n+5)$. Geschlechts.

Im Falle b) erhalten wir ganz analog die Kegelfläche Δ^ι. Aber wir können Δ^ι auch folgendermassen erhalten. Dem vorher konstruierten Kegel Δ^0 des Bündels (W_0) entspricht im Bündel (W_ι) — vgl. die Beziehungen I, IV, II in Nr. 1 und die Werte $\nu=2(4n+1)$, $l_i=8r_i$ — eine Kegelfläche Δ^ι von der Ordnung:

$$\nu\, n-\sum l_i\, r_i=\nu\, n-8\sum r_i^2=2(4n+1)n-8(n^2-1)=2(n+4)$$

für welche jede s_k — fache Hauptgerade f_k^ι eine Erzeugende mit der Multiplizität

$$\nu\, s_k-\sum l_i\, \mu_{ik}=\nu\, s_k-8\sum r_i\, \mu_{ik}=2(4n+1)s_k-8n\, s_k=2s_k$$

ist. Weil aber alle vielfache Erzeugende f_k^ι des Kegels Δ^ι den

$$\sum \frac{1}{2}\,.\,2s_k(2s_k-1)=2\sum{}' s_k^2-\sum s_k=2(n^2-1)-3(n-1)=$$
$$=(n-1)(2n-1)$$

Doppelerzeugenden äquivalent sind, so ist bekanntlich diese Kegelfläche Δ^ι $6(6n+9)$. Klasse und $4(4n+5)$. Geschlechts.

Es gelten daher folgende Sätze:

Bezeichnet man mit $a, b, \ldots$ die Erzeugende der in Nr. 6 *betrachteten Regelfläche Ω, welche sämtliche Quintupel homologer Strahlen $a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4$, $b_0\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4, \ldots$ der gegebenen Bündels (W_0) und (W_ι), $\iota=1, 2, 3, 4$, schneiden, so erzeugen:*

a) *die Geraden $a_0, b_0, \ldots$ des Bündels (W_0) eine Kegelfläche Δ^0 $2(4n+1)$. Ordnung, $2(24n+21)$. Klasse und $4(4n+5)$. Geschlechte, welche jede r_i — fache Hauptgerade f_i^0 dieses Bündels zu einer $8r_i$ — fachen Erzeugende besitzt.*

b) *die Geraden $a_\iota, b_\iota, \ldots$ des Bündels (W_ι) eine Kegelfläche Δ^ι $2(n+4)$. Ordnung, $6(6n+9)$. Klasse und $4(4n+5)$. Geschlechts, welche*

[13]) A. Plamitzer, l. c. [9]), Nr. 13.

[14]) Fritz Kliem, Über Örter von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe, Borna-Leipzig, 1909, p. 32 untersucht fünf kollineare Bündel und konstruiert ganz analog eine Korrespondenz (8,2).

jede s_k — fache Hauptgerade f_k^ι des Bündels (W_ι) zu einer $2s_k$ — fachen Erzeugende besitzt.

8. Eigenschaften der sechs Strahlenbündel. Betrachtet man sechs Strahlenbündel

$$(7) \quad (W_1)\varkappa(W_2)\varkappa(W_3)\varkappa(W_4)\varkappa(W_5), \quad (W_0)\pi^n(W_\varepsilon) \quad (\varepsilon=1,2,3,4,5)$$

welche den Relationen (1), (2) und (3) in Nr. 1 genügen und voneinander verschiedene Scheitelpunkte W_0, W_ε besitzen, so kann man fragen, wie oft sechs homologe Strahlen dieser Bündel je eine Gerade schneiden.

Gegeben sind solche Erzeugende $a,\ldots$ der in Nr. 6 betrachteten Regelfläche $4(2n+3)$. Grades Ω, welche sämtliche Quintupel $a_0a_1a_2a_3a_4,\ldots$ der Bündel (W_0) und (W_ι), $\iota=1,2,3,4$ schneiden. Da aber die Strahlen $a_\iota,\ldots$ des Bündels (W_ι) eine Kegelfläche Δ^ι (Nr. 7) erzeugen, so folgt unmittelbar aus der Kollineation $(W_\iota)\varkappa(W_5)$, dass die Strahlen $a_5,\ldots$ des Bündels (W_5) auch eine Kegelfläche Δ^5 von $2(n+4)$. Ordnung und vom $4(4n+5)$. Geschlechts erzeugen. Jeder Erzeugende a der Fläche Ω ordnen wir — vermittelst des Quintupels $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ — eine einzige Erzeugende a_5 des Kegels Δ^5 zu, und jeder Geraden a_5 dieses Kegels ordnen wir eine einzige Gerade a der Fläche Ω zu. Aus der so konstruierten Korrespondenz (1,1) zwischen den Erzeugenden der Flächen Ω und Δ^5 folgt nach dem Grundsatze von Clebsch -- dass *die* in Nr. 6 untersuchte *Regelfläche Ω vom Geschlecht $4(4n+5)$ ist*, w. z. b. w.

In dieser (1,1) — deutigen Korrespondenz gibt es [15]) im Allgemeinen $4(2n+3)+2(n+4)=10(n+2)$ solche Paare homologer Strahlen c und $c_5,\ldots$, welche sich in je einem Punkte schneiden. Die Erzeugende c der Fläche Ω trifft also fünf homologe Geraden $c_0\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4$ und die Erzeugende c_5 des Kegels Δ^5. Es ergibt sich folgender Satz:

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W_0) und jedem von fünf kollinearen Strahlenbündeln (W_ι), $\iota=1,2,3,4,5$ — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n-ten Grades festgestellt, so gibt es im Allgemeinen $10(n+2)$ solche Geraden, dass jede von ihnen je sechs homologe Strahlen dieser Bündel schneidet.*

---

[15]) A. Plamitzer, l. c. [11]), Nr. 2.

Sur la fonction ordinaire de Green de l'espace à trois dimensions.

par

Alfred Rosenblatt

(Kraków).

J'ai étudié, dans une série de travaux publiés aux C. R., au Bulletin des Sciences Mathématiques, aux Rendiconti dei Lincei, aux Annali di Matematica, aux Annales de l'École Normale Supérieure, au Bulletin de la Société Mathématique de Grèce, l'application de la méthode des approximations successives de M. Emile Picard aux équations différentielles. J'ai donné, dans ces travaux, des généralisations des théorèmes classiques de M. Picard en envisageant les équations aux dérivées partielles du type elliptique du second ordre, les équations bi- et m-harmoniques, les équations de la propagation de la chaleur etc. Comme une partie importante de l'oeuvre mathématique de Léon Lichtenstein est consacrée à l'étude des équations du type elliptique et à la théorie du potentiel je publie, sur l'invitation aimable de M. S. Dickstein, volontiers les résultats de mes recherches récentes sur la fonction de Green ordinaire dans l'espace euclidien à trois dimensions dans le Volume des Prace matematyczno-fizyczne dédié à la mémoire de l'éminent géomètre.

Je remarque de suite que les résultats que je vais présenter ici sont loin d'être satisfaisants et je me réserve d'y revenir ailleurs en les précisant, développant et simplifiant et en les appliquant aux équations differentielles du type elliptique du second ordre à trois variables indépendantes.

1. Je rappelle tout d'abord que dans une Note des C. R. du 5/11.34 „Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude des équations du second ordre elliptiques et non linéaires à trois variables indépendantes“ dont les résultats for-