Sur une classe de domaines

par

T. Ważewski

(Kraków).

Considérons, sur le plan euclidien, un ensemble ouvert et borné Ω et désignons par $d(\alpha)$ la droite

$$x = \rho \cos \alpha, \; y = \rho \sin \alpha.$$

Désignons par $e(\alpha, \rho)$ la droite passant par le point $(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ et perpendiculaire à la droite $d(\alpha)$. L'ensemble Ω. $e(\alpha, \rho)$ est formé par une famille de segments ouverts et disjoints. Soit $f_\alpha(\rho)$ le nombre de ces segments ($f_\alpha(\rho) = 0$ ou $f_\alpha(\rho) = +\infty$ lorsque cette famille est vide ou infinie. La fonction $f_\alpha(\rho)$ sera dite fonction caractéristique relative à Ω. Si pour chaque valeur de α on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(\rho)\, d\rho < +\infty$$

le domaine Ω sera appelé, selon M. Wilkosz, *domaine de Green.**)

Nous allons démontrer que la propriété d'un domaine consistant en ce qu'il est un domaine de Green n'est pas forcément invariante relativement à toutes les homéomorphies qui sont analytiques dans un domaine englobant Ω et sa frontière.

*) W. Wilkosz. Über den verallgemeinerten Fluss-Divergenz-Satz. Prace Matematyczno-Fizyczne T. XLIV, str. 41.

Voici un exemple justifiant notre assertion. Désignons par C_r $(r>0)$ la demi-circonférence $x^2+y^2=r^2$, $y\geqslant 0$ et désignons par Ω la demi-couronne bornée par la ligne L composée de C_1, de C_2 et des segments $-2\leqslant x\leqslant -1$ et $1\leqslant x\leqslant 2$ situés sur l'axe des x.

Soit $r(\nu)$ une suite des nombres pour laquelle on a: $1<r(\nu)<r(\nu+1)<2$ $(\nu=1, 2, \ldots)$; $r(\nu)\longrightarrow 2$.

Les demi-circonférences $C_{r(\nu)}$, $C_{r(\nu+1)}$ déterminent dans Ω une demi-couronne que nous désignerons par ω_ν. Or il existe un ensemble parfait Z_ν contenu dans $\overline{\omega}_\nu$*), dont la projection sur toute droite est de mesure nulle et qui a des points communs avec toute demi-droite du plan joignant l'origine des coordonnées avec un point quelconque de Ω.**)

Posons

$$\Gamma=\Omega-\sum_{\nu/0}^{\infty} Z_{2\nu+1}$$

et désignons par $f_\alpha(\rho)$ et $g_\alpha(\rho)$ les fonctions caractéristiques relatives respectivement à Ω et Γ. L'ensemble E_α des valeurs ρ pour lesquelles $f_\alpha(\rho)\neq g_\alpha(\rho)$ est évidemment de mesure nulle. On aura donc pour $0\leqslant\alpha<2\pi$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(\rho)\,d\rho=\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(\rho)\,d\rho\leqslant \text{longueur de } L<+\infty$$

ce qui prouve que Γ est un domaine (évidemment connexe) de Green.

Soit k une demi-droite quelconque issue de l'origine et passant par un point quelconque de Γ. Cette demi-droite a, en commun avec Γ, un ensemble composé d'un nombre infini de segments ouverts et disjoints. La transformation analytique

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v\quad\left(0<u,\ -\frac{\pi}{2}<v<\frac{3\pi}{2}\right)$$

fait correspondre au domaine Γ un domaine Δ et aux droites k des droites parallèles à l'axe u. En adoptant le système des coordonnées (u, v) désignons par $h_\alpha(\rho)$ la fonction caractéristique relative à Δ. On aura évidemment $h_{\frac{\pi}{2}}(\rho)=+\infty$ pour $0<\rho<\pi$, d'où

*) $\overline{\omega}_\nu$ désigne l'ensemble ω_ν augmenté de sa frontière.

**) Un tel ensemble Z_ν existe: v. S. Saks, Remarque sur la mesure linéaire des ensembles plans, Fund. Math. T. IX. p. 16.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\frac{\pi}{2}}(\rho)\,d\rho=+\infty$$

ce qui prouve que Δ n'est pas un domaine de Green.

Il paraît probable que la famille des transformations linéaires constitue le plus large groupe de transformations analytiques par rapport auquel la propriété caractérisant les domaines de Green est invariante.